УДК 512.544

М. Ф. Кузенний (Ін-т математики НАН України, Київ),
С. В. Мазніченко (Нац. пед. ун-т, Київ)

БУДОВА ДЕЯКИХ КЛАСІВ ГРУП З ЛОКАЛЬНО ЦИКЛІЧНИМИ АБЕЛЕВИМИ ПІДГРУПАМИ

Groups with locally cyclic Abelian subgroups are investigated. Locally solvable groups of the following types are constructively described: such that possess non-identity periodic part and whose all Abelian subgroups are cyclic.

Досліджуються групи з локально циклічними абелевими підгрупами. Конструктивно описано локально розв'язні групи такого роду, що мають неодиничну періодичну частину, а також локально розв'язні групи, у яких всі абелеві підгрупи циклічні.

В роботах [1, 2] описані скінченні неабелеві групи, в яких усі власні підгрупи абелеві (групи Міллера – Морено). Частинний випадок таких груп — скінченні нециклічні групи, у яких всі підгрупи циклічні. Будова таких груп досить проста (див. [3]). В роботах [4, 5] описані скінченні p-групи, у яких циклічними є всі абелеві підгрупи. Групи, описані в [4, 5], є скінченними p-групами і мають тільки одну підгрупу порядку p. В [4] започатковано дослідження скінченних p-груп, у яких кожна абелева підгрупа є метациклічною групою, тобто групою, що є розширенням циклічної групи за допомогою циклічної групи. Опис таких скінченних p-груп подано в [6]. Опис нескінченних локально скінченних p-груп з циклічними абелевими підгрупами можна одержати з роботи [7].

Природним узагальненням згаданих груп є групи, у яких всі абелеві підгрупи метациклічні чи, в частинному випадку, циклічні. Приклади груп, наведені в роботах [8, 9], показують, що повний опис довільних груп з локально циклічними чи навіть з циклічними абелевими підгрупами потребує додаткових обмежень. У цій роботі конструктивно описуються локально надрозв'язні групи, у яких всі абелеві підгрупи локально циклічні (теорема 1). Локально розв'язні групи з локально циклічними абелевими підгрупами, що мають неодиничну періодичну частину, описані в теоремах 1, 2. Всі локально розв'язні групи, у яких абелеві підгрупи циклічні, описані в теоремі 3.

Означення 1. *Групу G будемо називати $LC(A)$-групою, якщо в ній локально циклічні всі абелеві підгрупи. В частинному випадку G будемо називати $C(A)$-групою, якщо в ній циклічні всі абелеві підгрупи.*

Твердження 1 ([5], теорема 12.5.2). *Скінченні p-групи, що містять тільки одну підгрупу порядку p, тобто скінченні $LC(A)$-p-групи вичерпуються групами типів*:

1) G — *неодинична циклічна p-група;*

2) $G=\langle a\rangle\langle b\rangle,\ |a|=2^{\alpha},\ |b|=4,\ \alpha>1,\ |\langle a\rangle\cap\langle b\rangle|=2,\ b^{-1}ab=a^{-1}$.

І з твердження 1 легко отримати наступний результат.

Твердження 2. *Локально скінченні p-групи з однією циклічною підгрупою порядку p, тобто $LC(A)$-p-групи вичерпуються групами типів*:

1) G — *неодинична циклічна p-група;*

2) $G=\langle a\rangle\langle b\rangle,\ |a|=2^{\alpha},\ |b|=4,\ \alpha>1,\ |\langle a\rangle\cap\langle b\rangle|=2,\ b^{-1}ab=a^{-1}$;

3) G — *квазіциклічна p-група;*

4) $G=A\langle b\rangle$, A — *квазіциклічна 2-група,* $|b|=4$, $A\cap\langle b\rangle=\langle b^2\rangle$, *для будь-якого* $a\in A$ *вірно* $b^{-1}ab=a^{-1}$.

Лема 1. *Клас $LC(A)$-груп ($C(A)$-груп) замкнений за підгрупами і незамкнений за фактор-групами та прямими добутками. Прямі добутки періодичних $LC(A)$-груп, що не мають елементів однакових простих порядків, є $LC(A)$-*

групами. Скінченні прямі добутки періодичних $C(A)$-груп, що не мають елементів однакових простих порядків, є $C(A)$-групами. Прямий добуток двох неодиничних $LC(A)$-груп ($C(A)$-груп), хоча б одна з яких неперіодична, не може бути $LC(A)$-групою ($C(A)$-групою). $C(A)$-групи є $LC(A)$-групами, а скінченні $LC(A)$-групи є $C(A)$-групами. Локально скінченні $LC(A)$-групи вичерпуються такими локально скінченними групами G, у яких кожна силовська p-підгрупа P може бути групою лише одного з типів:

1) *P — локально циклічна група;*

2) *$P = C\langle d\rangle$, C — локально циклічна 2-група, $|C| > 2$, $|d| = 4$, $d^2 \in C$, для будь-якого $c \in C$ справедливо $d^{-1}cd = c^{-1}$.*

Доведення. Нехай G — $LC(A)$-група ($C(A)$-група) і H — довільна підгрупа із G, A — абелева підгрупа із H. Тоді A — абелева підгрупа із G і за означенням A буде відповідно локально циклічною чи циклічною групою. Отже, класи $LC(A)$- і $C(A)$-груп замкнені за підгрупами.

Відомо, що скінченні локально циклічні групи є циклічними групами. Звідси скінченні $LC(A)$-групи є $C(A)$-групами. Нехай G_1, G_2 — групи кватерніонів порядку 8. Тоді за твердженням 1 G_1 і G_2 — $LC(A)$-групи і навіть $C(A)$-групи. Відомо, що $G_1/\Phi(G_1)$ — не локально циклічна група типу (2, 2). З цього випливає, що класи $LC(A)$- та $C(A)$-груп не замкнені за фактор-групами.

Покладемо $G = G_1 \times G_2$. Тоді $G \geq \Phi(G) = \Phi(G_1) \times \Phi(G_2)$ — не локально циклічна група типу (2, 2). Отже класи $LC(A)$-груп та $C(A)$-груп не замкнені й за прямими добутками.

Нехай G_i — періодична $LC(A)$- чи $C(A)$-група для деякої множини індексів $i \in I$, де при $i \neq j$ $\pi(G_i) \cap \pi(G_j) = \varnothing$. Нехай G — прямий добуток G_i по всіх $i \in I$. Зрозуміло, що G_i — холлівська підгрупа періодичної групи G. Нехай A — абелева підгрупа із G. Тоді A — прямий добуток A_i для всіх $i \in I$, де $A_i = A \cap G_i$ — холлівська підгрупа із A. Оскільки G_i — $LC(A)$- чи $C(A)$-група, то A_i — локально циклічна чи циклічна група відповідно і A — локально циклічна група. Якщо G_i — $C(A)$-група, $|I| < \infty$, то A — циклічна група і G — $C(A)$-група.

Нехай нарешті $G = G_1 \times G_2$, G_1 — $LC(A)$- чи $C(A)$-група, G_1 неперіодична, $G_2 \neq 1$. Тоді G містить абелеву не локальну циклічну підгрупу $\langle z\rangle \times \langle a\rangle$, де $\langle z\rangle \leq G_1$, $|z| = \infty$, $\langle a\rangle \leq G_2$, $a \neq 1$. З цього випливає, що G не може бути ні $LC(A)$- ні $C(A)$-групою.

Нехай G — локально скінченна $LC(A)$-група, P — її силовська p-підгрупа. Тоді вона задовольняє умову твердження 2 і може бути лише групою одного з типів $1-4$ згаданого твердження.

Якщо P — група типу 1 чи 3 згаданого твердження, то P — група типу 1 розглядуваної леми.

Якщо P — група типу 2 чи 4 твердження 2, то P — група типу 2 розглядуваної леми.

Нехай тепер G — періодична група, у якої кожна силовська p-підгрупа P є групою одного з типів 1 або 2 даної леми, і A — її абелева підгрупа. Тоді A є прямим добутком своїх силовських p_i-підгруп P_i. Звідси P_i належить деякій силовській p_i-підгрупі P одного з типів 1 або 2 розглядуваної леми.

Якщо P — група типу 1 леми, то P_i — локально циклічна група.

Нехай P — група типу 2 леми. Тоді P — скінченна чи нескінченна група кватерніонів, кожна абелева підгрупа якої є локально циклічною групою. Отже, завжди P_i — локально циклічна група, тоді і A — локально циклічна група, а значить, G — $LC(A)$-група. Лему доведено.

Твердження 3 [10, с. 399]. *Комутант локально надрозв'язної групи G є локально нільпотентною групою.*

Лема 2 [11]. *Локально скінченні групи G з локально циклічними силовськими підгрупами є $LC(A)$-групами та вичерпуються групами типу $G = A \leftthreetimes B$, де A і B — періодичні локально циклічні холлівські підгрупи із G.*

***Наслідок* 1.** *Локально скінченна група G з локально циклічними силовськими підгрупами є локально надрозв'язною групою.*

Доведення. Нехай G задовольняє умову наслідку. Тоді будь-яка її скінченнопороджена підгрупа H є скінченною групою з циклічними силовськими підгрупами. Тоді за теоремою 9.4.3 із [5] H — метациклічна, а значить, і надрозв'язна група. Звідси G —локально надрозв'язна група. Наслідок доведено.

Лема 3. *Локально нільпотентні $LC(A)$-групи G вичерпуються групами типів:*

1) *G — локально циклічна група;*

2) *$G = D \times C$, де C — періодична холлівська локально циклічна підгрупа із G, D — силовська 2-підгрупа із G, що є групою одного з типів 2 чи 4 твердження 2.*

Доведення. *Необхідність.* Нехай G — досліджувана група. Якщо G — локально циклічна, то вона типу 1 даної леми.

Припустимо, що G — не локально циклічна. Покажемо, що G — періодична група. Нехай це не так. За відомими результатами [10, с. 400] всі елементи скінченного порядку із G породжують періодичну підгрупу $T(G)$ групи G і $T(G)$ — прямий добуток своїх силовських p_i-підгруп P_i, p_i — просте число. За лемою 1 та умовою розглядуваної леми P_i задовольняє умову твердження 2 і може бути лише групою одного з типів $1-4$ цього твердження.

Припустимо, що $P_i \neq 1$. Тоді за властивостями групи P_i кожного з типів $1-4$ твердження 2 одержимо, що P_i містить скінченну характеристичну підгрупу $N_i \neq 1$. Оскільки $T(G) \lhd G$, P_i — характеристична підгрупа з $T(G)$, то $P_i \lhd G$. Аналогічно $N_i \lhd G$ і в G існує підгрупа $G_1 = N_i \leftthreetimes \langle z \rangle$, $|z| = \infty$.

Відомо, що $Z_{G_1}(N_i) \lhd G_1$, фактор-група $G_1 / Z_{G_1}(N_i)$ ізоморфна підгрупі з $\mathrm{Aut}(N_i)$ і $|\mathrm{Aut}(N_i)| < \infty$. Звідси $|G_1 : Z_{G_1}(N_i)| < \infty$, а значить, $\langle z \rangle$ містить такий елемент z_1, що $|z_1| = \infty$, $[N_i, \langle z_1 \rangle] = 1$. Оскільки $N_i \neq 1$, то в G існує не локально циклічна абелева підгрупа $\langle a \rangle \times \langle z_1 \rangle$, де $a \in N_i$, $|a| = p_i$. Останнє суперечить означенню $LC(A)$-групи. З цієї суперечності випливає, що при неперіодичності G $T(G) = 1$ і, значить, G — локально нільпотентна група без скруту.

Зрозуміло, що з не локальної циклічності G та означення $LC(A)$-груп випливає неабелевість групи G. Отже, G містить скінченнопороджену, а значить, нільпотентну підгрупу без скруту H, в якої $H' \leq Z(H)$, $H' \neq 1$. З цього випливає існування в H неабелевої підгрупи $U = \langle a, b \rangle$, для якої $[a, b] = c \in Z(U)$, $|c| = \infty$. Зрозуміло, що $U' = \langle c \rangle$ і $U = (\langle c \rangle \langle a \rangle) \langle b \rangle$, $[c, a] = [c, b] = 1$, $|a| = |b| = \infty$.

Припустимо, що $\langle c \rangle \cap \langle a \rangle = \langle a^n \rangle$. Тоді за відомими комутаторними тотожностями [10, с. 87] $[a, b]^n = [a^n, b] = 1 = c^n$, що неможливо. Отже, $\langle c \rangle \cap \langle a \rangle = 1$ і в G існує не локально циклічна абелева підгрупа $\langle c \rangle \times \langle a \rangle$, що суперечить означенню $LC(A)$-груп. З одержаної суперечності випливає періодичність не локально циклічної групи G, отже, $G = T(G)$. Звідси $G = D \times C$, де D —

силовська 2-підгрупа із G, C — прямий добуток P_i для всіх $p_i > 2$. Очевидно, що при $p_i > 2$ підгрупа P_i може бути лише групою типу 1 чи 3 твердження 2 і буде локально циклічною групою. Тому для не локальної циклічності G необхідно, щоб D не була локально циклічною групою. Звідси D — група типу 2 чи 4 твердження 2 і G — група типу 2 розглядуваної леми. Необхідність доведено.

Достатність. Нехай G — група одного з типів 1 чи 2 розглядуваної леми. Зрозуміло, що G — локально нільпотентна група. Як відомо, в групі G типу 1 розглядуваної леми всі абелеві підгрупи локально циклічні, тобто G — $LC(A)$-група.

Нехай G — група типу 2 розглядуваної леми, A — її абелева підгрупа. Тоді $A = D_1 \times C_1$, де $D_1 = D \cap A$ — абелева група, $C_1 = C \cap A$ — холлівська підгрупа із A і C_1 — локально циклічна група. Легко бачити, що абелеві підгрупи групи D кожного з типів 2 чи 4 твердження 2 є циклічними групами. Звідси A — прямий добуток своїх локально циклічних силовських підгруп. За лемою 1 G — $LC(A)$-група. Достатність доведено. Лему доведено.

Наслідок 2. *Нехай G — локально надрозв'язна $LC(A)$-група. Тоді G' — локально циклічна група. Якщо G' — неодинична періодична група, то періодичною буде і сама група G.*

Доведення. Нехай G — досліджувана група. Тоді за твердженням 3 G' — локально нільпотентна група, яка за лемою 1 задовольняє умову леми 3 і може бути лише групою типу 1 чи 2 цієї леми. Якщо G' — неперіодична група, то вона може бути лише групою типу 1 згаданої леми і, значить, G' — локально циклічна група без скруту. У цьому випадку наслідок доведено.

Нехай G' — періодична група. Тоді група G' кожного з типів 1 та 2 леми 3 має вигляд $G' = D \times C$, де D — силовська 2-підгрупа із G', яка може бути групою одного з типів $1-4$ твердження 2, а C — періодична холлівська локально циклічна група із G'. Зрозуміло, що при $G' = 1$ твердження наслідку очевидне.

Нехай $G' \neq 1$. Покажемо, що G — періодична група. Дійсно, нехай це не так. Тоді в G' існує неодинична нормальна в G силовська p_i-підгрупа P_i, p_i — просте число із $\pi(G')$. Зрозуміло, що P_i — група одного з типів $1-4$ твердження 2. Група P_i кожного із згаданих типів має скінченну характеристичну підгрупу M_i і тому M_i — нормальна в G. Як відомо, $Z_G(M_i)$ містить елемент z_1, $|z_1| = \infty$ і, значить, G містить абелеву не локально циклічну підгрупу $\langle a \rangle \times \langle z_1 \rangle$, де $a \in M_i$, $a \neq 1$, що неможливо. З цієї суперечності випливає, що G — періодична група. Якщо тепер D — локально циклічна група, то і G' — локально циклічна група.

Припустимо, що D не є локально циклічною. Тоді D може бути лише групою одного з типів 2 чи 4 твердження 2 і, значить, D містить підгрупу кватерніонів Q. Оскільки G — періодична локально надрозв'язна група, то вона є локально скінченною групою. Звідси G має скінченну, а значить, надрозв'язну підгрупу H, для якої $H' \geq Q$. За відомими властивостями скінченних надрозв'язних груп маємо розклад $H = A \leftthreetimes B$, де B — силовська 2-підгрупа із H.

Як відомо [10], $H' = A'B'[A, B] = K \leftthreetimes B'$, де $[A, B]$ — характеристична підгрупа із H, що належить A, і $K = A'[A, B]$, B' — силовська 2-підгрупа із H'. Зрозуміло, що D — група типу 2 леми 1 і $Q \leq D'$ — локально циклічна група, що неможливо. Одержана суперечність показує, що G' завжди є локально циклічною групою. Наслідок повністю доведено.

Теорема 1. *Локально надрозв'язні $LC(A)$-групи G вичерпуються групами типів*:

1) G — *група, ізоморфна підгрупі адитивної групи раціональних чисел;*

2) $G = A \leftthreetimes B$ — *періодична група, у якої A та B — холлівські локально циклічні підгрупи;*

3) $G = A \leftthreetimes (B \times D)$ — *періодична група, A і B — холлівські локально циклічні підгрупи із G, $D = C\langle b\rangle$, C — локально циклічна 2-група, $|C| > 2$, $|b| = 4$, $|C \cap \langle b\rangle| = 2$. Для будь-якого $c \in C$ справедливо $b^{-1}cb = c^{-1}$, $[A, D'] = 1$;*

4) $G = A \leftthreetimes \langle b\rangle$, *$A$ ізоморфна неодиничній підгрупі адитивної групи раціональних чисел, $|b| = 2$. Для будь-якого $a \in A$ справедливо $b^{-1}ab = a^{-1}$.*

Доведення. *Необхідність*. Нехай G — досліджувана група. Якщо G — абелева група, то за означенням 1 G — локально циклічна група, а значить, G — група типу 2 чи 1 відповідно розглядуваної теореми.

Нехай $G' \neq 1$. За наслідком 2 G' — неодинична локально циклічна група. Тоді можливі такі випадки:

1) G' — періодична група;

2) G' — група без скруту.

Випадок 1. За наслідком 2 G — періодична група. Якщо всі силовські підгрупи із G є локально циклічними, то G задовольняє умови леми 2, за твердженням якої G — група типу 2 розглядуваної теореми.

Нехай далі G має не локально циклічну силовську підгрупу. За лемою 1 не локально циклічною силовською підгрупою в G може бути тільки її силовська 2-підгрупа D типу 2 згаданої леми.

За наслідком 2 $G' = A \times R$ — періодична локально циклічна група з неодиничною силовською 2-підгрупою R, A — її холлівське доповнення в G'. Звідси $A \lhd G$, $R \lhd G$, і всі силовські підгрупи з G/R абелеві. Відомо, що всі примарні елементи непарного порядку складають в G характеристичну холлівську підгрупу U, $A \leq U$, і G/U — неабелева 2-група.

Припустимо, що G/U — неізоморфна групі типу 2 леми 1. Тоді G/U містить підгрупу X/U типу $(2, 2)$. Оскільки U — нормальна холлівська підгрупа без інволюцій як в G, так і в X, і $|X : U| = 4$, то $X = U \leftthreetimes H$, де H — силовська 2-підгрупа з X, ізоморфна X/U. Звідси H — підгрупа типу $(2, 2)$ з G.

За лемою 1 H належить силовській 2-підгрупі з G одного з типів 1 чи 2 згаданої леми, що неможливо. Отже, G/U — група типу 2 леми 1 і, значить, G/U — зліченна група.

За лемою 1 всі силовські підгрупи з U є локально циклічними групами і лемою 2 $U = A_1 \leftthreetimes B_1$ — зліченна група, у якої A_1 та B_1 — локально циклічні холлівські підгрупи з G, $U' = A_1 \leq A$. Зрозуміло, що G — зліченна група. Відомо, що тоді $G = A_1 \leftthreetimes Y$, $Y \cap U = B_1 \lhd Y$, $Y = B_1 \leftthreetimes D$, де D — силовська 2-підгрупа з G одного з типів 1 чи 2 леми 1. Зрозуміло, що $A = A_1 \times A_2$, де $A_2 = A \cap B_1$, і $B_1 = B_2 \times B_3$, де B_2 — холлівська $\pi(A_2)$-підгрупа з B_1, B_3 — її холлівське доповнення в B_1.

Покажемо, що $A_2 = B_2$. Якщо $A_2 = 1$, то $A_2 = B_2 = 1$. Нехай $A_2 \neq 1$, тоді B_2 містить неодиничну силовську p-підгрупу P для будь-якого $p \in \pi(A_2)$. Очевидно, що $A \cap B_3 = 1$, $B_2 \lhd Y$, $B_3 \lhd Y$, $[B_3, D] \leq A \cap B_3 = 1$. Звідси випливає, що $[B_2, D] = A_2$, $[P, D]$ — неодинична силовська p-підгрупа з A_2. Отже, $D \ni d$, для якого $[P, \langle d\rangle] = 1$ і, значить, $P \leftthreetimes \langle d\rangle$ — ненільпотентна біпримарна група, і при цьому, як відомо, $[P, D] = P$. Звідси $P \leq A_2 = D_2$. З цього випливає, що A — холлівська підгрупа з $G = A \leftthreetimes (B_3 \times D)$.

Поклавши $B_3 = B$, одержимо, що G — група типу 3 розглядуваної теореми. Випадок 1 розглянуто повністю.

Випадок 2. У цьому випадку G' — абелева група без скруту, ізоморфна підгрупі адитивної групи раціональних чисел. Нехай A — максимальна локально циклічна підгрупа із G, що містить G'. Зрозуміло, що A — локально циклічна група без скруту, нормальна в G, і $A \neq G$. Оскільки $G' \neq 1$, то існують такі $x \in G$, та $y \in G$, що $[x, y] \neq 1$.

Нехай M_1 — довільна скінченна непорожня підмножина елементів з A, M_2 — довільна скінченна непорожня підмножина елементів з $G \setminus A$. Покладемо $H = \langle x, y, M_1, M_2 \rangle$. Тоді H — неперіодична скінченнопороджена і, значить, надрозв'язна підгрупа із G, у якої за відомими результатами [10] всі підгрупи є скінченнопородженими групами.

Нехай $A_1 = H \cap A$. Тоді з локальної циклічності A та скінченної породженості A_1 одержимо $1 \neq A_1 = \langle a \rangle$. Зрозуміло, що $H' \leq \langle a \rangle$. За лемою 3 нільпотентні $LC(A)$-групи є абелевими групами, а значить, H — не нільпотентна група, а тому H' — не центральна підгрупа в H.

Нехай $C = Z_H(\langle a \rangle)$. Тоді $C \lhd H$, фактор-група H / C ізоморфна підгрупі з $\mathrm{Aut}(\langle a \rangle)$. Оскільки $|\mathrm{Aut}(\langle a \rangle)| = 2$, то $|C : H| = 2$. За попереднім $C' = 1$. За лемами 1 та 3 C — неодинична локально циклічна, а значить, нескінченна циклічна група. Звідси $C = \langle u \rangle$, $|u| = \infty$, $|\langle u \rangle : H| = 2$. Зрозуміло, що $H = \langle u \rangle \langle b \rangle$, $b^{-1} u b = u^{-1}$, звідки $u^2 \in \langle a \rangle \leq A$. Оскільки $Z(H) \cap \langle u \rangle = 1$ і $\langle u \rangle \cap \langle b \rangle \leq Z(H)$, то $\langle u \rangle \cap \langle b \rangle = 1$ і, отже, $H = \langle u \rangle \leftthreetimes \langle b \rangle$, $|b| = 2$. Покладемо $X = AH$. Оскільки $u^2 \in A$, то $|X / A| \leq 4$. Із довільності M_1 та M_2 одержимо $X = G$.

Нехай $x \in A$. Покладемо $H_1 = \langle x, H \rangle$. Тоді, як і раніше, $H_1 = \langle u_1 \rangle \leftthreetimes \langle b_1 \rangle$, $|b_1| = 2$, $x \in \langle u_1 \rangle$, $u \in \langle u_1 \rangle$, $b_1^{-1} u_1 b_1 = u_1^{-1}$. Звідси $[x, u] = 1$, $b_1^{-1} x b_1 = x^{-1}$. З цього випливає, що $A \leq (A \langle u \rangle)$ — абелева група. За вибором A маємо, що $u \in A$, а значить, $G = A \leftthreetimes \langle b \rangle$ і для кожного $a \in A$ справедливо $b^{-1} a b = a^{-1}$, тому G — група типу 4 розглядуваної теореми. Випадок 2 розглянуто повністю. Необхідність доведено.

Достатність. Нехай G — група одного з типів $1-4$ розглядуваної теореми. Достатність для групи G типу 1 очевидна.

Нехай H — довільна скінченнопороджена підгрупа групи G одного з типів $2-4$ теореми. Покажемо, що H — надрозв'язна група, яка при $H' = 1$ є навіть циклічною групою. У групі G типу 2 всі силовські підгрупи циклічні, і за лемою 2 H — надрозв'язна група. При $H' = 1$ H — циклічна група, тому достатність для групи G типу 2 теж доведено.

Нехай $A_1 = H \cap A$. Тоді $A_1 \lhd H$ і $\pi(A_1) \cap \pi(H / A_1) = \varnothing$. Група G типу 3 локально скінченна, а тому $|H| < \infty$, $A_1 = \langle x \rangle$, $H / \langle x \rangle$ — надрозв'язна група. Звідси надрозв'язною буде і H.

Нехай $H' = 1$. Тоді H — група з циклічними силовськими підгрупами непарного порядку із абелевою силовською 2-підгрупою, що є підгрупою групи одного з типів $1-4$ твердження 2. Очевидно, що всі абелеві підгрупи груп типу $1-4$ згаданого твердження є циклічними групами, отже, H — прямий добуток своїх циклічних силовських підгруп. З цього випливає, що H — циклічна група і достатність для групи G типу 3 теж доведено.

Нехай G — група типу 4. Якщо $A_1 = 1$, то $|H| \leq 2$ і H — надрозв'язна і циклічна група. Нехай $A_1 \neq 1$. Тоді $x \in A_1$, $|x| = \infty$, $\langle x \rangle \lhd G$. Зрозуміло, що

$G/\langle x\rangle$ — локально скінченна група і $A_1/\langle x\rangle$ — її скінченна підгрупа. Оскільки A_1 — скінченнопороджена підгрупа з A, то $A_1 = \langle a\rangle$. З умов $|G/A| = 2$, $H/\langle a\rangle$ — підгрупа з G/A випливає, що H — надрозв'язна група. При $H' = 1$ $H = A_1$ — циклічна група. Достатність для групи G типу 4 доведено. Достатність доведено повністю. Теорему доведено.

Наслідок 3. *Всі локально надрозв'язні $C(A)$-групи надрозв'язні та вичерпуються групами типів*:

1) G — *нескінченна циклічна група;*

2) $G = \langle a\rangle \leftthreetimes \langle b\rangle$, *де* $\langle a\rangle, \langle b\rangle$ — *скінченні холлівські підгрупи із* G;

3) $G = \langle a\rangle \leftthreetimes (\langle b\rangle \times D)$, *де* $\langle a\rangle, \langle b\rangle$ — *скінченні холлівські підгрупи із* G, $D = \langle u\rangle\langle v\rangle$, $|u| = 2^{\delta}$, $|v| = 4$, $\delta > 1$, $|\langle u\rangle \cap \langle v\rangle| = 2$, $v^{-1}uv = u^{-1}$;

4) $G = \langle a\rangle \leftthreetimes \langle b\rangle$, $|a| = \infty$, $|b| = 2$, $b^{-1}ab = a^{-1}$.

Доведення. Необхідність. Нехай G задовольняє умову наслідку. Тоді за лемою 1 G задовольняє умову теореми 1 і може бути групою одного з типів 1 – 4 згаданої теореми. За означенням всі абелеві підгрупи з G циклічні. Звідси група типу 1 теореми 1 є нескінченною циклічною групою і, значить, G — група типу 1 розглядуваного наслідку.

Нескінченною циклічною групою буде також підгрупа A групи типу 4, а значить, G — група типу 4 розглядуваного наслідку.

В групі G кожного з типів 2 та 3 теореми 1 підгрупи A, B і D будуть скінченними групами. Звідси $A = \langle a\rangle$, $B = \langle b\rangle$, D — група кватерніонів порядку $2^{\delta+1}$. Звідси G — група типу 2 та 3 відповідно розглядуваного наслідку. Необхідність доведено.

Достатність. Нехай G — група одного з типів 1 – 4 розглядуваного наслідку. За теоремою 1 G — локально надрозв'язна $LC(A)$-група. Покажемо, що G буде і $C(A)$-групою. Для групи G типу 1 це очевидно.

В групі G типу 2 всі силовські підгрупи циклічні і $|G| < \infty$. Звідси будь-яка абелева підгрупа з G є прямим добутком скінченного числа своїх скінченних циклічних силовських підгруп. Тоді будь-яка абелева підгрупа із G буде циклічною групою.

В групі G типу 3 силовські підгрупи непарного порядку є скінченними циклічними групами, а силовська 2-підгрупа із G є групою кватерніонів порядку $2^{\delta+1}$. Звідси всі примарні абелеві підгрупи із G є циклічними групами. Отже, абелеві підгрупи скінченної групи G типу 3 є циклічними групами.

Нехай G — група типу 4 і H — абелева підгрупа із G. Якщо $H \cap \langle a\rangle = 1$, то за теоремою про ізоморфізми $|H| \le 2$ і H — циклічна група.

Нехай $H \cap \langle a\rangle \ne 1$. Тоді $\langle z\rangle \le H$, $|z| = \infty$, $\langle z\rangle \lhd H$, $|H/\langle z\rangle| \le 2$. Якщо $H = \langle z\rangle$, то H — циклічна група. Нехай $\langle z\rangle < H$. Тоді $|H : \langle z\rangle| = 2$ і, значить, $H = \langle z\rangle\langle d\rangle$, $d = a^i b$, i — ціле число. Звідси $d^{-1}zd = b^{-1}zb = z^{-1}$, тому $[z, d] \ne$ $\ne 1$, що суперечить умові $H' = 1$. Ця суперечність показує, що і група типу 4 є $C(A)$-групою. Зрозуміло, що G — скінченнопороджена, а тому надрозв'язна група. Достатність доведено. Наслідок доведено.

Наслідок 4. *Всі локально розв'язні $LC(A)$-групи, що містять нескінченну нормальну циклічну підгрупу, є локально надрозв'язними групами.*

Доведення. Нехай G задовольняє умову наслідку. Тоді $G \ge \langle z\rangle$, $\langle z\rangle \lhd G$, $|z| = \infty$. Покладемо $C = Z_G(\langle z\rangle)$. Тоді $C \lhd G$, фактор-група G/C ізоморфна підгрупі із $\mathrm{Aut}(\langle z\rangle)$. Відомо [10], що $|\mathrm{Aut}(\langle z\rangle)| = 2$, звідки $|G : C| \le 2$, $\langle z\rangle \le$ $\le Z(C)$.

Покажемо, що C — група без скруту. Дійсно, нехай це не так. Тоді $C \setminus \langle z\rangle$

містить елемент $g \neq 1$, $|g| < \infty$. Звідси G містить не локально циклічну абелеву підгрупу $\langle z \rangle \times \langle g \rangle$, що неможливо. Отже, C — група без скруту. Нехай $H / \langle z \rangle$ — підгрупа типу (p, p) із $C / \langle z \rangle$. Зрозуміло, що $\langle z \rangle \leq Z(H)$ і H — не локально циклічна група без скруту. Оскільки $H / \langle z \rangle$ — абелева група, то $H' \leq \langle z \rangle$ і H — скінченна над центром група. Відомо [12], що $|H'| < \infty$. Звідси $H' = 1$ і H — абелева не локально циклічна підгрупа із C, що неможливо. Отже, всі силовські p-підгрупи із $C / \langle z \rangle$ мають не більше ніж одну підгрупу порядку p для будь-якого простого числа $p \in \pi(C / \langle z \rangle)$.

Нехай $g \in C \setminus \langle z \rangle$, $|g| = \infty$. Припустимо, що $\langle z \rangle \cap \langle g \rangle = 1$. Тоді в G існує не локально циклічна абелева підгрупа $\langle z \rangle \times \langle g \rangle$, що неможливо. Отже, $\langle z \rangle \cap \cap \langle g \rangle \neq 1$. З цього випливає, що $C / \langle z \rangle$ — періодична група. Оскільки G — локально розв'язна група, то локально розв'язними будуть і групи $C / \langle z \rangle$ та $G / \langle z \rangle$. Відомо [10], що $C / \langle z \rangle$ і $G / \langle z \rangle$ будуть локально скінченними групами.

Нехай U — скінченнопороджена підгрупа із C. Тоді U — розв'язна підгрупа без скруту, для якої $\langle z \rangle \cap U \neq 1$. Без порушення загальності можемо вважати, що $\langle z \rangle \leq U$.

Покажемо, що U — циклічна група. Якщо $U' = 1$, то U — скінченнопороджена локально циклічна, а значить, і циклічна група.

Припустимо, що $U' \neq 1$. Із розв'язності U випливає існування натурального числа n, для якого $\{ U = U^0 > U^1 = U' > \ldots > U^n = 1 \}$ — ряд комутантів із U, $n \geq 2$. Покладемо $A = U^{n-1}$, $B = U^{n-2}$. Тоді $A' = 1$, $B' = A \neq 1$. За умовою наслідку і наведеним вище A — локально циклічна група без скруту. Оскільки $C / \langle z \rangle$ — локально скінченна група, то локально скінченною буде і $U / \langle z \rangle$. Звідси для скінченнопородженої підгрупи U маємо $|U / \langle z \rangle| < \infty$. Без порушення загальності можемо вважати, що $\langle z \rangle \leq A$ і, значить, $|U : A| < \infty$. Відомо, що A — скінченнопороджена група, звідки $A = \langle a \rangle$, $|a| = \infty$. Як і раніше, $Z_U(A) \lhd U$, фактор-група $U / Z_U(A)$ ізоморфна підгрупі з $\mathrm{Aut}(A)$, $|\mathrm{Aut}(A)| = 2$. Звідси $U' \leq Z_U(A)$.

Припустимо, що $A = G'$. Легко бачити, що $Z_G(A) = Z_G(\langle z \rangle) = C$. Тому U — скінченна над центром група без скруту, для якої $U' = 1$, що неможливо. Отже, $U' > A$. Але тоді $U' \geq B$.

Тепер, як і раніше, можна показати, що $A \leq Z(B)$ і, значить, B — циклічна група, що суперечить рівності $B' = A \neq 1$. З цієї суперечності випливає рівність $U' = 1$ і, значить, U — циклічна група. Отже, ми показали, що C — локально циклічна група. Якщо тепер $C = G$, то G — локально надрозв'язна група.

Нехай $C < G$. Тоді $G = C\langle d \rangle$, $C \cap \langle d \rangle = \langle d^2 \rangle$ і $d^{-1} z d = z^{-1}$. Оскільки C — група без скруту, то $|d^2| \in \{1, \infty\}$. Припустимо, що $|d^2| = \infty$. Тоді $\langle z \rangle \cap \cap \langle d \rangle \neq 1$ і, значить, існує ціле m, для якого $d^{-1} z^m d = z^m = z^{-m}$, що неможливо. Ця суперечність показує, що $|d^2| = 1$ і $|d| = 2$. Тепер очевидно, що G — група типу 4 теореми 1, за твердженням якої G — локально надрозв'язна група. Наслідок доведено.

Лема 4. *Скінченні розв'язні, але не надрозв'язні $LC(A)$-групи G вичерпуються групами типів*:

1) $G = \langle a \rangle \leftthreetimes (\langle b \rangle \times (Q \leftthreetimes T))$, *де* $\langle a \rangle, \langle b \rangle$ — *скінченні холлівські підгрупи із* G, Q — *група кватерніонів порядку* 8, T — *скінченна циклічна силовська* 3-*підгрупа із* G, $[\langle a \rangle, (\langle b \rangle \times T)] = \langle a \rangle$, $[\langle a \rangle, Q] = 1$, $[Q, T] = Q$;

2) $G = \langle a \rangle \leftthreetimes (\langle b \rangle \times ((Q \leftthreetimes T)\langle x \rangle))$, *де* $\langle a \rangle, \langle b \rangle$ — *скінченні холлівські підгру-*

пи із G, Q *— група кватерніонів порядку* 8, T *— скінченна циклічна силовська* 3*-підгрупа із* G, $|x|=4$, $[\langle a\rangle, (\langle b\rangle\times\langle x\rangle)]=\langle a\rangle$, $[\langle a\rangle, (Q\leftthreetimes T)]=1$, $[Q, T]=Q$, $[T,\langle x\rangle]=T$, $(Q\langle x\rangle)$ *— група кватерніонів порядку* 2^4.

Доведення. *Необхідність.* Нехай G — досліджувана група. За лемою 1 G — $C(A)$-група, в якої всі силовські підгрупи непарного порядку циклічні і нециклічною може бути лише силовська 2-підгрупа із G, ізоморфна групі кватерніонов порядку 8 чи узагальненій групі кватерніонів. Оскільки G — не надрозв'язна група, то G' — нециклічна група. Але тоді за означенням G' — неабелева група. Звідси $G''\neq 1$.

Зрозуміло, що G має ряд комутантів $\{G=G^0>G^1=G'>\ldots>G^n=1\}$, $n>2$. Покладемо $G^{n-1}=A$, $G^{n-2}=B$. Тоді $A'=1$, $B'=A\neq 1$. Звідси $A=\langle a\rangle$, $B\leq G'$, $A\lhd G$, $B\lhd G$. Відомо, що $Z_G(A)\lhd G$, фактор-група $G/Z_G(A)$ ізоморфна підгрупі з $\mathrm{Aut}(A)$ і $\mathrm{Aut}(A)$ — абелева група. Звідси $B\leq G'\leq$ $\leq Z_G(A)$, отже, $A\leq Z(B)$, і B — нільпотентна $C(A)$-група. Оскільки $B'=A\neq$ 1, то $B=Q\times B_1$, де Q — силовська 2-підгрупа з B, B_1 — її холлівське доповнення в B.

За лемою 1 та твердженням 1 B_1 — циклічна група. Звідси $Q'\neq 1$. З цього випливає, що силовська 2- підгрупа D із G має вигляд $D=\langle u\rangle\langle v\rangle$, $|u|=$ $=2^\delta$, $\delta>1$, $|v|=4$, $v^2\in\langle u\rangle$, $v^{-1}uv=u^{-1}$, і $B\cap D=Q=\langle x\rangle\langle y\rangle$, $|x|=2^\gamma$, $\gamma>$ >1, $|y|=4$, $y^2\in\langle x\rangle$, $y^{-1}xy=x^{-1}$. Звідси $D=\langle u\rangle Q$, $\langle u\rangle\cap Q=\langle x\rangle$.

Оскільки $B\lhd G$, то $Q\lhd G$ і D/Q — абелева група. Звідси $D'=\langle u^2\rangle\leq$ $\leq\langle x\rangle<Q$. Зрозуміло, що $\langle x^2\rangle=Q'\lhd G$, $Z_G(\langle x^2\rangle)\lhd G$, фактор-група $G/Z_G(\langle x^2\rangle)$, ізоморфна підгрупі з $\mathrm{Aut}(\langle x^2\rangle)$, — абелева 2-група. Звідси $G'\leq Z_G(\langle x^2\rangle)$.

Припустимо, що $|x^2|>2$. Тоді $Z_D(\langle x^2\rangle)=\langle u\rangle$. Зрозуміло, що всі силовські підгрупи непарного порядку з G належать $Z_G(\langle x^2\rangle)$. Звідси $|G:Z_G(\langle x^2\rangle)|=$ $=2$ і всі силовські підгрупи з $Z_G(\langle x^2\rangle)$ циклічні.

За лемою 2 $Z_G(\langle x^2\rangle)=\langle a_1\rangle\leftthreetimes\langle a_2\rangle$, де $\langle a_1\rangle$, $\langle a_2\rangle$ — холлівські підгрупи з $Z_G(\langle x^2\rangle)$. Звідси $\langle a_1\rangle\lhd G$. Покладемо $\langle a_1\rangle=A_1$, $Z_G(\langle x^2\rangle)=A_2$ і $A_3=G$. Тоді G має ряд $1=A_0\leq A_1\leq A_2\leq A_3$ нормальних в G підгруп A_i з циклічними факторами, $i\in\{0, 1, 2, 3\}$. З цього випливає, що G — надрозв'язна група, що суперечить умові леми. Звідси $|x^2|<4$, а тому $|x|=4$, $|u|\leq 8$, Q — група кватерніонів порядку 8.

Покладемо $C=Z_G(Q)$. Тоді $C\lhd G$, фактор-група G/C ізоморфна підгрупі з $\mathrm{Aut}(Q)\cong S_4$, $C\cap Q=C\cap D=\Phi(Q)\leq Z(G)$. Звідси $C=C_1\times D_1$, де $D_1=\Phi(Q)$ — силовська 2-підгрупа із C, а C_1 — її холлівське доповнення в C. З цього випливає, що $C_1\lhd G$. За лемою 2 $C_1=\langle a_1\rangle\leftthreetimes\langle a_2\rangle$, де $\langle a_1\rangle$, $\langle a_2\rangle$ — холлівські підгрупи з C_1. Тоді $\langle a_1\rangle\lhd G$. Зрозуміло, що всі p-елементи із G при $p>3$ належать C_1. Припустимо, що до C_1 належать і всі 3-елементи. Тоді покладемо $A_2=C_1$, $\langle a_1\rangle=A_1$, $A_0=1$, $A_3=A_2\leftthreetimes\langle u\rangle$, $A_4=G$. Зрозуміло, що $G=A_2\leftthreetimes D$ і G має ряд нормальних в G підгруп A_i з циклічними факторами, $i\in\{0, 1, 2, 3, 4\}$, а це суперечить не надрозв'язності G. Звідси силовська 3-підгрупа із G скінченна і не належить C.

Нехай $Q=D$. Тоді за теоремою Шура $G=Q\leftthreetimes F$, де F — холлівська підгрупа із G без інволюцій. За твердженням 1 і лемою 1 F — $C(A)$-група з циклічними силовськими підгрупами. За лемою 2 $F = \langle a_1 \rangle \lambda \langle b_1 \rangle$, де $\langle a_1 \rangle$ та $\langle b_1 \rangle$ — холлівські підгрупи із F, $\langle a_1 \rangle = F'$. Оскільки F — група без інволюцій, то $\langle a_1 \rangle$ не містить 3-елементів. З цього випливає, що $[Q, \langle a_1 \rangle] = 1$ і $\langle b_1 \rangle$ містить силовську 3-підгрупу із G. Звідси $\langle a_1 \rangle \lhd G$ і за теоремою Шура $G = \langle a_1 \rangle \lambda D_1$. Зрозуміло, що $C_1 \leq F$.

Нехай $C_1 \cap D = \langle b_2 \rangle$. Тоді $\langle b_2 \rangle \lhd D$ і $\langle b_2 \rangle \geq \langle b \rangle$, де $\langle b \rangle$ — холлівська підгрупа із D, що не містить елементів порядку 3. За теоремою Шура $D = \langle b \rangle \lambda H$, $H = Q \lambda T$, де T — силовська 3-підгрупа із G. Зрозуміло, що $[\langle b \rangle, Q] = 1$ і $\langle b_1 \rangle = \langle b \rangle \times T$ — циклічна група. Оскільки $Q \leq G'$, $[\langle a_1 \rangle, Q] = [\langle b \rangle, Q] = 1$, то $[Q, T] = Q$.

Покладемо $a_1 = a$. Тоді $G = \langle a \rangle \lambda (\langle b \rangle \times (Q \lambda T))$ — група типу 1 розглядуваної леми. Випадок $Q = D$ розглянуто повністю.

Нехай тепер $Q \neq D$. Тоді $|D : Q| = 2$, D — узагальнена група кватерніонів порядку 2^4, G / C — неабелева група порядку 6. За наведеним вище $x = u^2$. У G існують підгрупи $H_1 < H = DT$, D — силовська 2-підгрупа із G, T — скінченна циклічна силовська 3-підгрупа із G, $H_1 = Q \times Z_T(Q) \lhd G$, H / H_1 — неабелева група порядку 6. $Z_G(\langle x \rangle)$ містить всі силовські підгрупи із G, порядок яких не ділиться ні на 2, ні на 3 і $G = UH$, де U — холлівське доповнення H в G, $[Q, U] = 1$.

Покладемо $N = Q \lambda T$. Припустимо, що $[Q, T] = 1$. Тоді $\langle x \rangle \lhd Q$, $\langle x \rangle \lhd H$, $\langle x \rangle \lhd G$, і в G існують нормальні підгрупи $1 < \langle x \rangle < Q$ і G / Q — група з циклічними силовськими підгрупами. За лемою 2 G / Q — надрозв'язна група, але тоді надрозв'язною буде і G. Отже, $[Q, T] = Q$, $[\langle x \rangle, T] \neq 1$.

Припустимо, що $D \lhd H$. Тоді $\Phi(D) = \langle x \rangle \lhd H$, $[\langle x \rangle, T] = 1$, що неможливо. Отже, D не є нормальною в H. За лемою Фраттіні $H = (Q \lambda T)) N_H(T)$, $N_H(T) = T \lambda D_1$, D_1 — силовська 2-підгрупа із $N_H(T)$, $D = Q D_1$, $Q \cap D_1 = \Phi(Q)$. Оскільки $|D : Q| = 2$, то $|D_1 : \Phi(Q)| = 2$. Звідси $|D_1| = 4$ і D_1 — абелева підгрупа порядку 4 із D. З цього випливає, що D_1 — циклічна група порядку 4, і T не нормальна в H. Оскільки D також не нормальна в H, то $[T, D_1] \neq 1$, але тоді $[T, D_1] = T$.

Оскільки $C_1 = \langle a_1 \rangle \lambda \langle a_2 \rangle$, то за теоремою Шура $G = \langle a_1 \rangle \lambda V$ і $V \cap C_1 = \langle a_2 \rangle \lhd V$. Звідси $\langle a_2 \rangle \geq \langle b_1 \rangle$, де $\langle b_1 \rangle$ — нормальна холлівська підгрупа із V, для якої без порушення загальності маємо $V = \langle b_1 \rangle \lambda H$. Зрозуміло, що $U = \langle a_1 \rangle \lambda \langle b_1 \rangle \lhd G = U \lambda H$, а значить, $[\langle a_1 \rangle, N] = [\langle b_1 \rangle, N] = 1$, $N \lhd G$, $N \leq G'$, G / N — скінченна група з циклічними силовськими підгрупами. З цього випливає, що G' / N — циклічна група, яка не містить елементів ні порядку 2, ні порядку 3. Звідси $G' = \langle a \rangle \times N$, де без порушення загальності $\langle a \rangle \geq \langle a_1 \rangle$.

Покладемо $D_1 = \langle x \rangle$. Тоді $|x| = 4$ і в G існує підгрупа $K = U \lambda \langle x \rangle$, $G = KN$. За відомими результатами [10] $G' = K' N' [K, N]$. Очевидно, що $N' [K, N] \leq N$, $K' \leq U$. Оскільки $[U, N] = 1 = U \cap N$, $G' = \langle a \rangle \times N$, то $K' = \langle a \rangle$. Зрозуміло, що K — група з циклічними силовськими підгрупами, в якої за лемою 2 $\langle a \rangle$ — нормальна холлівська підгрупа з G.

За теоремою Шура $G = \langle a \rangle \lambda Z$, $U = \langle a \rangle \lambda \langle b \rangle$, де $U \cap Z = \langle b \rangle \lhd Z$. Без порушення загальності можемо вважати, що $Z = \langle b \rangle \lambda H$, $H = N \langle x \rangle$. За вказаним вище $[\langle b \rangle, N] = 1$, $K' = \langle a \rangle$. Оскільки $\langle b \rangle \lhd Z$, то $[\langle b \rangle, \langle x \rangle] \leq \langle a \rangle \cap \langle b \rangle = 1$.

З цього випливає, що $Z = \langle b \rangle \times H$, і G — група типу 2 розглядуваної леми. Необхідність доведено.

Достатність. Нехай G — група одного з типів 1 чи 2 розглядуваної леми. Зрозуміло, що G — скінченна розв'язна група. Оскільки G містить не надрозв'язну підгрупу $(Q \leftthreetimes T)$, то G — не надрозв'язна група.

Нехай H — абелева підгрупа із G. Тоді вона є прямим добутком своїх абелевих силовських p-підгруп, де $\pi(G) \ni p$ — просте число. При $p > 2$ силовські p-підгрупи із G циклічні. При $p = 2$ силовська 2-підгрупа із G є групою кватерніонів порядку 8 чи 16. Зрозуміло, що абелеві підгрупи групи кватерніонів порядків 8 чи 16 є циклічними групами. Звідси H — прямий добуток своїх циклічних силовських підгруп. Оскільки $|G| < \infty$, то H — циклічна група і G — $C(A)$-група. Достатність доведено. Лему доведено.

Теорема 2. *Локально розв'язні, але не локально надрозв'язні $LC(A)$-групи G, що мають неодиничну нормальну періодичну підгрупу T, є періодичними розв'язними групами, що вичерпуються групами типів*:

1) $G = A \leftthreetimes (B \times (Q \leftthreetimes T))$, *де A, B — холлівські локально циклічні підгрупи із G, Q — силовська 2-підгрупа із G, що ізоморфна групі кватерніонів порядку 8, T — циклічна силовська 3-підгрупа із G, $A = [A, (B \times T)]$, $[A, Q] = 1$, $[Q, T] = Q$;*

2) $G = A \leftthreetimes (B \times ((Q \leftthreetimes T)\langle x \rangle))$, *де A, B — холлівські локально циклічні підгрупи із G, Q — група кватерніонів порядку 8, T — циклічна силовська 3-підгрупа із G, $|x| = 4$, $A = [A, (B \times \langle x \rangle)]$, $[A, (Q \leftthreetimes T)] = 1$, $[Q, T] = Q$, $[T, \langle x \rangle] = T$, $(Q\langle x \rangle)$ — узагальнена група кватерніонів порядку 2^4.*

Доведення. Необхідність. Нехай G — досліджувана група. Покажемо спочатку, що $T = G$, тобто G — періодична група. Дійсно, нехай це не так. Тоді в G існує підгрупа $H = \langle h, z \rangle$, де $h \in T$, $|h| = p$, $|z| = \infty$, p — просте число, $p \in \pi(G)$. За умовою теореми H — скінченнопороджена, а значить, розв'язна $LC(A)$-група, яка, очевидно, має періодичну частину $T(H) = T \cap H$. Зрозуміло, що $H = T(H) \leftthreetimes \langle z \rangle$, а значить, $H' \le T(H)$. Із розв'язності H випливає, що $T(H) \ge A$ — неодинична нормальна локально циклічна підгрупа із H. Не порушуючи загальності можемо вважати, що $A \ge P$ — неодинична силовська локально циклічна p-підгрупа із A і без порушення загальності $h \in P$.

Оскільки всі підгрупи із P характеристичні в P і P — характеристична підгрупа із A, то $\langle h \rangle$ нормальна в H. За вибором H маємо $H = \langle h \rangle \leftthreetimes \langle z \rangle$. Як відомо, $Z_H(\langle h \rangle) \lhd H$, фактор-група $H / Z_H(\langle h \rangle)$ ізоморфна підгрупі з $\mathrm{Aut}(\langle h \rangle)$, $|\mathrm{Aut}(\langle h \rangle)| < \infty$. Тому знайдеться натуральне n, для якого $[h, z^n] = 1$ і, значить, в G існує не локально циклічна абелева підгрупа $\langle h \rangle \times \langle z^n \rangle$, що неможливо.

Отже, в подальшому $T(G) = G$ — періодична локально розв'язна, а значить, і локально скінченна $LC(A)$-група.

За лемою 1 та твердженням 2 силовські p-підгрупи із G при непарному p є локально циклічними групами, а при $p = 2$ є локально циклічними групами чи скінченними або нескінченними групами кватерніонів.

За лемою 1 всі скінченнопороджені підгрупи із G є розв'язними скінченними $C(A)$-групами. За умовою теореми G має скінченну розв'язну, але не надрозв'язну підгрупу N. З цього випливає, що G має локальну систему скінченних розв'язних, але не надрозв'язних підгруп H_α, $H_\alpha \ge N$, $\alpha \in \Lambda$, Λ — деяка множина індексів. Зрозуміло, що H_α задовольняють умову леми 4 і можить бути лише групами одного з типів 1 чи 2 згаданої леми. Тепер можливі такі випадки:

1) всі H_α — групи типу 1 леми 4;

2) всі H_α — групи типу 2 леми 4.

Випадок 1. У цьому випадку $H_\alpha = (\langle a_\alpha \rangle \times Q) \leftthreetimes (\langle b_\alpha \rangle \times T_\alpha)$, де $\langle a_\alpha \rangle$, $\langle b_\alpha \rangle$ — скінченні холлівські підгрупи із H_α, Q — силовська 2-підгрупа із G порядку 8, T_α — циклічна силовська 3-підгрупа з H_α, $[Q, T_\alpha] = Q$, $[Q, \langle b_\alpha \rangle] = 1$, $\langle a_\alpha \rangle = [\langle a_\alpha \rangle, (\langle b_\alpha \rangle \times T_\alpha)]$. Зрозуміло, що $H'_\alpha = \langle a_\alpha \rangle \times Q$ — нільпотентна група з центральним циклічним комутантом порядку 2. Тому, очевидно, що $G' = A \times Q$, де A — локально циклічна холлівська підгрупа з G, Q — силовська 2-підгрупа із G. Зрозуміло, що $G' = G_1 \times C_1$, де C_1 — скінченна холлівська підгрупа із G', $\pi(C_1) \in \{2, 3\}$, G_1 — її локально циклічне холлівське доповнення в G'. Нехай G_2 — максимальна холлівська підгрупа з G, яка не містить ні елементів порядку 2, ні елементів порядку 3. Тоді $[C_1, G_2] = 1$, і $G'G_2 = = G_2 \times C_1 \lhd G$, $G_2 \lhd G$, G_2 — група з локально циклічними силовськими підгрупами. Такою ж буде і група G_3, для якої G_3 / G_2 — силовська 3-підгрупа із G / G_2. Звідси за лемою 2 $G_3 = G_1 \leftthreetimes (B \times T)$. Тому $G = G' \leftthreetimes (B \times T)$, де B — локально циклічна холлівська підгрупа з G, T — локально циклічна силовська 3-підгрупа з G, $[Q, B] = 1$.

Припустимо, що $|T| = \infty$. Тоді в G існує підгрупа $(Q \leftthreetimes T)$ зі скінченним комутантом. За відомими результатами [12] $[Q, T] = 1$, але тоді Q не належить G', що неможливо. Отже, $|T| < \infty$ і, покладаючи $A = G_1$, одержуємо, що G — група типу 1 розглядуваної теореми. Випадок 1 розглянуто. повністю.

Випадок 2. У цьому випадку $H_\alpha = \langle a_\alpha \rangle \leftthreetimes (\langle b_\alpha \rangle \times ((Q \leftthreetimes T_\alpha) \langle x \rangle))$, де $\langle a_\alpha \rangle$, $\langle b_\alpha \rangle$, Q, T_α, $\langle x \rangle$ задовольняють ті ж умови, що $\langle a \rangle$, $\langle b \rangle$, Q, T, $\langle x \rangle$ в групах типу 2 відповідно леми 4.

За лемою 4 $G' = A \times (Q \leftthreetimes T)$, де A — холлівська локально циклічна підгрупа з G, Q — силовська 2-підгрупа з G', T — локально циклічна силовська 3-підгрупа із G, $[A, T_\alpha] = 1$.

Припустимо, що $|T| = \infty$. Тоді $[Q, T] = 1$, $Z_G(Q)$ містить всі 3-елементи з G, що неможливо. Отже, $|T| < \infty$. Зрозуміло, що знайдеться таке $\alpha \in \Lambda$, для якого $T_\alpha = T$, а значить, $H_\alpha = \langle a_\alpha \rangle \leftthreetimes (\langle b_\alpha \rangle \times H)$, де $H = (Q \leftthreetimes T) \langle x \rangle$, $[Q, T] = = Q$, $[T, \langle x \rangle] = T$, $(Q \langle x \rangle)$ — узагальнена група кватерніонів порядку 2^4.

Покладаючи $U_\alpha = \langle a_\alpha \rangle \leftthreetimes \langle b_\alpha \rangle$, одержуємо, що $H_\alpha = U_\alpha \leftthreetimes H$. Зрозуміло, що при $H_\alpha \leq H_\gamma$ маємо $H_\gamma = U_\gamma \leftthreetimes H$ і тому, не порушуючи загальності, можемо вважати, що для всіх $\alpha \in \Lambda$ справедливо $H_\alpha = U_\alpha \leftthreetimes H$.

Нехай $U = \bigcup\limits_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha$. Тоді U — нормальна в G холлівська підгрупа, що містить p-елементи для всіх $p > 3$. Звідси $A \leq U$. Тепер, як і у випадку 1, G — зліченна група, а значить, U та A доповнюються в G, тобто $G = U \leftthreetimes H = = A \leftthreetimes V$, $U = A \leftthreetimes B$, де $V \bigcap U = B \lhd V$, $H \leq V$, і тому $V = B \times H$, B — локально циклічна холлівська підгрупа з G, H — холлівська підгрупа з G. Очевидно, що G — група типу 2 розглядуваної теореми. Випадок 2 розглянуто повністю. Необхідність доведено.

Достатність. Нехай G — група типу 1 або 2 розглядуваної теореми. Зрозуміло, що G має періодичну частину $T(G) = G$ і G — розв'язна група, яка містить скінченну не надрозв'язну підгрупу $(Q \leftthreetimes T)$. З цього випливає, що G — локально розв'язна, але не локально надрозв'язна група.

Покажемо, що G — $LC(A)$-група. Дійсно, нехай H — довільна абелева підгрупа із G. Тоді вона є прямим добутком своїх абелевих силовських p-підгруп для будь-якого $p \in \pi(H)$. Очевидно, що в групі G силовські q-підгрупи локально циклічні для будь-якого $q \in \pi(G)$, $q > 2$. Силовські 2-підгрупи із G ізоморфні групі кватерніонів порядку 8 чи 16 і всі їх абелеві підгрупи циклічні. Отже, H — прямий добуток своїх локально циклічних силовських p-підгруп. Тоді H — локально циклічна група і G — $LC(A)$-група. Достатність доведено. Теорему доведено.

Зауваження. Приклади підгруп $H = (Q \leftthreetimes T)\langle x \rangle$ з опису груп G типу 2 теореми 2 можна знайти в роботі [13]. Серед них є групи H з такими твірними елементами і визначальними співвідношеннями як $Q = \langle a, b \rangle$ — група кватерніонів порядку 8, $|x| = 4$, $x^2 = a^2$, $x^{-1}ax = b$, $x^{-1}bx = a$, $T = \langle c \rangle$, $|c| = 3^{\gamma}$, $\gamma > 0$, $x^{-1}cx = c^{-1}$, $c^{-1}ax = b$, $c^{-1}bx = ab$.

Іншими словами, $H = QX$, $Q = \langle a, b \rangle \lhd G$, $X = T \leftthreetimes \langle x \rangle = \langle c \rangle \leftthreetimes \langle x \rangle$, $Z_X(Q) = C = \langle c^3 \rangle \times \langle x^2 \rangle$, $X \cap Q = Q \cap C = \langle x^2 \rangle \leq Z(G)$, $C \lhd G$,

$$G / C = ((QC)/C \leftthreetimes X/C) \cong S_4.$$

Легко перевірити, що підгрупа X групи H індукує на нормальній в H підгрупі кватерніонів Q групу автоморфізмів, ізоморфну S_3.

Теорема 3. *Локально розв'язні $C(A)$-групи G розв'язні та вичерпуються групами типів*:

1) G — *нескінченна циклічна група;*

2) $G = \langle a \rangle \leftthreetimes \langle b \rangle$, *де* $\langle a \rangle, \langle b \rangle$ — *скінченні холлівські підгрупи із* G;

3) $G = \langle a \rangle \leftthreetimes (\langle b \rangle \times D)$, *де* $\langle a \rangle, \langle b \rangle$ — *скінченні холлівські підгрупи із* G, $D = \langle u \rangle \langle v \rangle$, $|u| = 2^{\delta}$, $|v| = 4$, $\delta > 1$, $|\langle u \rangle \cap \langle v \rangle| = 2$, $v^{-1}uv = u^{-1}$;

4) $G = \langle a \rangle \leftthreetimes \langle b \rangle$, $|a| = \infty$, $|b| = 2$, $b^{-1}ab = a^{-1}$;

5) $G = \langle a \rangle \leftthreetimes (\langle b \rangle \times (Q \leftthreetimes T))$, *де* $\langle a \rangle, \langle b \rangle$ — *скінченні холлівські підгрупи із* G, Q — *група кватерніонів порядку* 8, T — *скінченна циклічна силовська* 3-*підгрупа із* G, $[\langle a \rangle, (\langle b \rangle \times T)] = \langle a \rangle$, $[\langle a \rangle, Q] = 1$, $[Q, T] = Q$;

6) $G = \langle a \rangle \leftthreetimes (\langle b \rangle \times ((Q \leftthreetimes T)\langle x \rangle))$, *де* $\langle a \rangle, \langle b \rangle$ — *скінченні холлівські підгрупи із* G, Q — *група кватерніонів порядку* 8, T — *скінченна циклічна силовська* 3-*підгрупа із* G, $|x| = 4$, $[\langle a \rangle, (\langle b \rangle \times \langle x \rangle)] = \langle a \rangle$, $[\langle a \rangle, (Q \leftthreetimes T)] = 1$, $[Q, T] = Q$, $[T, \langle x \rangle] = T$, $(Q\langle x \rangle)$ — *група кватерніонів порядку* 2^4.

Доведення. *Необхідність.* Припустимо, що G — локально надрозв'язна група. Тоді за лемою 1 G задовольняє умову наслідку 3 і може бути лише групою типу $1-4$ згаданого наслідку, а тому G — група одного з типів $1-4$ розглядуваної теореми.

Нехай G — локально розв'язна, але не локально надрозв'язна група. За лемою 1 всі силовські p-підгрупи із G можуть бути лише скінченною групою типу 1 чи 2 твердження 1, а всі нескінченні абелеві підгрупи є циклічними групами.

Покажемо, що G — періодична група. Нехай це не так. Тоді в G існує скінченнопороджена неперіодична розв'язна підгрупа H, яка за лемою 1 є $C(A)$-групою. Можна вважати, що H — не є надрозв'язною групою. Звідси H — не циклічна група і за означенням $H' \neq 1$. Оскільки H — скінченнопороджена не надрозв'язна група, то H' — не циклічна, а значить, і не абелева група. Звідси $H'' \neq 1$ і H має ряд комутантів $\{H = H^0 > H^1 = H' > \ldots > H^i > \ldots > H^n = 1\}$ і $n > 2$. Нехай $A = H^{n-1}$, $B = H^{n-2}$. Тоді $A' = 1$, $B' = A \neq 1$, $B \leq H'$, $A \lhd$

$\lhd H$, $B \lhd H$. За означенням $A = \langle a \rangle$. За відомими результатами $Z_H(A) \lhd H$, фактор-група $H / Z_H(A)$ ізоморфна підгрупі з $\mathrm{Aut}(A)$, $\mathrm{Aut}(A)$ — скінченна абелева група. Звідси $H' \leq Z_H(A)$ і, значить, $A \leq Z(B)$. Звідси B — нільпотентна $C(A)$-група і $|H : Z_H(A)| < \infty$.

Зрозуміло, що B — нециклічна, а значить, і неабелева група і задовольняє умову леми 3. Тоді вона може бути лише групою типу 2 згаданої леми. Звідси $|A| < \infty$. Оскільки $|H : Z_H(A)| < \infty$, то існує натуральне n, для якого $z^n \in Z_H(A)$, $|z| = \infty$. Тепер G містить абелеву не циклічну підгрупу $(A \times \langle z^n \rangle)$, що неможливо. Ця суперечність показує, що G може бути лише періодичною групою, тобто $T(G) = G$.

Зрозуміло, що G задовольняє умову теореми 2 і G може бути лише групою одного з типів 1 чи 2 згаданої теореми. Оскільки G — $C(A)$-група, то в групі G кожного із згаданих типів теореми 2 $|A| < \infty$, $|B| < \infty$ і G буде групою одного з типів 1 чи 2 леми 4, а значить, G — група одного з типів 5 чи 6 розглядуваної теореми. Необхідність доведено.

Достатність. Нехай G — група одного з типів $1-6$ розглядуваної теореми. Зрозуміло, що G — розв'язна, а значить, локально розв'язна група. Покажемо, що будь-яка її абелева підгрупа H є циклічною групою. Для групи G одного з типів $1-4$ це доведено в наслідку 3.

Нехай G — група одного з типів 5 чи 6 теореми. Тоді $|G| < \infty$ і G є групою одного з типів 1 чи 2 відповідно теореми 2. У теоремі 2 було встановлено, що будь-яка абелева підгрупа із G є локально циклічною групою. Оскільки $|G| < \infty$, то $|H| < \infty$ і H — циклічна група, тобто завжди G — $C(A)$-група. Достатність доведено. Теорему доведено.

1. *Redei L.* Das "Schiefe Produkt" in Gruppentheorie mit Auwendungen // Comment. math. helv. – 1947. – **20**, – P. 225 – 264.
2. *Гольфанд Ю. А.* О группах, все подгруппы которых специальные // Докл. АН СССР. – 1948. – **60**, № 8. – С. 1313 – 1315.
3. *Левищенко С. С., Кузенный Н. Ф.* Конечные группы с системами дисперсивных подгрупп. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1997. – 230 с.
4. *Blackburn N.* Generalization of certain elementary theorems on p-groups // Proc. London Math. Soc. – 1961. – **11**, № 41. – P. 1 – 22.
5. *Холл М.* Теория групп. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 468 с.
6. *Huppert B.* Endliche Gruppen. – Berlin: Springer, 1967. – 793 S.
7. *Черников С. Н.* Группы с заданными свойствами систем бесконечных подгрупп // Укр. мат. журн. – 1967. – **19**, № 6. – С. 111 – 131.
8. *Ольшанский А. Ю.* Бесконечные группы с циклическими подгруппами // Докл. АН СССР. – 1979. – **245**, № 4. – С. 785 – 787.
9. *Ольшанский А. Ю.* Бесконечные группы с подгруппами простых порядков // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1980. – **44**, № 2. – С. 309 – 321.
10. *Курош А. Г.* Теория групп. – М.: Наука, 1967. – 648 с.
11. *Сесекин Н. Ф., Старостин А. И.* Об одном классе периодических групп // Успехи мат. наук. – 1954. – **9**, № 4. – С. 225 – 228.
12. *Черников С. Н.* Группы с заданными свойствами системы подгрупп. – М.: Наука, 1980. – 384 с.
13. *Кузенний М. Ф.* Біпримарні недисперсивні групи, порядок яких ділиться не більше, ніж на куб простого числа // Допов. АН УРСР. Сер. А. – 1974. – № 11. – С. 973 – 977.

Одержано 01.08.97,
після доопрацювання — 20.10.98