УДК 531.36:534.1

К. С. Матвійчук (Ін-т механіки НАН України, Київ)

ТЕХНІЧНА СТІЙКІСТЬ АВТОНОМНИХ СИСТЕМ КЕРУВАННЯ ЗІ ЗМІННОЮ СТРУКТУРОЮ

We obtain conditions of the technical stability with respect to a given measure of autonomous dynamical systems with discontinuous control.

Отримано умови технічної стійкості за заданою мірою автономних динамічних систем з розривним керуванням.

У даній роботі вивчається технічна стійкість систем автоматичного керування зі змінною структурою [1 – 9], за допомогою яких здійснюється управління нейтральними об'єктами. Сформульовано критерії технічної стійкості вказаних систем на заданому обмеженому і нескінченному інтервалах часу, асимптотичної технічної стійкості за заданою мірою при всіх значеннях із заданої множини початкових збурень. Запропонований підхід вивчення технічної стійкості систем з розривним керуванням не пов'язаний з існуванням ковзного режиму [1 – 4] на границі перемикання. Викладені тут дослідження опираються на результати, що містяться в [10 – 23].

1. Основні припущення і формулювання задачі. Розглядаємо динамічні стани системи регулювання зі змінною структурою, за допомогою якої здійснюється керування вільним рухом лінійних об'єктів з постійними параметрами [1 – 4, 6 – 9]. Заданий процес описується системою диференціальних рівнянь n-го порядку з розривним керуванням [1, 2, 4, 8]

$$\frac{dx_i}{dt} = x_{i+1}, \quad i = 1, \ldots, n-1, \quad \frac{dx_n}{dt} = -\sum_{i=2}^{n} a_i x_i - u, \tag{1}$$

$$u = \psi x_1, \quad \psi = \begin{cases} \alpha & \text{при} \quad x_1 s > 0, \\ \beta & \text{при} \quad x_1 s < 0, \end{cases} \tag{2}$$

$$s = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i, \quad \alpha, \beta, a_i, c_i = \text{const}, \quad c_n = 1, \quad t \in T, \tag{3}$$

на заздалегідь визначеному обмеженому проміжку часу $T = [t_0, N\mu^{-1}]$, $T \subset I$, $I \equiv [t_0, +\infty)$ $t_0 \geq 0$, μ — малий додатний параметр: $\mu \in (0, 1)$, N — задана додатна постійна величина, що залежить від параметрів вихідної системи. Рух системи (1) – (3) розглядається при заданих початкових умовах

$$x_i(t_0) = x_i^0, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{4}$$

де $x_0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ — набори дійсних чисел із заданої множини початкових значень Ω_0, означеної нижче. Нехай при $u = 0$ $n-1$ корені характеристичного рівняння системи (1)

$$\lambda^n + a_n \lambda^{n-1} + \ldots + a_2 \lambda = 0 \tag{5}$$

мають від'ємні дійсні частини і один корінь дорівнює нулю $(\lambda = 0)$.

Задачу Коші (1) – (4) розглядаємо в заданій області

$$T \times D, \quad D = \{x_i : |x_i| < h_i, \ i = 1, \ldots, n\},$$

де додатні константи h_i — задані величини; $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — вектор в n-вимірному евклідовому просторі R^n. Припускаємо, що задача (1) – (4) задовольняє достатні для рівнянь з розривними правими частинами умови існування розв'язків [1, 2, 6, 8]. Позначимо через $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ розв'язок задачі (1) – (4). Покладемо

$$\mu \le M^{-1}, \quad M = \max\{\sup[|Y_i|, (x_1, \ldots, x_n) \in D], \ i = 1, \ldots, n\},$$
$$Y_1 = x_2, \ \ldots, \ Y_{n-1} = x_n, \ Y_n = -\sum_{i=2}^{n} a_i x_i - u. \tag{6}$$

Означимо міру, що характеризує відхилення функції $x = x(t)$ від значення $x(t) = 0$, в наступному вигляді:

$$\rho = \rho(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2. \tag{7}$$

Припустимо, що наперед задані: область можливих початкових станів Ω_0 системи (1) – (4)

$$\Omega_0 = \{x\colon \rho \le \gamma, \ \gamma > 0\}, \tag{8}$$

і область допустимих поточних станів $\Omega(t)$ системи (1) – (4)

$$\Omega(t) = \{x\colon \rho \le \eta(t) > 0\}, \tag{9}$$

де γ, $\eta(t)$ — задані число і обмежена в області $T \subset I$ функція, при цьому

$$\gamma \le \eta(t_0), \quad \Omega_0 \subset \Omega(t_0); \quad \eta(t) \le \eta \quad \forall t \in T, \quad \eta = \text{const} > 0. \tag{10}$$

Ставиться задача: визначити при керуванні u (2), (3) умови, які за заданою мірою $\rho = \rho(x)$ (7) забезпечують властивість

$$x(t) \in \Omega(t), \quad t \in T, \tag{11}$$

для розв'язків задачі (1) – (4) при всіх $x_0 \in \Omega_0$, заданих як допустимі початкові значення:

$$x(t_0) = x_0 \equiv (x_1^0, \ldots, x_n^0) \in \Omega_0. \tag{12}$$

Поставимо у відповідність системі (1) – (4) функцію Ляпунова. Розглянемо допоміжну систему $(n-1)$-го порядку

$$\frac{dx_i}{dt} = x_{i+1}, \quad i = 2, \ldots, n-1, \quad \frac{dx_n}{dt} = -\sum_{i=2}^{n} a_i x_i. \tag{13}$$

Корені характеристичного рівняння для системи рівнянь (13) співпадають з ненульовими коренями характеристичного рівняння (5). Тоді для стійкої системи (13) існує додатно означена квадратична форма

$$V_1(x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=2}^{n} b_{ij} x_i x_j, \quad b_{ij} = \text{const}, \quad b_{ij} = b_{ji}, \tag{14}$$

похідна за часом від якої внаслідок системи (13) буде мати вигляд

$$\frac{dV_1(t)}{dt} = W \equiv -\sum_{i=2}^{n} x_i^2 \tag{15}$$

і, отже, V_1 буде функцією Ляпунова для системи (13). Використовуючи (14), розглянемо функцію координат $(t, x_1, \ldots, x_n)$ [4, 5, 14 – 19]

$$\overline{V}(t,x) = \exp[\beta_1(t)]\left[V_1(x_2,\ldots,x_n)+\frac{1}{2}Y^2\right], \quad Y = \sum_{i=2}^{n} d_i x_{i-1} + x_n. \tag{16}$$

Зокрема, коефіцієнти d_i частково або всі при необхідності можна вибрати рівними величинам a_i із (1). Нехай $\beta_1(t)$ — задана обмежена, неперервно диференційовна функція часу $t \in T$ і підпорядкована наступним умовам:

$$|\beta_1(t)| \le K, \quad |d\beta_1(t)/dt| \le K_1, \tag{17}$$

де K, $K_1 > 0$ — відомі постійні величини. Звідси випливає, що функція $\exp[\beta_1(t)]$ в області T не прямує до нуля: $\exp[\beta_1(t)] \ne 0 \ \ \forall t \in T$. Припустимо, що функція $\overline{V}$ (16) задовольняє умову $\overline{V}(t,x) \ge c\rho(x)$, де $c = \text{const} > 0$ — задана величина. Довільний неперервний вибір початкових значень x_0 (4), (12) із Ω_σ (8) зв'яжемо з властивостями власних значень квадратичної форми $\overline{W}_1$ функції $\overline{V}$ (16) [23]

$$\overline{W}_1(x) = V_1(x_2,\ldots,x_n) + Y^2(x_1,\ldots,x_n). \tag{18}$$

Форма (18) має додатні власні значення $\varepsilon_i > 0$, $i = \overline{1,n}$, які є коренями вікового рівняння

$$\|A - \varepsilon E\| = 0, \tag{19}$$

де A — матриця із коефіцієнтів $\tilde{a}_{ij}$ форми (18), E — одинична матриця. Максимальне значення серед ε_i, $i = \overline{1,n}$, позначимо ε_n. Вважаємо $\overline{W}_1$ невиродженою. Нехай задано ортогональне перетворення з матрицею $Q = |q_{ik}|$:

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} q_{ik} y_k, \ i = 1,\ldots,n; \quad \bar{q}_i \bar{q}_j = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad i = j; \\ 0 & \text{при} \quad i \ne j, \end{cases} \ \bar{q}_l = (q_{l1},\ldots,q_{ln}), \tag{20}$$

що перетворює форму $\overline{W}_1$ (18) до нормального вигляду

$$\overline{W}_1(x) = \overline{W}_1(y) = y^* B y = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i y_i^2, \tag{21}$$

де елементи діагональної матриці $B = Q^* A Q$ мають таку властивість: $\varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \ldots < \varepsilon_n$; * — знак транспонування; $y = (y_1,\ldots,y_n)^*$. При цьому матрицею оберненого перетворення буде матриця Q^*:

$$y_k = \sum_{i=1}^{n} q_{ik} x_i, \quad k = 1,\ldots,n. \tag{22}$$

Із інваріантних властивостей перетворення (20) та (22) випливає, що $\sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n y_i^2$, сфера S з рівнянням $\rho(x) = 1$ при (20) відображається в таку ж сферу $\rho(y) = 1$, множина Ω_0 відображається сама в себе; координати точки B_i, що лежить на осі y_i і в якій гіперповерхня $\overline{W}(x) = \varepsilon_i$ дотикається до сфери S, задовольняють систему рівнянь [23]

$$\sum_{k=1}^{n} \tilde{a}_{jk} x_k - \varepsilon_j x_j = 0, \quad j = 1,\ldots,n, \tag{23}$$

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^2 = 1. \tag{24}$$

Використавши власні значення ε_i, $i=\overline{1,n}$, форми (18), знайдемо n взаємно ортогональних напрямків простору R_x^n — головних осей форми $\overline{W}_1$, які при перетворенні (20) переходять в координатний хрест. Оскільки за припущенням всі значення ε_i різні: $\varepsilon_i \neq \varepsilon_j$, $i \neq j$, то, як випливає із (23), для кожного ε_i система лінійних рівнянь [23]

$$\sum_{k=1}^{n} \tilde{a}_{jk} x_k - \varepsilon_i x_j = 0, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{25}$$

буде мати нетривіальний розв'язок $x_j^{(i)}$, $j=\overline{1,n}$. Такі розв'язки при кожному фіксованому $i=\overline{1,n}$ утворюють n наборів направляючих координат $x_j^{(i)}$, $j = \overline{1,n}$, $i=\overline{1,n}$, що характеризують n головних напрямків форми $\overline{W}_1$ і зв'язані з заданим ортогональним перетворенням (20), (22). Звідси випливає, що параметричні рівняння

$$x_j = x_j^{(i)} \tilde{\tau}, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{26}$$

де $\tilde{\tau}$ — змінний параметр, $-\infty < \tilde{\tau} < +\infty$, при $i=\overline{1,n}$ будуть визначати всі n головних осей $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ форми $\overline{W}_1$ (18), яка в їх системі координат має зображення (21). Якщо коефіцієнти $\tilde{a}_{ij}$ форми $\overline{W}_1$ (18) такі, що виконуються умови

$$\varepsilon_1 \le 1, \quad \varepsilon_2 \le 1, \ \ldots, \ \varepsilon_n \le 1, \tag{27}$$

то будемо мати

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i y_i^2 \le \rho(y) \le \gamma \quad \forall y \in \Omega_0, \tag{28}$$

тобто, враховуючи рівність (21), отримаємо

$$\overline{W}_1(x) \le \rho(x) \le \gamma \quad \forall x \in \Omega_0. \tag{29}$$

Припустимо, що власні значення ε_i форми (18) не задовольняють умови (27), тобто $\varepsilon_i > 1$, $i=\overline{1,n}$, хоча б для одного i. Нехай існує обмежена величина $\Lambda = \max_t \{\exp[\beta_1(t)]\}$, для якої справедлива нерівність $\Lambda \ge 1$. Покладемо $\theta = \Lambda \varepsilon_n$, $\varepsilon_n = \max\{\varepsilon_i\}$. Оскільки $\theta > 1$, то, зробивши перетворення $\tilde{a}_{ij}/\theta$, $i,j = 1, \ldots, n$, над коефіцієнтами форми (18), отримаємо нову квадратичну форму $W_1(x)$ з коефіцієнтами $a_{ij} = \tilde{a}_{ij}/\theta$ $i,j=\overline{1,n}$, і з тими ж головними напрямками (26). Власні значення μ_i, $i=\overline{1,n}$, форми $W_1(x)$ будуть задовольняти умови типу (27) і, більше того, при заданій функції $\beta_1(t)$ (17) буде справедливою властивість

$$0 < \exp[\beta_1(t)]\mu_n \le 1, \quad \forall t \in T, \tag{30}$$

де μ_n — максимальне власне значення форми $W_1(x)$. Властивість (30) для решти μ_i, $i=\overline{1, n-1}$, буде справедливою і поготів. Звідси замість функції $\overline{V}$ (16) введемо в розгляд залежну від значень μ_i, $i=\overline{1,n}$, функцію

$$V(t,x) = \exp[\beta_1(t)]\, W_1(x) = \exp[\beta_1(t)]\left[\frac{1}{\theta}V_1(x_2, \ldots, x_n) + \frac{1}{2\theta}Y^2(x)\right]. \tag{31}$$

Оскільки за умов (30) маємо $\exp[\beta_1(t)]\sum_{i=1}^{n}\mu_i y_i^2 \le \rho(y) \le \gamma \quad \forall\, y \in \Omega_0,\ t \in T$, то для (31) згідно з (27) – (30) справедливі нерівності

$$V(t, x_0) \le \rho(x_0) \le \gamma \quad \forall\, t \in T \quad \text{і} \quad \forall\, x_0 \in \Omega_0. \tag{32}$$

Для функції $\overline{V}$ (16), не підпорядкованої умові (30), згідно з (20), (22) властивість (32) буде справедливою лише в підобласті $\Omega_{01} \subset \Omega_0$:

$$\Omega_{01} = \{x\colon \rho(x) \le (r/\sqrt{\theta})^2 < r^2,\ r^2 \equiv \gamma\}, \tag{33}$$

де r — радіус n-вимірної області Ω_0 (8).

Означення 1. *Динамічний процес зі змінною структурою, що описується задачею Коші* (1) – (4) *при умові* (12), *називається технічно стійким на заданому обмеженому проміжку часу T за заданою мірою $\rho(x)$, якщо при розривному керуванні u* (2), (3) *вздовж збурених розв'язків $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ задачі* (1) – (4), (12) *для додатно означеної функції V* (31) *виконується умова*

$$V(t, x(t)) \le P(t), \quad t \in T, \tag{34}$$

якщо в початковий момент часу t_0 справедлива нерівність

$$V(t_0, x_0) \le b, \quad t_0 \in T, \tag{35}$$

де значення $V(t_0, x_0)$ задано на будь-яких початкових значеннях (4) *при умові* (12), *а задані постійна величина $b = \mathrm{const} > 0$, обмежені функції $P(t)$, $\eta(t)$ на вибраному інтервалі часу $t \subset I$ задовольняють умови*

$$\begin{gathered} P(t) \le \eta(t), \quad P(t_0) \ge b, \quad b > \gamma, \quad 0 < P(t) \le C, \quad C = \mathrm{const} > 0, \\ 0 < \eta(t) \le \eta, \quad \eta = \mathrm{const} > 0, \quad t, t_0 \in T. \end{gathered} \tag{36}$$

Означення 2. *Якщо умови означення* 1 *виконуються на будь-якому інтервалі часу $T \subseteq I$, то динамічний процес зі змінною структурою* (1) – (4), (12) *називається технічно стійким за мірою $\rho(x)$ на нескінченному інтервалі часу I.*

Означення 3. *Якщо при виконанні умов означення* 2 *вздовж розв'язків задачі Коші* (1) – (4), (12) *виконується умова*

$$\lim_{t \to +\infty} V(t, x(t)) = 0, \tag{37}$$

то вихідний процес зі змінною структурою (1) – (4), (12) *називається технічно асимптотично стійким за мірою $\rho(x)$.*

Означення 4. *Динамічний процес зі змінною структурою* (1) – (4), (12) *називається технічно нестійким за мірою $\rho(x)$ в області T або I при заданій сталій b, функціях $P(t)$, $\eta(t)$, коли при виконанні умови* (35), *заданої при будь-яких початкових значеннях* (4), (12), *для розв'язків $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ задачі Коші* (1) – (4), (12) *знайдеться значення $t_1 \in T$ або $t_1 \in I$, $t_1 > t_0$, таке, для якого виконується нерівність*

$$V(t_1, x(t_1)) > \eta, \quad \eta = \mathrm{const} > 0. \tag{38}$$

2. Достатні умови технічної стійкості процесу зі змінною структурою. Скористаємось позначеннями вздовж розв'язків системи (1) – (4), (12):

$$V(t) \equiv V(t, x(t)), \quad W(t) \equiv -\sum_{i=2}^{n} x_i^2(t), \quad Y(t) \equiv Y(x(t)),$$

$$M_\zeta(t) = M_\zeta(t, x(t)) \equiv \frac{1}{2}(d\beta_1(t)/dt)V(t) + \exp[\beta_1(t)] \times$$

$$\times\ (1/\theta)\left[(1/2)W(t) - \left\{\sum_{k=2}^{n} b_{nk}x_k(t) + Y(t)\right\}\xi x_1(t)\right], \quad \xi = \alpha, \beta.$$

На станах процесу (1) – (4), (12) введемо в розгляд такі функції:

$$\overline{\Phi}_\alpha(t) = M_\alpha(t) - \frac{c\mu}{2\theta(t+\mu)^2}\rho[x(t)], \quad \overline{\Phi}_\beta(t) = M_\beta(t) - \frac{c\mu}{2\theta(t+\mu)^2}\rho[x(t)].$$

Нехай функції $P(t)$, $\eta(t)$ мають наступні зображення:

$$P(t) = \exp\left[-\frac{1}{\mu+t}\right]\int_{t_0}^{t}\Phi(\tau)\exp\left[\frac{1}{\mu+t}\right]d\tau + b\exp\left[\frac{1}{\mu+t_0}\right] \times$$

$$\times\ \exp\left[-\frac{1}{\mu+t}\right], \quad \eta(t) = \int_{t_0}^{t}\Phi(\tau)\exp\left[\frac{1}{\mu+t}\right]d\tau + b\exp\left[\frac{1}{\mu+t_0}\right] \le \eta, \tag{39}$$

де задана невід'ємна, інтегровна по $t \in T$ функція $\Phi(t)$ задовольняє нерівність

$$\int_{t_0}^{t}\Phi(\tau)\exp\left[\frac{1}{\mu+t}\right]d\tau \le M_1\left(\mu + N\mu^{-1}\right)^2\left\{\exp\left[\frac{1}{\mu+t_0}\right] - \exp\left[\frac{1}{\mu+N\mu^{-1}}\right]\right\},$$

$$M_1 = \exp(K)\left\{K_1\left[\frac{1}{2\theta}\sum_{i,j=2} b_{ij}h_ih_j + \frac{1}{2\theta}\left(\sum_{i=2}^{n} d_ih_{i-1} + h_n\right)^2\right] + \right.$$

$$\left. + \left|\frac{1}{\theta}\left[-\sum_{i=2}^{n} h_i^2 - \left(\sum_{k=2}^{n} b_{nk}h_k + \sum_{i=2}^{n} d_ih_{i-1} + h_n\right)(\alpha+\beta)h_1\right]\right|\right\}. \tag{40}$$

Нехай задана величина $z_0 = \text{const} > 0$, що задовольняє умову

$$z_0 \ge V_0, \quad V_0 = \max_{x_0\in\Omega_0}\left\{\exp[\beta_1(t_0)]\,W_1(x_0)\right\}, \tag{41}$$

$$W_1(x_0) \equiv \frac{1}{\theta}V_1\left(x_2^0, \ldots, x_n^0\right) + \frac{1}{2\theta}Y_0^2, \quad V_1\left(x_2^0, \ldots, x_n^0\right) \equiv \frac{1}{2}\sum_{i,j=2}^{n} b_{ij}x_i^0x_j^0,$$

$$Y_0 \equiv \sum_{i=2}^{n} d_ix_{i-1}^0 + x_n^0.$$

Вважаємо, що існує обмежений розв'язок $\overline{z}(t) = \overline{z}(t, t_0, z_0)$ задачі Коші порівняння

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{(\mu+t)^2}[z + \sigma(t)], \quad t \in T, \tag{42}$$

$$z(t_0) = z_0 \ge V_0, \tag{43}$$

при заданих неперервній по $t \in T$ функції $\sigma(t)$, значенні V_0 форми (41) за умови (30) і виконанні нерівності

$$0 < z_0 \le b, \quad b = \text{const} > 0. \tag{44}$$

Теорема. *Нехай справджуються умови:*

1. *Для системи* (1) – (4), (12) *виконані умови існування розв'язку.*

2. *Характеристичне рівняння системи* (1) *при* $u = 0$ *має* $n-1$ *коренів з від'ємними дійсними частинами і один корінь дорівнює нулю.*

3. *Існує додатно означена функція* V *типу* (31), *власні значення якої* μ_i, $i = \overline{1, n}$, *при* (17) *справджують умову* (30).

4. *При будь-яких початкових станах* $x_0 \in \Omega_0$ *на розв'язках вихідного процесу* (1) – (4) *справедливі умови*:

а) *задана згідно з* (39), (40) *функція* $\Phi(t)$ *має зображення у вигляді суми двох невід'ємних, інтегровних по* $t \in T$ *функцій* $\Phi_1(t)$, $\Phi_2(t)$: $\Phi(t) = \Phi_1(t) + \Phi_2(t)$, *при яких одночасно*

$$\left|\overline{\Phi}_\alpha(t)\right| \le \Phi_1(t), \quad \left|\overline{\Phi}_\beta(t)\right| \le \Phi_2(t), \quad t \in T; \tag{45}$$

б) *в області* $T \subset I$ *існує інтеграл*

$$\sigma(t) = \int_{t_0}^{t} \Phi(\tau)\, d\tau, \qquad \Phi(\tau) \equiv \Phi_1(\tau) + \Phi_2(\tau). \tag{46}$$

5. *Розв'язок* $\overline{z}(t)$ *системи порівняння* (42) – (44) *за умов* (30), (41) *задовольняє нерівність*

$$\overline{z}(t) + \sigma(t) \le P(t), \quad t \in T. \tag{47}$$

6. *Множини* $C_{z_0} = \{x : V(t, x) \le z_0\}$, Ω_0 *задовольняють умову*

$$\Omega_0 = C_{z_0} \quad \text{при} \quad t = t_0. \tag{48}$$

Тоді мають місце наступні властивості: 1. *Динамічний процес* (1) – (4), (12) *є технічно стійким за мірою* ρ *на заданому проміжку часу* T. 2. *Процес* (1) – (4), (12) *є технічно стійким за мірою* ρ *на нескінченному інтервалі часу* I, *якщо умови* 1 – 6 *теореми виконуються на будь-якому часовому проміжку* $T \subseteq I$. 3. *Якщо додатково справедлива умова*

$$\overline{z}(t) + \sigma(t) \to 0, \quad t \to +\infty, \tag{49}$$

то процес (1) – (4), (12) *є асимптотично стійким за мірою* ρ.

Доведення. Використаємо повну похідну dV/dt для функції (31) внаслідок системи рівнянь (1). Тоді отримаємо

$$dV(t)/dt = (d\beta_1(t)/dt)V(t) + \exp[\beta_1(t)] \times$$
$$\times \frac{1}{\theta}\left[W(t) - \left\{\sum_{k=2}^{2} b_{nk} x_k(t) + Y(t)\right\} \psi x_1(t)\right]. \tag{50}$$

При всіх значеннях величин $M_{\alpha,\beta}(t) = \{M_\alpha(t), M_\beta(t)\}$ на розв'язках процесу (1) – (4), (12) маємо покомпонентно мажорантну нерівність [1, 4, 6, 7, 9]:

$$M_{\alpha,\beta}(t) - \frac{1}{2\theta(t+\mu)^2} V(t) \le M_{\alpha,\beta}(t) - \frac{c\mu}{2\theta(t+\mu)^2} \rho[x(t)].$$

Отже, враховуючи останні нерівності і відповідні умови теореми, із (50) знаходимо оцінку для похідної $dV(t)/dt$ вздовж розв'язків вихідного процесу (1) – – (4), (12)

$$\frac{dV(t)}{dt} \le \frac{1}{(\mu+t)^2} V(t) + \Phi(t), \quad t \in T. \tag{51}$$

Використовуючи (46), розглянемо функцію

$$\nu(t) = V(t) - \sigma(t). \tag{52}$$

Із оцінки для правої частини в (50) вздовж розв'язків задачі (1) – (4), (12) випливає нерівність

$$\frac{d\nu(t)}{dt} \le \frac{1}{(\mu+t)^2}[\nu(t)+\sigma(t)], \quad t \in T. \tag{53}$$

Із (53) випливає задача Коші порівняння (42), (43) за умов (30), (41), (44), (46), яка в області T має обмежений розв'язок. Такий розв'язок на основі інтегрування частинами має наступне зображення [15 – 18, 20, 21]

$$\begin{gathered}\bar{z}(t) = \exp\left[-\frac{1}{\mu+t}\right]\int_{t_0}^{t}\exp\left[\frac{1}{\mu+t}\right]\Phi(\tau)\,d\tau + \\ + z_0\exp\left[\frac{1}{\mu+t_0}\right]\exp\left[-\frac{1}{\mu+t}\right] - \sigma(t), \quad t \in T.\end{gathered} \tag{54}$$

Використовуючи (54), за відповідною теоремою [18, 20, 21] про диференціальні нерівності знаходимо

$$\nu(t) \le \bar{z}(t), \quad t \in T. \tag{55}$$

Звідси, враховуючи (52), маємо

$$V(t) \le \bar{z}(t) + \sigma(t), \quad t \in T. \tag{56}$$

Із (56), (44) отримуємо послідовність нерівностей

$$\begin{gathered}V(t) \le \exp\left[-\frac{1}{\mu+t}\right]\int_{t_0}^{t}\Phi(\tau)\exp\left[\frac{1}{\mu+\tau}\right]d\tau + \\ + z_0\exp\left[\frac{1}{\mu+t_0}\right]\exp\left[-\frac{1}{\mu+t}\right] \le \\ \le \exp\left[-\frac{1}{\mu+t}\right]\left\{\int_{t_0}^{t}\Phi(\tau)\exp\left[\frac{1}{\mu+\tau}\right]d\tau + b\exp\left[\frac{1}{\mu+t_0}\right]\right\} \le \\ \le \int_{t_0}^{t}\Phi(\tau)\exp\left[\frac{1}{\mu+\tau}\right]d\tau + b\exp\left[\frac{1}{\mu+t_0}\right], \quad t \in T.\end{gathered} \tag{57}$$

Отже, враховуючи, що $b \equiv P(t_0)$, маємо

$$V(t) \le P(t) \le \eta(t), \quad t \in T; \tag{58}$$

$$V_0 \le b, \quad t_0 \in T \tag{59}$$

вздовж розв'язків процесу (1) – (4), (12).

Із нерівностей (57) – (59) отримуємо наступну властивість:

$$C_{P(t)} \subset \Omega(t), \quad C_{P(t)} = \{x\colon V(t,x) \le P(t) \;\forall\, t \in T\}, \tag{60}$$

де функції $V(t,x)$, $P(t)$, $\eta(t)$ задані згідно з (31) та (39) відповідно. При цьому за умов (40) функція $P(t)$ задовольняє нерівність

$$\begin{gathered}0 < P(t) \le C, \quad C \equiv \exp\left[\frac{1}{\mu+t_0}\right]\exp\left[-\frac{1}{\mu+N\mu^{-1}}\right] \times \\ \times \left[M_1\left(\mu+N\mu^{-1}\right)^2 + b\right] - M_1\left(\mu+N\mu^{-1}\right)^2 > 0, \quad C \le \eta.\end{gathered} \tag{61}$$

Із співвідношення (60) і заданої в теоремі умови 6 остаточно випливає твердження 1 даної теореми. За умови $t \to +\infty$ справедлива нерівність $P(t) \leq \leq \eta(t)$, оскільки для функції $\eta(t)$ при $t \to +\infty$ маємо

$$\eta(t) \equiv \left\{ \exp\left[-\frac{1}{\mu+t}\right] \int_{t_0}^{t} \Phi(\tau) \exp\left[\frac{1}{\mu+\tau}\right] d\tau + \right.$$

$$\left. + \; b \exp\left[-\frac{1}{\mu+t}\right] \exp\left[\frac{1}{\mu+t_0}\right] \right\} \Big/ \exp\left[-\frac{1}{\mu+t}\right]. \tag{62}$$

Отже, на будь-якому часовому інтервалі $T \subseteq I$ отримуємо твердження 2 і за умови (49) твердження 3 теореми. В останньому випадку легко бачити, що за умови (49) функція $V(t)$ вигляду (31) задовольняє умову: $V(t) \to 0$ при $t \to \to +\infty$.

Вихідна система (1) – (4), (12) буде нестійкою в T або I за мірою ρ, коли в цих областях функція $P(t)$ задовольняє умову

$$P(t) \to +\infty, \quad t \in T \quad \text{або} \quad t \in I. \tag{63}$$

Зокрема, умова (63) має місце при t_0 і довільному значенні $t \geq 0$, якщо $\mu \to 0$, що, як випливає із умов (6) для значень параметра μ, буде відповідати різкому зростанню параметрів, що характеризують вихідну систему (1) – (4), (12).

3. Умови технічної стійкості системи автоматичного регулювання зі змінною структурою третього порядку. Дослідимо умови технічної стійкості процесу зі змінною структурою, що характеризується системою рівнянь

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = x_3, \quad \frac{dx_3}{dt} = -x_2 - x_3 - \psi x_1, \tag{64}$$

$$\psi = \begin{cases} \alpha & \text{при} \quad x_1 s > 0, \\ \beta & \text{при} \quad x_1 s < 0, \end{cases} \tag{65}$$

$$s = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3, \quad \alpha, \beta, c_i = \text{const}, \quad a_i = 1, \quad c_3 = 1, \tag{66}$$

при заданих початкових умовах

$$x_1(t_0) = x_1^0, \quad x_2(t_0) = x_2^0, \quad x_3(t_0) = x_3^0, \quad x_0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0) \in \Omega_0, \tag{67}$$

Ω_0 — означена нижче множина початкових станів процесу (64) – (67). Проміжок часу $T \subset I$, область D при $n = 3$ визначаються аналогічно загальному випадку. При $\psi x_1 = 0$ характеристичне рівняння для (64)

$$\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda = 0 \tag{68}$$

має корені

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_{2,3} = -\frac{1}{2} \pm \frac{i}{2}\sqrt{3}.$$

Розглянемо породжуючу систему вигляду

$$\frac{dx_2}{dt} = x_3, \quad \frac{dx_3}{dt} = -x_2 - x_3, \tag{69}$$

для якої виберемо функцію Ляпунова V_1 у вигляді [1, 2, 4]

$$V_1 = \frac{1}{2} b_{11} x_2^2 + b_{12} x_2 x_3 + \frac{1}{2} b_{22} x_3^2. \tag{70}$$

Похідна $dV_1(t)/dt$ функції (70) внаслідок (69) дорівнює

$$dV_1(t)/dt = -\, b_{12}x_2^2 + (b_{11} - b_{12} - b_{22})x_2x_3 + (b_{12} - b_{22})x_3^2 .$$

Коефіцієнти b_{ij} вибираємо наступними:

$$b_{11} = 3, \quad b_{12} = 1, \quad b_{22} = 2. \tag{71}$$

При значеннях (71) на підставі системи (69) маємо вираз

$$dV_1(t)/dt = W \equiv -\, x_2^2 - x_3^2 .$$

Задамо міру вигляду (7) для системи (64) – (67) $\tilde{\rho} = \tilde{\rho}\,(x) = \sum_{i=1}^{3} x_i^2$. Нехай задано область початкових збурень процесу (64) – (67):

$$\Omega_0 = \{x\colon \tilde{\rho} \le \gamma,\ 0 < \gamma \le b\}, \tag{72}$$

де $b = \text{const} > 0$ — відома величина, і область допустимих поточних станів $\Omega(t)$ системи (64) – (67):

$$\Omega(t) = \{x\colon \tilde{\rho} \le \tilde{\eta}\,(t),\ 0 < \tilde{\eta}\,(t) \le \tilde{\eta}\ \ \forall\, t \in T\} \tag{73}$$

при заданих числі γ і обмеженій в $T \subset I$ функції $\tilde{\eta}\,(t)$, припускаючи, що

$$\gamma \le \tilde{\eta}\,(t_0), \quad \Omega_0 \subset \Omega(t_0), \quad \tilde{\eta} = \text{const} > 0. \tag{74}$$

Для системи (64) – (67) в $T \times D$ спочатку виберемо функцію Ляпунова

$$\tilde{V}\,(t, x) = \exp\left[\sin^2(\exp(-t))\right]\left[V_1(x_2, x_3) + \frac{1}{2}Y^2\right], \quad Y = 2x_1 + x_2 + x_3. \tag{75}$$

Тут маємо $K = \exp\{\sin[\exp(-t_0)]\}$, $K_1 = \exp(-t_0)$. Виберемо функції

$$P(t) = \frac{M}{2}\exp\left[-\frac{1}{\mu + t}\right]\left\{\exp\left[\frac{2}{\mu + t_0}\right] - \exp\left[\frac{2}{\mu + t}\right]\right\} +$$

$$+\ b\exp\left[-\frac{1}{\mu + t}\right]\exp\left[\frac{1}{\mu + t_0}\right], \tag{76}$$

$$\tilde{\eta}\,(t) = \frac{M}{2}\left\{\exp\left[\frac{2}{\mu + t_0}\right] - \exp\left[\frac{2}{\mu + t}\right]\right\} + b\exp\left[\frac{1}{\mu + t_0}\right] \le \tilde{\eta},$$

де $M = \text{const} > 0$ — задана величина, зокрема, так:

$$M = \exp\left[\sin^2[\exp(-t_0)]\right]\frac{1}{\theta_1}\Big[\frac{5}{2}h_2^2 + 2h_1h_2 + 2h_2h_3 + h_3^2 +$$

$$+\ \frac{1}{2}(2h_1 + h_2 + h_3)^2 + (2h_1 + 2h_2 + 3h_3)\,(|\alpha - \beta|)\,h_1\Big]$$

при дотриманні умов (74), (76); $\theta_1 = \text{const} > 1$ — величина, що залежить від максимального власного значення квадратичної форми функції $\tilde{V}$ (75).

Із функції $\tilde{V}\,(t, x)$ виділимо квадратичну форму:

$$\overline{W_1}(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 + 4x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3 . \tag{77}$$

Розв'язавши відповідне формі $\overline{W_1}$ вікове рівняння

$$\begin{vmatrix} 4-\varepsilon & 2 & 2 \\ 2 & 4-\varepsilon & 2 \\ 2 & 2 & 3-\varepsilon \end{vmatrix} = 0, \tag{78}$$

отримаємо власні значення форми $\overline{W_1}$:

$$\varepsilon_1 = \frac{9-\sqrt{41}}{2}, \quad \varepsilon_2 = 2, \quad \varepsilon_3 = \frac{9+\sqrt{41}}{2}. \tag{79}$$

Для визначення головних напрямків $(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, x_3^{(i)})$, $i = 1, 2, 3$, форми (77) маємо рівняння вигляду (25)

$$\frac{4x_1^{(i)}+2x_2^{(i)}+2x_3^{(i)}}{x_1^{(i)}} = \frac{2x_1^{(i)}+4x_2^{(i)}+2x_3^{(i)}}{x_2^{(i)}} = \frac{2x_1^{(i)}+2x_2^{(i)}+3x_3^{(i)}}{x_3^{(i)}}, \quad i = 1, 2, 3. \tag{80}$$

Головні осі форми $\overline{W}_1$ задаються параметричними рівняннями [23]

$$\begin{gathered} x_1 = -\frac{\sqrt{41}-3}{8}\tau_1, \quad x_2 = -\frac{\sqrt{41}-3}{8}\tau_1, \quad x_3 = \tau_1 \quad \text{при } i = 1; \\ x_1 = \tau_1, \quad x_2 = -\tau_1, \quad x_3 = 0 \quad \text{при } i = 2; \\ x_1 = \frac{\sqrt{41}+3}{8}\tau_1, \quad x_2 = \frac{\sqrt{41}+3}{8}\tau_1, \quad x_3 = \tau_1 \quad \text{при } i = 3, \end{gathered} \tag{81}$$

де τ_1 — змінний параметр, $-\infty < \tau_1 < +\infty$.

Перетворення, що визначає три взаємно ортогональних напрямки простору R_x^3 вздовж головних осей (81) форми $\overline{W}_1$ (77), має вигляд

$$x = Qy, \quad x = (x_1, x_2, x_3)^*, \quad y = (y_1, y_2, y_3)^*, \tag{82}$$

$$Q = \begin{pmatrix} -\dfrac{\sqrt{41}-3}{2\sqrt{41-3\sqrt{41}}}, & \dfrac{\sqrt{2}}{2}, & \dfrac{3+\sqrt{41}}{2\sqrt{41+3\sqrt{41}}} \\ -\dfrac{\sqrt{41}-3}{2\sqrt{41-3\sqrt{41}}}, & -\dfrac{\sqrt{2}}{2}, & \dfrac{3+\sqrt{41}}{2\sqrt{41+3\sqrt{41}}} \\ \dfrac{4}{\sqrt{41-3\sqrt{41}}}, & 0, & \dfrac{4}{\sqrt{41+3\sqrt{41}}} \end{pmatrix}, \quad \|Q\| = 1.$$

Перетворення (82) задовольняє умови вигляду (20). Обернене до (83) перетворення визначається так:

$$y = Q^* x. \tag{83}$$

У просторі R_y^3 отримаємо нормальний вигляд форми $\overline{W}_1$ (77):

$$\overline{W}_1(x_1, x_2, x_3) = \overline{W}_1(y_1, y_2, y_3) = \frac{9-\sqrt{41}}{2}y_1^2 + 2y_2^2 + \frac{9+\sqrt{41}}{2}y_3^2. \tag{84}$$

Із інваріантних властивостей перетворення (82) і (83), використовуючи (84), зображення $\tilde{V}$ (75) в системі координат (y_1, y_2, y_3)

$$\tilde{V}(y_1, y_2, y_3) = \exp\left[\sin^2(\exp(-t))\right]\left[\frac{9-\sqrt{41}}{4}y_1^2 + y_2^2 + \frac{9+\sqrt{41}}{4}y_3^2\right] \tag{85}$$

і властивість

$$\tilde{V}(y_1, y_2, y_3) \equiv \tilde{V}(x_1, x_2, x_3) \le \frac{9+\sqrt{41}}{4}K \quad \forall x \in \overline{\Omega}_0 = \{x : \tilde{\rho}(x) \le 1\},$$

$$K = \max_t \left\{\exp\left[\sin^2(\exp(-t))\right]\right\} \equiv \exp\left[\sin^2(\exp(-t_0))\right] > 1, \tag{86}$$

знаходимо, що у випадку функції $\tilde{V}$ (75) як задане початкове значення $x_0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0)$ із області Ω_0 можна вибрати будь-яку точку із підобласті

$$\Omega_{01} \subset \Omega_0, \quad \Omega_{01} = \left\{ x : \tilde{\rho}(x) \le \left(\frac{r_1}{\sqrt{\theta_1}}\right)^2 < r_1^2, \ r_1^2 \equiv \gamma \right\}; \tag{87}$$

при цьому маємо $\theta_1 = K\dfrac{9+\sqrt{41}}{4} > 1$, $r_1 > 0$ — радіус сфери області Ω_0 (72). Наприклад, однією з максимально допустимих таких точок x_0, що лежать на границі множини Ω_{01}, є точка $x_0 = (\bar{x}_1^0, \bar{x}_2^0, \bar{x}_3^0)$:

$$\bar{x}_1^0 = \frac{3+\sqrt{41}}{2\sqrt{41+3\sqrt{41}}} \frac{r_1}{\sqrt{K\dfrac{(9+\sqrt{41})}{4}}}, \quad \bar{x}_2^0 = \frac{3+\sqrt{41}}{2\sqrt{41+3\sqrt{41}}} \frac{r_1}{\sqrt{K\dfrac{(9+\sqrt{41})}{4}}},$$
$$\bar{x}_3^0 = \frac{4}{\sqrt{41+3\sqrt{41}}} \frac{r_1}{\sqrt{K\dfrac{(9+\sqrt{41})}{4}}}, \tag{88}$$

яка згідно з (82), (83) у просторі R_y^3 відповідає граничній точці

$$\bar{y}^0 = \left(0, 0, 2r_1 / \left(K(9+\sqrt{41})\right)^{1/2}\right) \in \Omega_{01}.$$

Гранична точка (88) області Ω_{01} задовольняє нерівність

$$\tilde{V}(t, \bar{x}_1^0, \bar{x}_2^0, \bar{x}_3^0) \le r_1^2 \equiv \gamma, \qquad \gamma > 0, \quad t \ge t_0, \tag{89}$$

зокрема, при $\gamma = 2$, або $\gamma = 1$, або $\gamma = 1/2$, тобто при $r_1 = \sqrt{2}$, $r_1 = 1$, $r_1 = 1/\sqrt{2}$ відповідно. Нерівність (89) справедлива для довільної точки $x_0 \in \Omega_{01} \subset \Omega_0$ згідно з (82), (83).

Замість функції $\tilde{V}$ (75) використаємо функцію

$$V(t, x_1, x_2, x_3) = \exp\left[\sin^2(\exp(-t))\right]\left[(1/\theta_1) V_1(x_2, x_3) + (1/2\theta_1) Y^2\right] \equiv$$
$$\equiv \exp\left[\sin^2(\exp(-t))\right]\left[(2/\theta_1)x_1^2 + (2/\theta_1)x_2^2 + (3/2\theta_1)x_3^2 + \right.$$
$$\left. + (2/\theta_1)x_1x_2 + (2/\theta_1)x_1x_3 + (2/\theta_1)x_2x_3\right]. \tag{90}$$

Найбільше власне значення $\mu_3 = \varepsilon_3/2\theta_1$ квадратичної форми функції $V(t, x)$ (90) задовольняє умови

$$\mu_3 < 1/K < 1, \quad 0 < \mu_3 \exp\left[\sin^2(\exp(-t))\right] \le 1 \quad \forall t \in I. \tag{91}$$

Для функції V (90) нерівність типу (89) справджується для всіх точок із області Ω_0 (72). Подібно до загального випадку для функції V (90) маємо

$$\frac{dV(t, x_1, x_2, x_3)}{dt} = -\exp(-t)\sin[2\exp(-t)]V(t, x_1, x_2, x_3) + \theta_1^{-1} \times$$
$$\times \exp\left[\sin^2(\exp(-t))\right]\left[-x_2^2 + x_2(2x_1 + x_3) - 3\left(\frac{2}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 + x_3\right)\psi x_1\right]. \tag{92}$$

Для правої частини виразу (92) не шукаємо умов обов'язкової від'ємної означеності (або недодатності). Коефіцієнтами c_i, $i = 1, 2, 3$, згідно з (92) можемо вибрати: $c_1 = 2/3$, $c_2 = 2/3$, $c_3 = 1$ або $c_1 = 2$, $c_2 = 2$, $c_3 = 3$. Для таких значень c_i маємо

$$(c_1 - a_2)/c_2 \neq c_2 - a_2, \quad a_2 = a_3 = 1. \tag{93}$$

Це означає порушення однієї із умов існування ковзного режиму [2,3], площина $s = 0$ з коефіцієнтами c_i (93) не буде площиною ковзання.

Утворимо функції $\overline{\Phi}_\alpha(t)$, $\overline{\Phi}_\beta(t)$ на розв'язках системи (64) – (67) подібно до загального випадку (45). Повторюючи аргументацію п. 2, знаходимо умови технічної стійкості системи (64) – (67) аналогічно системі (1) – (4), (12). При цьому покладаємо

$$\Phi(t) = \Phi_1(t) + \Phi_2(t) \equiv \frac{M}{(\mu+t)^2}\exp\left[\frac{1}{\mu+t}\right], \tag{94}$$

де M — задана вище додатна постійна величина. Крім цього, функція $\Phi(t)$ (94) задовольняє умову: $\Phi(t) \to 0$ при $t \to +\infty$. Проводячи перетворення, аналогічні п. 2, використовуючи при цьому функції із (94), (90), (76) і відповідну задачу Коші порівняння вигляду (42) – (44) за умови (91), знаходимо послідовність нерівностей вздовж розв'язків задачі (64) – (67)

$$V(t, x(t)) \leq \frac{M}{2}\exp\left[-\frac{1}{\mu+t}\right]\left\{\exp\left[\frac{2}{\mu+t_0}\right] - \exp\left[\frac{2}{\mu+t}\right]\right\} +$$

$$+ z_0\exp\left[\frac{1}{\mu+t_0}\right]\exp\left[-\frac{1}{\mu+t}\right] \leq P(t) \leq \tilde{\eta}(t), \tag{95}$$

де при $t \in T$ маємо

$$P(t) \leq \frac{M}{2}\exp\left[-\frac{1}{\mu+N\mu^{-1}}\right]\left\{\exp\left[\frac{2}{\mu+t_0}\right] - \exp\left[\frac{2}{\mu+N\mu^{-1}}\right]\right\} +$$

$$+ b\exp\left[-\frac{1}{\mu+N\mu^{-1}}\right]\exp\left[\frac{1}{\mu+t_0}\right], \tag{96}$$

$$\tilde{\eta}(t) \leq \frac{M}{2}\left\{\exp\left[\frac{2}{\mu+t_0}\right] - 1\right\} + b\exp\left[\frac{1}{\mu+t_0}\right] < \tilde{\eta}. \tag{97}$$

Отже, із (95) і умов (43), (44) при $n = 3$, заданих для (90) згідно з задачею (64) – (67) при всіх x_0 із Ω_0 (72), знаходимо, що для будь-яких $x_0 \in \Omega_0$ процес (64) – (67) технічно стійкий на скінченному інтервалі часу T за мірою $\tilde{\rho}$. Крім цього, оцінка

$$P(t) \leq C, \quad C \equiv \frac{M}{2}\left\{\exp\left[\frac{2}{\mu+t_0}\right] - 1\right\} + b\exp\left[\frac{1}{\mu+t_0}\right] \tag{98}$$

справедлива при будь-яких $t \subseteq I$, всіх $x_0 \in \Omega_0$, що випливає із (95) при $t \to \to +\infty$. Таким чином, процес (64) – (67) при будь-якому $x_0 \in \Omega_0$ є технічно стійким на нескінченному інтервалі часу I за мірою $\tilde{\rho}$. Проте при виборі мажоранти $\Phi(t)$ у вигляді (94) умова асимптотичної технічної стійкості вихідного процесу не має місця. Умова нестійкості процесу (64) – (67) за мірою $\tilde{\rho}$ аналогічна умові (63) п. 2.

Зауважимо, що функція $dV(t)/dt$ вздовж розв'язків вихідної системи (64) – (67) буде від'ємно означеною, якщо ψ змінюється у відповідності з (65), виконані умови $\alpha > 0$, $\beta < 0$, сума виразу $(-x_2^2 + x_2(2x_1 + x_3))$ і першого доданка в (92) є недодатною. Це означає, що в цьому випадку процес (64) – (67) буде стійкий за Ляпуновим. Отже, отримані умови технічної стійкості для процесу (64) – (67) в області I включають умови технічної стійкості в сенсі Ляпунова для даного процесу.

1. *Барбашин Е. А.* Введение в теорию устойчивости. – М.: Наука, 1967. – 223 с.
2. *Емельянов С. В., Уткин В. И., Таран В. А., Костилева Н. Е., Шубладзе А. И., Езеров В. Б., Дубровский Е. Н.* Теория систем с переменной структурой. – М.: Наука, 1970. – 592 с.
3. *Уткин В. И.* Скользящие режимы в задачах оптимизации и управления. – М.: Наука, 1989. – 367 с.
4. *Лозгачев Г. И.* О построении функций Ляпунова для систем с переменной структурой // Автоматика и телемеханика. – 1972. – № 8. – С. 161 – 162.
5. *Зубов В. И.* Лекции по теории управления. – М.: Наука, 1975. – 496 с.
6. *Ащепков Л. Т.* Оптимальное управление разрывными системами. – Новосибирск: Наука, 1987. – 226 с.
7. *Мещанов А. С.* Применение метода функций Ляпунова в построении разрывных управлений // Метод функций Ляпунова в динамике нелинейных систем. – Новосибирск: Наука, 1983. – С. 102 – 110.
8. *Филиппов А. Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. – М.: Наука, 1985. – 224 с.
9. *Хапаев М. М.* Условия управляемости сингулярно возмущенных систем, содержащих сингулярные управления // Докл. АН СССР. – 1991. – **320**, № 2. – С. 300 – 302.
10. *Каменков Г. И.* Об устойчивости на конечном интервале времени // Прикл. математика и механика. – 1953. – **17**, вып. 5. – С. 529 – 540.
11. *Кириченко Н. Ф.* Некоторые задачи устойчивости и управляемости движения. – Киев: Изд-во Киев. ун-та, 1972. – 212 с.
12. *Гаращенко Ф. Г., Кириченко Н. Ф.* Исследование задач по практической устойчивости и стабилизации движения // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1975. – № 6. – С. 15 – 24.
13. *Гаращенко Ф. Г.* О некоторых задачах динамической устойчивости и их приложениях // Вычислит. и прикл. математика. – 1982. – Вып. 46. – С. 106 – 112.
14. *Кунцевич В. М., Лычак М. М.* Синтез систем автоматического управления с помощью функций Ляпунова. – М.: Наука, 1977. – 400 с.
15. *Матвийчук К. С.* О технической устойчивости управляемых процессов с сосредоточенными параметрами // Прикл. механика. – 1997. – **33**, № 2. – С. 74 – 79.
16. *Матвийчук К. С.* Техническая устойчивость процесса движения двух связанных платформ, несущих перемещающиеся маховики // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1993. – № 6. – С. 3 – 10.
17. *Матвийчук К. С.* Техническая устойчивость параметрически возбуждаемых распределенных процессов // Прикл. математика и механика. – 1986. – **50**, вып. 2. – С. 210 – 218.
18. *Матросов В. М., Анапольский Л. Ю., Васильев С. Н.* Метод сравнения в математической теории систем. – Новосибирск: Наука, 1980. – 481 с.
19. *Васильев С. Н.* К управляемости нелинейных систем при фазовых ограничениях и постоянно действующих возмущениях // Изв. РАН. Техн. кибернетика. – 1993. – № 1. – С. 77 – 82.
20. *Бабкин Б. И.* К теореме С. А. Чаплыгина о дифференциальных неравенствах // Мат. сб. – 1958. – **46**, № 4. – С. 389 – 398.
21. *Szarski J.* Differential inequalities. – Warszawa: PWN, 1967. – 256 p.
22. *Skalmierski B., Tylikowski A.* Stabilnosc uklalow dynamicznych. – Warszawa: PWN, 1973. – 176 p.
23. *Лаврентьев М. А., Люстерник Л. А.* Основы вариационного исчисления. – М.;Л.: ОНТИ, 1935. – Т. 1. – Ч. 1. – 148 с.

Одержано 27.02.98,
після доопрацювання — 11.03.99