УДК 517.962.24

И. Е. Витриченко (Одес. ун-т)

КРИТИЧЕСКИЙ СЛУЧАЙ УСТОЙЧИВОСТИ ОДНОГО КВАЗИЛИНЕЙНОГО РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА*

Sufficient conditions of the Perron stability are obtained for the trivial solution of a real difference equation of the form

$$y_{n+1} - 2\lambda_n y_n + y_{n-1} = F(n, y_n, \Delta y_{n-1}), \quad n \in N,$$

where $\lambda_n \in]-1, 1[$, $|F(n, y_n, \Delta y_{n-1})| \le L_n(|y_n| + |\Delta y_{n-1}|)^{1+\alpha}$, $L_n \ge 0$, and $\alpha \in]0, +\infty[$. The results concern the cases where $|\lambda_n| = 1 + o(1)$, $n \to +\infty$.

Отримано достатні умови стійкості за Перроном тривіального розв'язку дійсного різницевого рівняння типу

$$y_{n+1} - 2\lambda_n y_n + y_{n-1} = F(n, y_n, \Delta y_{n-1}), \quad n \in N,$$

де $\lambda_n \in]-1, 1[$, $|F(n, y_n, \Delta y_{n-1})| \le L_n(|y_n| + |\Delta y_{n-1}|)^{1+\alpha}$, $L_n \ge 0$, $\alpha \in]0, +\infty[$. Результати охоплюють випадки, коли $|\lambda_n| = 1 + o(1)$, $n \to +\infty$.

1. Постановка задачи. Исследуется глобальная устойчивость по Перрону [1] тривиального решения разностного уравнения (р.у.) вида

$$y_{n+1} - 2\lambda_n y_n + y_{n-1} = F(n, y_n, \Delta y_{n-1}), \quad n \in N, \tag{1}$$

где $\Delta y_n \equiv y_{n+1} - y_n$, $-1 < \lambda_n < 1$, $\Lambda_n \equiv \lambda_n + i\sqrt{1-\lambda_n^2}$, $i^2 \equiv -1$, $F: N \times R \times \times R \Rightarrow R$, $|F(n, y_n, \Delta y_{n-1})| \le L_n(|y_n| + |\Delta y_{n-1}|)^{1+\alpha}$, $L_n \ge 0$, $\alpha \in]0, +\infty[$, $n \in \in N$, $N \equiv \{1, 2, \dots\}$.

Результаты статьи эффективно применяются к р.у. (1), коэффициенты которого — медленно изменяющиеся функции, т. е. функции, приращения которых малы в сравнении с самыми функциями при $n \to +\infty$. Например, $f_n = = n^a$, $(\ln n)^b$, $\sin n^c$, $a, b \in R$, $c \in]0, 1[$, $R \equiv]-\infty, +\infty[$ и т. д.

Понятие устойчивости решения р.у., аналогичное понятию устойчивости по Ляпунову [2] для дифференциальных уравнений, введено О. Перроном [1]. Некритические случаи устойчивости р.у. разных классов исследовались Б. П. Демидовичем [3, 4], Д. И. Мартынюком [5] и другими [6 – 9]. Критические случаи устойчивости систем р.у. непрерывного аргумента изучались в [10, 11].

Ниже приняты следующие определения и обозначения.

Определение 1. *Р.у.* (1) *имеет свойство* GSt *при* $n \to +\infty$, *если для любого сколь угодно малого* $\varepsilon \in]0, 1[$ *существует* $\delta_\varepsilon \in]0, \varepsilon[$ *такое, что любое решение* $y = y_n$, $n \in N$, *р.у.* (1) *с начальным условием* $y_1^2 + (\Delta y_0)^2 \le \le \delta_\varepsilon$ *имеет свойство* $y_n^2 + (\Delta y_{n-1})^2 < \varepsilon$ *для всех* $n \in N$.

Определение 2. *Р.у.* (1) *имеет свойство* $GAsSt$ *при* $n \to +\infty$, *если определение* 1 *выполняется и* $y_n = o(1)$, $\Delta y_{n-1} = o(1)$, $n \to +\infty$.

Определение 3. *Р.у.* (1) *имеет свойство* $\overline{GSt}$ *при* $n \to +\infty$, *если определение* 1 *не выполняется.*

$\bar{z} = \alpha_0 - i\beta_0$, если $z = \alpha_0 + i\beta_0$, $\alpha_0, \beta_0 \in R$, C — множество комплексных чисел.

Определение 4. *Р.у. вида*

$$\Delta z_{n-1} = f(n, z_{n-1}, \bar{z}_{n-1}), \quad f(n, 0, 0) \equiv 0, \quad n \in N, \tag{2}$$

* Работа выполнена при поддержке ISSEP, грант № APU 051026.

имеет свойство GSt *при* $n \to +\infty$, *если для любого сколь угодно малого* $\varepsilon \in]0,1[$ *существует* $\delta_\varepsilon \in]0, \varepsilon[$ *такое, что любое решение* $z = z_{n-1}$, $n \in N$, *р. у.* (2) *с начальным условием* $|z_0| \le \delta_\varepsilon$ *имеет свойство* $|z_{n-1}| < \varepsilon$ *для всех* $n \in N$.

Определение 5. *Р. у.* (2) *имеет свойство* $GAsSt$ *при* $n \to +\infty$, *если определение* 4 *выполняется и* $z_{n-1} = o(1)$, $n \to +\infty$.

Определение 6. *Р. у.* (2) *имеет свойство* $\overline{GSt}$ *при* $n \to +\infty$, *если определение* 4 *не выполняется.*

2. Основные результаты. Здесь исследуются свойства GSt, $GAsSt$, $\overline{GSt}$ при $n \to +\infty$ р. у. вида

$$\Delta z_{n-1} = p_n z_{n-1} + q_n \bar{z}_{n-1} + G(n, z_{n-1}, \bar{z}_{n-1}), \quad n \in N, \tag{3}$$

где $p_n, q_n \in C$, $G\colon N \times C \times C \Rightarrow C$, $|G| \le g_n |z_{n-1}|^{1+\alpha}$, $g_n \ge 0$, $n \in N$.

Лемма 1. *Пусть* $c_0 \in]0, +\infty[$, $y_0 \in]0, c_0[$, $a_{n-1}, b_{n-1} \in [0, +\infty[$, $n \in N$, *и*

$$0 \le y_n \le c_0 + \sum_{s=0}^{n-1} [a_s \varphi_1(y_s) + b_s \varphi_2(y_s)], \quad n \in N,$$

где $\varphi_1(x) \ge 0$, $\varphi_2(x) \ge 0$, $\varphi(x) \equiv \varphi_1(x) + \varphi_2(x)$ — *непрерывная, монотонно неубывающая функция при* $x \in]0, +\infty[$, $\varphi(0) \ge 0$,

$$\sum_{s=0}^{n-1} (a_s + b_s) < \Phi(+\infty), \quad n \in N, \quad \Phi(t) = \int_{c_0}^{t} \frac{dx}{\varphi(x)}. \tag{4}$$

Тогда $y_n \le \Phi^{-1}\left[\sum_{s=0}^{n-1}(a_s + b_s)\right]$, $n \in N$, *где* Φ^{-1} — *обратная к* Φ *функция.*

Доказательство. Обозначим $z_0 \equiv c_0$, $z_n \equiv c_0 + \sum_{s=0}^{n-1} [a_s \varphi_1(y_s) + b_s \varphi_2(y_s)]$. Тогда справедливы неравенства $y_n \le z_n$, $\varphi(y_n) \le \varphi(z_n)$, $n \in N$. Далее имеем

$$\Delta z_{n-1} = z_n - z_{n-1} = a_{n-1}\varphi_1(y_{n-1}) + b_{n-1}\varphi_2(y_{n-1}) \ge 0, \text{ т. е. } z_{n-1} \le z_n, \ n \in N.$$

Пусть $y_{s-1} \le z_{s-1} \le x \le z_s$, $s \in N$. Тогда

$$\frac{1}{\varphi(x)} \le \frac{1}{\varphi(z_{s-1})} \le \frac{1}{\varphi(y_{s-1})}, \quad s \in N. \tag{5}$$

Из (5) следует, что

$$\int_{z_{s-1}}^{z_s} \frac{dx}{\varphi(x)} \le \int_{z_{s-1}}^{z_s} \frac{dx}{\varphi(y_{s-1})} = \frac{\Delta z_{s-1}}{\varphi(y_{s-1})} \le \frac{(a_{s-1} + b_{s-1})\varphi(y_{s-1})}{\varphi(y_{s-1})} = a_{s-1} + b_{s-1}, \quad s \in N,$$

$$\Phi(z_n) = \int_{z_0}^{z_n} \frac{dx}{\varphi(x)} = \sum_{s=1}^{n} \int_{z_{s-1}}^{z_s} \frac{dx}{\varphi(x)} \le \sum_{s=1}^{n} (a_{s-1} + b_{s-1}). \tag{6}$$

Поскольку $\Phi'(t) \equiv [\varphi_1(t) + \varphi_2(t)]^{-1} > 0$, то $y = \Phi(t)$ — монотонно возрастающая функция, когда $t \in [0, +\infty[$. Поэтому функция $t = \Phi^{-1}(y)$ существует и монотонно возрастает при $y \in [0, \Phi(+\infty)[$. Тогда из (4), (6) следует

$$y_n \le z_n \le \Phi^{-1}\left[\sum_{s=1}^{n}(a_{s-1}+b_{s-1})\right] = \Phi^{-1}\left[\sum_{s=0}^{n-1}(a_s+b_s)\right], \quad n \in N.$$

***Замечание* 1.** Если $\Phi(+\infty) = +\infty$, то условие (4) может быть опущено.

***Замечание* 2.** Лемма 1 является аналогом теоремы Халла – Люксембурга [12, 13].

***Следствие* 1.** *Если в лемме* 1 $\varphi_1(x) \equiv x$, $\varphi_2(x) \equiv x^{1+\alpha}$, $\alpha \in \,]0, +\infty[$, *то*

$$\Phi^{-1}(x) \equiv \left[\left(1+c_0^{-\alpha}\right)\exp(-\alpha x) - 1\right]^{-\alpha^{-1}}, \quad \Phi(+\infty) = \alpha^{-1}\ln\left(1+c_0^{-\alpha}\right) < +\infty.$$

Доказательство. Имеем

$$y = \Phi(t) = \int_{c_0}^{t}\frac{dx}{x+x^{1+\alpha}} = \int_{c_0}^{t}\frac{x^{-1-\alpha}\,dx}{x^{-\alpha}+1} = -\frac{1}{\alpha}\int_{c_0^{-\alpha}}^{t^{-\alpha}}\frac{dv}{1+v} = -\alpha^{-1}\ln\left|\frac{1+t^{-\alpha}}{1+c_0^{-\alpha}}\right|,$$

т. е. $t = \left[\left(1+c_0^{-\alpha}\right)\exp(-\alpha y) - 1\right]^{-\alpha^{-1}}$ и $\Phi(+\infty) = \alpha^{-1}\ln\left(1+c_0^{-\alpha}\right)$.

Теорема 1. *Если р. у.* (3) *таково, что*

$$p_n \ne -1, \ \prod_{k=1}^{n}|1+p_k| \le A, \ A \in \boldsymbol{R}_+, \ n \in N, \ B \equiv \sum_{n=1}^{+\infty}\left(|q_n| + A^{\alpha}g_n\right)|1+p_n|^{-1} < +\infty,$$

то оно имеет свойство GSt при $n \to +\infty$.

Доказательство. Справедлива следующая оценка:

$$\prod_{s=1}^{n}|1+p_s|^{-1}|z_n| \le |z_0| + \sum_{k=1}^{n}|q_k||1+p_k|^{-1}\prod_{s=1}^{k-1}|1+p_s|^{-1}|z_{k-1}| +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n}g_k|1+p_k|^{-1}\prod_{s=1}^{k-1}|1+p_s|^{\alpha}\left(\prod_{s=1}^{k-1}|1+p_s|^{-1}|z_{k-1}|\right)^{1+\alpha}. \tag{7}$$

При $u_0 \equiv |z_0|$, $u_n \equiv \prod_{s=1}^{n}|1+p_s|^{-1}|z_n|$, $n \in N$, из (7) вытекает

$$u_n \le u_0 + \sum_{k=1}^{n}|q_k||1+p_k|^{-1}u_{k-1} + \sum_{k=1}^{n}g_k|1+p_k|^{-1}\prod_{s=1}^{k-1}|1+p_s|^{\alpha}u_{k-1}^{1+\alpha}. \tag{8}$$

Из (8), леммы 1 и следствия 1 получаем

$$u_n \le \left\{\left(1+u_0^{-\alpha}\right)\exp\left[-\alpha\sum_{k=1}^{n}\left(|q_k| + g_k\prod_{s=1}^{k-1}|1+p_s|^{\alpha}\right)|1+p_k|^{-1}\right] - 1\right\}^{-\alpha^{-1}}, \ n \in N,$$

т. е.

$$|z_n| \le |z_0|\prod_{s=1}^{n}|1+p_s|\exp\left[\sum_{k=1}^{n}\left(|q_k| + g_k\prod_{s=1}^{k-1}|1+p_s|^{\alpha}\right)|1+p_k|^{-1}\right] \times$$

$$\times\left\{1 - |z_0|^{\alpha}\left[\exp\left(\alpha\sum_{k=1}^{n}\left(|q_k| + g_k\prod_{s=1}^{k-1}|1+p_s|^{\alpha}\right)|1+p_k|^{-1}\right) - 1\right]\right\}^{-\alpha^{-1}} \le$$

$$\le |z_0|A\exp B\left\{1 - |z_0|^{\alpha}\left[\exp(\alpha B) - 1\right]\right\}^{-\alpha^{-1}}, \quad n \in N, \tag{9}$$

если

$$|z_0| < [\exp(\alpha B) - 1]^{-\alpha^{-1}}. \tag{10}$$

Из (10) следует

$$|z_0| < \left\{\exp\left(\alpha \sum_{k=1}^{n}\left(|q_k| + g_k \prod_{s=1}^{k-1}|1+p_s|^{\alpha}\right)|1+p_k|^{-1}\right) - 1\right\}^{-\alpha^{-1}}, \quad n \in N. \tag{11}$$

Условие (11) эквивалентно такому неравенству:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(|q_k| + g_k \prod_{s=1}^{k-1}|1+p_s|^{\alpha}\right)|1+p_k|^{-1} < \Phi(+\infty) = \alpha^{-1}\ln\left(1+|z_0|^{-\alpha}\right), \quad n \in N.$$

Тогда из (9) следует, что р. у. (1) имеет свойство GSt при $n \to +\infty$. Действительно, задавая произвольное $\varepsilon \in \,]0, 1[$ и полагая $|z_0| \le \delta_\varepsilon$, $\delta_\varepsilon \in$ $\in \left]0, \min\left\{\varepsilon, [\exp(\alpha B) - 1]^{-\alpha^{-1}}\right\}\right[$, продолжаем оценку (9):

$$|z_n| \le \delta_\varepsilon B\left\{1 - \delta_\varepsilon^{\alpha}[\exp(\alpha B) - 1]\right\}^{-\alpha^{-1}} < \varepsilon, \quad n \in N. \tag{12}$$

Из (12) получаем соотношение между δ_ε и ε: $\delta_\varepsilon < \varepsilon\left\{B + \varepsilon^{\alpha}[\exp(\alpha B) - 1]\right\}^{-\alpha^{-1}}$. Тогда для δ_ε, выбранного из промежутка

$$\left]0, \min\left\{\varepsilon, \varepsilon\left\{B + \varepsilon^{\alpha}[\exp(\alpha B) - 1]\right\}^{-\alpha^{-1}}, [\exp(\alpha B) - 1]^{-\alpha^{-1}}\right\}\right[,$$

всегда выполняется неравенство (12).

Теорема 2. *Если р. у.* (3) *таково, что*

$$1)\ p_n \ne -1,\ n \in N;\ 2)\ \prod_{n=1}^{+\infty}|1+p_n| = 0;\ 3)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\left(|q_n| + g_n\prod_{s=1}^{n-1}|1+p_s|^{\alpha}\right)|1+p_n|^{-1} < +\infty,$$

то оно имеет свойство $GAsSt$ *при* $n \to +\infty$.

Доказательство. Легко видеть, что все условия теоремы 1 выполнены. Тогда из первой части неравенства (9) следует $z_n = o(1)$, $n \to +\infty$.

Теорема 3. *Если р. у.* (3) *таково, что* $p_n \ne -1, n \in N$, *и*

$$1)\ \prod_{n=1}^{+\infty}|1+p_n| = +\infty, \quad 2)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\left(|q_n| + g_n\prod_{s=1}^{n-1}|1+p_s|^{\alpha}\right)|1+p_n|^{-1} < 1,$$

то оно имеет свойство $\overline{GSt}$ *при* $n \to +\infty$.

Доказательство. Предположим противное, т. е. р. у. (3) имеет свойство GSt при $n \to +\infty$. Тогда

$$z_n = \prod_{s=1}^{n}(1+p_s)\left\{z_0 + \sum_{k=1}^{n}\prod_{s=1}^{k-1}(1+p_s)^{-1}\left[q_k\overline{z_{k-1}} + G\left(k, z_{k-1}, \overline{z_{k-1}}\right)\right]\right\}, \quad n \in N, \tag{13}$$

и из условия 1 теоремы 3 и (13) вытекает, что р. у. (3) может иметь свойство GSt при $n \to +\infty$ только в случае, когда

$$z_0 + \sum_{k=1}^{+\infty}\prod_{s=1}^{k}(1+p_s)^{-1}\left[q_k\overline{z_{k-1}} + G\left(k, z_{k-1}, \overline{z_{k-1}}\right)\right] = 0,$$

т. е.

$$z_0 = -\sum_{k=1}^{+\infty}\prod_{s=1}^{k}(1+p_s)^{-1}[q_k\bar{z}_{k-1}+G(k, z_{k-1}, \bar{z}_{k-1})].$$

Тогда каждое решение $z = z_{n-1}$, $n \in N$, р. у. (3) имеет вид

$$z_n = -\prod_{s=1}^{n}(1+p_s)\sum_{k=1}^{+\infty}\prod_{s=1}^{k}(1+p_s)^{-1}\left[q_k\overline{z_{k-1}}+G\left(k, z_{k-1}, \overline{z_{k-1}}\right)\right], \quad n \in N. \tag{14}$$

Выполним замену переменных

$$u_0 = |z_0|, \quad u_n = \prod_{s=1}^{n}|1+p_s||z_n|, \quad n \in N. \tag{15}$$

Покажем, что р. у. относительно $u = u_n$, $n \in N$, имеет свойство $\overline{GSt}$ при $n \to \to +\infty$. Предположим противное. Из (14) относительно $u = u_n$, $n \in N$, получаем следующее неравенство:

$$u_n \le \sum_{k=n+1}^{+\infty}\left(|q_k|u_{k-1}+g_k\prod_{s=1}^{k-1}|1+p_s|^{\alpha}u_{k-1}^{1+\alpha}\right)|1+p_k|^{-1}, \quad n \in N, \tag{16}$$

и для любого сколь угодно малого $\varepsilon \in \,]0, 1[$ существует $\delta_\varepsilon \in \,]0, \varepsilon[$ такое, что любое решение $u = u_{n-1}$, $n \in N$, с начальным значением u_0, $u_0 \le \delta_\varepsilon$, имеет свойство $u_n < \varepsilon$, $n \in N$.

Поскольку $u_{n-1} < \varepsilon$ для всех $n \in N$, то существует $d \equiv \sup\limits_{n\in N} u_n$, $d \in \in \,]0, \varepsilon]$. В результате из (16) следует

$$u_n \le \sum_{k=n+1}^{+\infty}\left(|q_k|d+g_k\prod_{s=1}^{k-1}|1+p_s|^{\alpha}d^{1+\alpha}\right)|1+p_k|^{-1} \le$$

$$\le d\sum_{k=n+1}^{+\infty}\left(|q_k|+g_k\prod_{s=1}^{k-1}|1+p_s|^{\alpha}\right)|1+p_k|^{-1}, \quad n \in N. \tag{17}$$

Тогда из (17) получаем

$$d \le d\sum_{k=n+1}^{+\infty}\left(|q_k|+g_k\prod_{s=1}^{k-1}|1+p_s|^{\alpha}\right)|1+p_k|^{-1}. \tag{18}$$

Из (18) и условия $d > 0$ следует

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty}\left(|q_k|+g_k\prod_{s=1}^{k-1}|1+p_s|^{\alpha}\right)|1+p_k|^{-1} \ge 1. \tag{19}$$

Однако (19) противоречит условию 2 теоремы 3. Значит р. у. относительно $u = u_{n-1}$, $n \in N$, имеет свойство $\overline{GSt}$ при $n \to +\infty$. Тогда из (15) и из условия 1 теоремы 3 вытекает свойство $\overline{GSt}$ при $n \to +\infty$ р. у. (3).

По аналогии с теоремами $1-3$ можно получить следующие результаты.

Теорема 4. *Если р. у.* (3) *таково, что*

$$p_n \equiv -1, \; q_n \ne 0, \; \prod_{k=1}^{n}|q_k| \le A, \; A \in \,]0, +\infty[\,, \; n \in N, \; \sum_{n=1}^{+\infty}g_n\prod_{s=1}^{n-1}|q_s|^{\alpha-1} < +\infty,$$

то оно имеет свойство GSt *при* $n \to +\infty$.

Теорема 5. *Если р. у.* (3) *таково, что*

$$p_n \equiv -1,\ q_n \neq 0,\ n \in N,\ \prod_{n=1}^{+\infty} |q_n| = 0,\ \sum_{n=1}^{+\infty} g_n \prod_{s=1}^{n-1} |q_s|^{\alpha-1} < +\infty,$$

то оно имеет свойство GAsSt при $n \to +\infty$.

Теорема 6. *Если р. у.* (3) *таково, что*

$$p_n \equiv -1,\ q_n \neq 0,\ n \in N,\ \prod_{n=1}^{+\infty} |q_n| = +\infty,\ \sum_{n=1}^{+\infty} g_n \prod_{s=1}^{n-1} |q_s|^{\alpha-1} < 1,$$

то оно имеет свойство $\overline{GSt}$ *при* $n \to +\infty$.

Теорема 7. *Если р. у.* (3) *таково, что*

$$p_n \equiv -1,\ q_n \equiv 0,\ \prod_{k=1}^{n} g_k^{(1+\alpha)^{n-k}} \leq A,\ A \in\ ]0, +\infty[\,,\ n \in N,$$

то оно имеет свойство GSt при $n \to +\infty$.

Теорема 8. *Если р. у.* (3) *таково, что*

$$p_n \equiv -1,\ q_n \equiv 0,\ n \in N,\ \prod_{k=1}^{n} g_k^{(1+\alpha)^{n-k}} = o(1),\ n \to +\infty,$$

то оно имеет свойство GAsSt при $n \to +\infty$.

Теорема 9. *Если р. у.* (3) *таково, что*

$$p_n \equiv -1,\ q_n \equiv 0,\ \prod_{k=1}^{n} g_k^{(1+\alpha)^{n-k}} \leq d_0,\ d_0 \in\ ]0, 1[\,,\ n \in N,$$

то оно имеет свойство $\overline{GSt}$ *при* $n \to +\infty$.

3. Вспомогательные результаты. Укажем преобразования, приводящие р. у. (1) к р. у. (3).

Лемма 2. *Замена переменных*

$$y_n = x_{n-1} + \overline{x_{n-1}}, \quad \Delta y_{n-1} = \left(\overline{\Lambda_n} - 1\right) x_{n-1} - (\Lambda_n - 1)\overline{x_{n-1}}, \quad n \in N, \tag{20}$$

преобразует р. у. (1) *к р. у. вида*

$$\Delta x_{n-1} = \left(\Lambda_{n+1} - 1 - \Lambda_{n+1} \frac{2\Delta\lambda_n - \Delta\overline{\Lambda_n}}{\Lambda_{n+1} - \overline{\Lambda_{n+1}}}\right) x_{n-1} - \Lambda_{n+1} \frac{2\Delta\lambda_n - \Delta\Lambda_n}{\Lambda_{n+1} - \overline{\Lambda_{n+1}}} \overline{x_{n-1}} + \Phi_n, \tag{21}$$

где

$$|\Phi_n| \leq 6^{1+\alpha} \frac{L_n}{\lambda_{n+1}\sqrt{1 - \lambda_{n+1}}} |x_{n-1}|^{1+\alpha}, \quad n \in N.$$

Доказательство. Из (20) получаем

$$x_{n-1} = \left(\Lambda_n - \overline{\Lambda_n}\right)[\Delta y_{n-1} + (\Lambda_n - 1) y_n],$$

$$\overline{x_{n-1}} = -\left(\Lambda_n - \overline{\Lambda_n}\right)^{-1}\left[\Delta y_{n-1} + \left(\overline{\Lambda_n} - 1\right) y_n\right], \quad n \in N. \tag{22}$$

Применяя к (22) разностный оператор Δ, получаем систему р. у. относительно переменных x_{n-1}, $\overline{x_{n-1}}$. Из этой системы вытекает р. у. (21).

***Замечание* 3.** Из (20) следует

$$y_n^2 + (\Delta y_{n-1})^2 = \left[1 + \left(\overline{\Lambda_n} - 1\right)^2\right] x_{n-1}^2 + 2\left[1 + |\Lambda_n - 1|^2\right] |x_{n-1}|^2 +$$

$$+ \left[1+(\Lambda_n-1)^2\right]\overline{x_{n-1}}^2 = \left[\sqrt{1+(\Lambda_n-1)^2}\,x_{n-1} + \sqrt{1+(\overline{\Lambda_n}-1)^2}\,\overline{x_{n-1}}\right]^2 +$$

$$+ 2\left[1+|\Lambda_n-1|^2 - \left|1+(\Lambda_n-1)^2\right|\right]|x_{n-1}|^2.$$

Отсюда получаем два неравенства:

$$y_n^2 + (\Delta y_{n-1})^2 \le 16|x_{n-1}|^2, \quad n \in N \quad \text{(для свойств } GSt,\ GAsSt \text{ р. у. (1))}$$

и

$$y_n^2 + (\Delta y_{n-1})^2 \ge 2\left[1+|\Lambda_n-1|^2 - \left|1+(\Lambda_n-1)^2\right|\right]|x_{n-1}|^2 \ge \frac{4}{5}(1-\lambda_n^2)|x_{n-1}|^2$$

(для свойства $\overline{GSt}$).

В теоремах $1-3$ используются условия малости коэффициента при $\overline{x_{n-1}}$. Нужную малость этого коэффициента в р. у. (21) помогает получить следующая лемма.

Лемма 3. *Если*

$$|\Delta\lambda_n|\left(1-\lambda_{n+1}^2\right)^{-\frac{3}{2}} < 2, \quad n \in N, \tag{23}$$

то замена переменных

$$x_{n-1} = z_{n-1} + a_n\overline{z_{n-1}}, \quad n \in N, \tag{24}$$

где $a_n \equiv \Lambda_{n+1}\dfrac{2\Delta\lambda_n - \Delta\Lambda_n}{(\Lambda_{n+1}-\overline{\Lambda_{n+1}})^2}$, $n \in N$, *приводит р. у.* (21) *к р. у.* (3), *у которого*

$$p_n \equiv \left(1-|a_{n+1}|^2\right)^{-1}\left[\Lambda_{n+1} - 1 - \frac{2\Delta\lambda_n - \Delta\overline{\Lambda_n}}{\Lambda_{n+1}-\overline{\Lambda_{n+1}}}\Lambda_{n+1} - 2\frac{|2\Delta\lambda_n - \Delta\Lambda_n|^2}{(\Lambda_{n+1}-\overline{\Lambda_{n+1}})^3} -\right.$$

$$- \Lambda_{n+1}^2\frac{(2\Delta\lambda_n-\Delta\Lambda_n)^2}{(\Lambda_{n+1}-\overline{\Lambda_{n+1}})^4}\left(\overline{\Lambda_{n+1}} - 1 + \frac{2\Delta\lambda_n-\Delta\Lambda_n}{\Lambda_{n+1}-\overline{\Lambda_{n+1}}}\overline{\Lambda_{n+1}}\right) +$$

$$\left. + \frac{2\Delta\lambda_n-\Delta\Lambda_n}{\Lambda_{n+1}-\overline{\Lambda_{n+1}}}\Lambda_{n+1}\Delta a_n + \Lambda_{n+2}\overline{\Lambda_{n+1}}\frac{2\Delta\lambda_{n+1}-\Delta\Lambda_{n+1}}{(\Lambda_{n+2}-\overline{\Lambda_{n+2}})^2}\left(1+\frac{2\Delta\lambda_n-\Delta\Lambda_n}{\Lambda_{n+1}-\overline{\Lambda_{n+1}}}\right)\Delta\overline{a_n}\right],$$

$$q_n \equiv -\left(1-|a_{n+1}|^2\right)^{-1}\left\{\frac{|2\Delta\lambda_n-\Delta\Lambda_n|^2\Lambda_{n+1}^2 + (2\Delta\lambda_n-\Delta\Lambda_n)^2}{(\Lambda_{n+1}-\overline{\Lambda_{n+1}})^3} -\right.$$

$$- \Lambda_{n+1}\frac{|2\Delta\lambda_n-\Delta\Lambda_n|^2(2\Delta\lambda_n-\Delta\Lambda_n)}{(\Lambda_{n+1}-\overline{\Lambda_{n+1}})^5} + \left[\Lambda_{n+1}+\Lambda_{n+2}\overline{\Lambda_{n+1}}\ \times\right.$$

$$\left.\left.\times\ \frac{2\Delta\lambda_{n+1}-\Delta\Lambda_{n+1}}{(\Lambda_{n+2}-\overline{\Lambda_{n+2}})^2}\left(1+\frac{2\Delta\lambda_n-\Delta\Lambda_n}{\Lambda_{n+1}-\overline{\Lambda_{n+1}}}\right)\right]\Delta a_n\right\},$$

$$g_n \equiv 12^{1+\alpha}(1-|a_{n+1}|)^{-1}\frac{L_n}{\lambda_{n+1}\sqrt{1-\lambda_{n+1}}}, \quad n \in N.$$

Доказательство. Покажем только, что оценка (23) вытекает из условия существования обратного к (24) преобразования, т. е. из условия $|a_n| < 1$, $n \in \in N$. Итак,

$$|a_n|^2 = |\Lambda_{n+1}|^2 \frac{|2\Delta\lambda_n - \Delta\Lambda_n|^2}{|\Lambda_{n+1} - \overline{\Lambda_{n+1}}|^4} = \frac{1}{16} \frac{\left|\Delta\lambda_n - i\left[\sqrt{1-\lambda_{n+1}^2} - \sqrt{1-\lambda_n^2}\right]\right|^2}{\left(1-\lambda_{n+1}^2\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{16} \frac{(\Delta\lambda_n)^2 + \dfrac{(\Delta\lambda_n)^2(\lambda_n+\lambda_{n+1})^2}{\left[\sqrt{1-\lambda_{n+1}^2}+\sqrt{1-\lambda_n^2}\right]^2}}{\left(1-\lambda_{n+1}^2\right)^2} \le$$

$$\le \frac{1}{16}(\Delta\lambda_n)^2 \frac{\left(\sqrt{1-\lambda_{n+1}^2}+\sqrt{1-\lambda_n^2}\right)^2 + (\lambda_n+\lambda_{n+1})^2}{\left(1-\lambda_{n+1}^2\right)^2} \equiv \Lambda^*.$$

Поскольку для всех $x, y \in [-1, 1]$ верно неравенство $\left[\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}\right]^2 + (x+y)^2 \le 4$, то для Λ^* имеет место оценка

$$\Lambda^* \le \frac{1}{16}(\Delta\lambda_n)^2 \frac{4}{\left(1-\lambda_{n+1}^2\right)^3} = \frac{1}{4}\frac{(\Delta\lambda_n)^2}{\left(1-\lambda_{n+1}^2\right)^3} < 1.$$

***Замечание* 4.** Предположим, что для р. у. (1) выполняются, например, условия

$$\frac{\Delta\lambda_n}{\left(1-\lambda_n^2\right)^{3/2}} = o(1), \ n \to +\infty, \ \frac{\Delta^2\lambda_n}{\Delta\lambda_n} = o(1), \ n \to +\infty,$$

$$\sup_{n\in N} \frac{|\Delta\lambda_n|}{\left(1-\lambda_{n+1}^2\right)^{3/2}} = \lambda_0 < 1, \quad \sup_{n\in N}\left|\frac{\Delta^2\lambda_n}{\Delta\lambda_{n+1}}\right| \le \Lambda_0 < +\infty,$$

$$\frac{1}{4}\frac{\lambda_0^2}{1-\lambda_0}\left[5+12\Lambda_0+\left(61+\frac{41}{2}\Lambda_0\right)\lambda_0+\left(20+\frac{11}{2}\Lambda_0\right)\lambda_0^2\right] < 1. \tag{25}$$

Тогда

$$\left|\frac{2\Delta\lambda_n - \Delta\Lambda_n}{\Lambda_{n+1}-\overline{\Lambda_{n+1}}}\right| = \left|\frac{2\Delta\lambda_n - \Delta\overline{\Lambda_n}}{\Lambda_{n+1}-\overline{\Lambda_{n+1}}}\right| \le |a_n|\,|\Lambda_{n+1}-\overline{\Lambda_{n+1}}| \le \frac{1}{2}\lambda_0\, 2\sqrt{1-\lambda_{n+1}^2} \le \lambda_0 < 1,$$

$$\frac{\Delta\lambda_n}{1\pm\lambda_n} = \frac{\Delta\lambda_n}{\left(1-\lambda_n^2\right)^{3/2}}(1\mp\lambda_n)\left(1-\lambda_n^2\right)^{1/2} = o(1), \quad n \to +\infty,$$

$$a_n \approx \frac{\Delta\lambda_n}{(1-\lambda_n)^{3/2}}, \quad n \to +\infty, \qquad p_n \ne -1, \quad n \in N,$$

и справедливы оценки для $|1+p_n|$, q_n и g_n из леммы 3:

$$|1+p_n| = \left(1-|a_{n+1}|^2\right)^{-1}\left|1-\frac{2\Delta\lambda_n - \Delta\overline{\Lambda_n}}{\Lambda_{n+1}-\overline{\Lambda_{n+1}}}\right||1+f_n|,$$

$$|f_n| \le \frac{1}{4}\frac{\lambda_0^2}{1-\lambda_0}\left[5+12\Lambda_0+\left(61+\frac{41}{2}\Lambda_0\right)\lambda_0+\left(20+\frac{11}{2}\Lambda_0\right)\lambda_0^2\right] < 1, \quad n \in N,$$

$$f_n = O\left[\frac{|\Delta\lambda_n|^2}{\left(1-\lambda_n^2\right)^3}\right], \quad n \to +\infty, \qquad g_n \approx \frac{L_n}{\lambda_n\sqrt{1-\lambda_n}}, \quad n \to +\infty,$$

$$q_n = O\left\{\frac{|\Delta\lambda_n|}{\left(1-\lambda_n^2\right)^{3/2}}\left[\frac{|\Delta^2\lambda_n|}{|\Delta\lambda_n|}+\frac{|\Delta\lambda_n|}{1-\lambda_n^2}+\frac{(\Delta\lambda_n)^2}{\left(1-\lambda_n^2\right)^{5/2}}\right]\right\}, \quad n\to+\infty,$$

Пример. Пусть в р. у. (1) $\lambda_n \equiv 1-1/n^{\sigma}$, $0<\sigma<1$, $n\in N$, $\lim\limits_{n\to+\infty} L_{n+1}/L_n < < 1$. Для σ получим условие, при котором применима, например, теорема 2. Для этого проверим выполнение условий замечания 4. Покажем сначала, что $h(x)\equiv ((1+x)^{\sigma}-1)/x\le\sigma$ для всех $x\in\,]0,1]$. В самом деле, $h(+0)=\sigma$, $h'(x)=(1+x)^{\sigma-1}/x^2 g(x)$, где $g(x)\equiv(1+x)^{\sigma-1}-(1-\sigma)x-1$, и выполняется неравенство $g(x)\le 0$ для всех $x\in\,]0,1]$. Имеем $g(+0)=0$, $g'(x)=-(1-\sigma)[1-1/(1+x)^{\sigma}]\le 0$, т. е. функция $y=g(x)$ на промежутке $]0,1]$ не возрастает. Поскольку $g(+0)=0$, то $g(x)\le 0$, для всех $x\in\,]0,1]$. Тогда и $h'(x)\le 0$ для всех $x\in\,]0,1]$, т. е. функция $y=h(x)$ — невозрастающая для $x\in\,]0,1]$. Поскольку $h(+0)=\sigma$, то и $h(x)\le\sigma$, $x\in\,]0,1]$. Далее для $n\in \in N$ имеем

$$\Delta\lambda_n = -\frac{1}{(n+1)^{\sigma}}+\frac{1}{n^{\sigma}} = \frac{1}{n^{\sigma+1}}\frac{(1+1/n)^{\sigma}-1}{1/n}\frac{1}{(1+1/n)^{\sigma}} \le \frac{1}{n^{\sigma+1}}\sigma\cdot 1 = \frac{\sigma}{n^{\sigma+1}},$$

$$\frac{\Delta\lambda_n}{\left(1-\lambda_{n+1}^2\right)^{3/2}} \le \frac{\sigma}{n^{\sigma+1}}\frac{1}{\frac{1}{(n+1)^{3\sigma/2}}\left[2-\frac{1}{(n+1)^{\sigma}}\right]^{3/2}} \le \frac{\sigma}{n^{1-\sigma/2}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{3\sigma/2}\frac{1}{2\sqrt{2}} \le$$

$$\le \frac{1}{2\sqrt{2}}2^{3\sigma/2}\frac{\sigma}{1} \le \frac{1}{2\sqrt{2}}2^{3/2}\sigma = \sigma,$$

т. е. $\lambda_0\equiv\sigma<1$, и $\dfrac{\Delta\lambda_n}{\left(1-\lambda_n^2\right)^{3/2}} \approx \dfrac{\sigma}{n^{1-\sigma/2}}$, $n\to+\infty$,

$$\frac{\Delta^2\lambda_n}{\Delta\lambda_{n+1}} = \frac{-(n+2)^{-\sigma}+2(n+1)^{-\sigma}-n^{-\sigma}}{-(n+2)^{-\sigma}+(n+1)^{-\sigma}} = -\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-\sigma}-2+\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{-\sigma}}{1-\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-\sigma}} =$$

$$= -\frac{2}{\frac{h_1(n)}{h_2(n)}-1},$$

где

$$h_1(n) \equiv \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\sigma(\sigma+1)\cdots(\sigma+2k-2)}{(2k-1)!}\frac{1}{(n+1)^{2k-1}},$$

$$h_2(n) \equiv \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\sigma(\sigma+1)\cdots(\sigma+2k-1)}{(2k)!}\frac{1}{(n+1)^{2k}}.$$

Поскольку $0<1-(1-\sigma)/(2k)<1$ для всех $k\in N$, то

$$h_2(n) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\sigma(\sigma+1)\cdots(\sigma+2k-2)}{(2k-1)!}\left(1-\frac{1-\sigma}{2k}\right)\frac{1}{(n+1)^{2k-1}} < \frac{1}{n+1}h_1(n).$$

Тогда $h_2(n)/h_1(n) > n+1$, т.е. $h_2(n)/h_1(n) - 1 > n$,

$$\frac{1}{\dfrac{h_2(n)}{h_1(n)} - 1} < \frac{1}{n}, \quad n \in N.$$

Поэтому

$$\left|\frac{\Delta^2\lambda_n}{\Delta\lambda_{n+1}}\right| \le 2\frac{1}{n} \le 2, \text{ т.е. } \Lambda_0 = 2, \text{ и } \left|\frac{\Delta^2\lambda_n}{\Delta\lambda_{n+1}}\right| \approx \frac{\sigma+1}{n}, \quad n \to +\infty.$$

Выберем теперь σ так, чтобы выполнялось неравенство (25), в котором $\Lambda_0 = 2$, $\lambda_0 = \sigma$. В результате относительно σ получаем неравенство

$$g(\sigma) \equiv 31\sigma^4 + 102\sigma^3 + 29\sigma^2 + 4\sigma - 4 < 0, \qquad 0 < \sigma < 1. \tag{26}$$

Легко видеть, что функция $y = g(\sigma)$ на промежутке $]0, 1[$ имеет один корень, так как на этом промежутке она непрерывна, монотонно возрастает $(g'(\sigma) \ge 0)$ и $g(+0) = -4 < 0$, $g(1-0) = 162 > 0$.

Обозначим этот единственный на промежутке $]0, 1[$ корень уравнения (26) через σ_0, причем $0{,}23607 < \sigma_0 < 0{,}23611$. Таким образом, σ должно удовлетворять неравенству $0 < \sigma < \sigma_0 < 1$. Это условие обеспечивает выполнение условия 1 теоремы 2. Кроме того,

$$\left|1 - \frac{2\Delta\lambda_n - \Delta\overline{\Lambda_n}}{\Lambda_{n+1} - \overline{\Lambda_{n+1}}}\right| \approx 1 - \frac{1}{2}\frac{\lambda_n\Delta\lambda_n}{1-\lambda_n^2} - \frac{1}{8}(\Delta\lambda_n)^2, \quad n \to +\infty.$$

Тогда

$$|1+p_n| \approx \left[1 - \frac{(\Delta\lambda_n)^2}{\left(1-\lambda_n^2\right)^3}\right]\left[1 - \frac{1}{2}\frac{\lambda_n\Delta\lambda_n}{1-\lambda_n^2} - \frac{1}{8}(\Delta\lambda_n)^2\right](1+|f_n|), \quad n \to +\infty.$$

Поскольку условие 2 теоремы 2 эквивалентно условию $\sum_{n=1}^{+\infty}\ln|1+p_n| = -\infty$, то

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\ln|1+p_n| = -\sum_{n=1}^{+\infty}\ln\left[1 - \frac{(\Delta\lambda_n)^2}{\left(1-\lambda_n^2\right)^3}\right] + \sum_{n=1}^{+\infty}\ln\left[1 - \frac{1}{2}\frac{\lambda_n\Delta\lambda_n}{1-\lambda_n^2} - \frac{1}{8}(\Delta\lambda_n)^2\right] + \sum_{n=1}^{+\infty}\ln|1+f_n| \approx$$

$$\approx \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(\Delta\lambda_n)^2}{\left(1-\lambda_n^2\right)^3} - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{\lambda_n\Delta\lambda_n}{1-\lambda_n^2} + \frac{1}{4}(\Delta\lambda_n)^2\right] + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(2\operatorname{Re} f_n + |f_n|^2\right) \approx$$

$$\approx \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sigma^2}{n^{1+1-\sigma}} - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{\sigma}{n} + \frac{1}{4}\frac{\sigma^2}{n^{2+2\sigma}}\right) + \sum_{n=1}^{+\infty}\operatorname{Re} f_n + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}|f_n|^2 \equiv S_1 + S_2 + S_3 + S_4.$$

Легко видеть, что $S_1 < +\infty$, $S_2 = -\infty$, а

$$|S_3| + S_4 \le \sum_{n=1}^{+\infty}|f_n|\left(1 + \frac{1}{2}|f_n|\right) \approx \sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{(\Delta\lambda_n)^2}{\left(1-\lambda_n^2\right)^3} + \left|\frac{\Delta^2\lambda_n}{\Delta\lambda_n}\right|\frac{|\Delta\lambda_n|}{\left(1-\lambda_n^2\right)^{3/2}}\right] \approx$$

$$\approx \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{\sigma^2}{n^{1+1-\sigma}} + \frac{\sigma+1}{n} + \frac{\sigma}{n^{1-\sigma/2}}\right) < +\infty.$$

Таким образом, условие 2 теоремы 2 выполняется. Далее имеем

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |q_n||1+p_n|^{-1} \approx \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\sigma^2}{n^{1+1-\sigma}} + \frac{\sigma^2+\sigma}{n^{1+1-\sigma/2}} \right) < +\infty.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} g_n \prod_{s=1}^{n-1} |1+p_s||1+p_n|^{-1}$ мажорируется рядом

$$12^{1+\alpha} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{L_n}{\lambda_{n+1}\sqrt{1-\lambda_{n+1}}} \prod_{s=1}^{n-1} |1+p_s||1+p_n|^{-1},$$

к которому применим признак Даламбера:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\dfrac{L_{n+1}}{\lambda_{n+2}\sqrt{1-\lambda_{n+2}}} \prod_{s=1}^{n} |1+p_s||1+p_{n+1}|^{-1}}{\dfrac{L_n}{\lambda_{n+1}\sqrt{1-\lambda_{n+1}}} \prod_{s=1}^{n-1} |1+p_s||1+p_n|^{-1}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{L_{n+1}}{L_n} \frac{L_{n+2}}{L_{n+1}} \sqrt{1 - \frac{\Delta\lambda_{n+1}}{1-\lambda_{n+2}}} \frac{|1+p_n|^2}{|1+p_{n+1}|^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{L_{n+1}}{L_n} < 1,$$

т. е. условие 3 теоремы 2 также выполняется. Значит, если в р. у. (1) $\lambda_n = 1 - 1/n^{\sigma}$, $0 < \sigma < \sigma_0$, $0{,}23163 < \sigma_0 < 0{,}23164$, $n \in N$, $\lim_{n\to+\infty} L_{n+1}/L_n < 1$, то можно утверждать, что р. у. (1) имеет свойство $GAsSt$ при $n \to +\infty$.

1. *Perron O.* Math. Zeit. – 1959. – № 1. – S. 16 – 24.
2. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения и другие работы по теории устойчивости и теории обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Изд-во АН СССР, 1956. – 473 с.
3. *Демидович Б. П.* Об асимптотическом поведении решений конечно-разностных уравнений // Дифференц. уравнения. – 1974. – **10**, № 12. – С. 2267 – 2278.
4. *Демидович Б. П.* Об асимптотическом поведении решений конечно-разностных уравнений // Там же. – 1975. – **11**, № 6. – С. 1091 – 1107.
5. *Мартынюк Д. И.* Лекции по качественной теории разностных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1972. – 246 с.
6. *Коваль П. И.* Об устойчивости решений систем линейных разностных уравнений // Укр. мат. журн. – 1957. – **9**, № 2. – С. 141 – 154.
7. *Ведь Ю. А., Головина В. Г.* Об асимптотике решений разностных уравнений // Изв. вузов. Математика. – 1973. – № 11. – С. 31 – 42.
8. *Шиманова С. Н., Трусов А. Ф.* Критерий асимптотической устойчивости линейных разностных систем // Дифференц. уравнения. – 1984. – **20**, № 10. – С. 1827 – 1829.
9. *Замковая Л. Д., Крюков Б. И.* Об устойчивости нелинейных дифференциальных и конечно-разностных уравнений // Там же. – 1977. – **13**, № 4. – С. 756 – 757.
10. *Козеева Н. И., Шиманова С. Н.* Теоремы о критических случаях систем разностных уравнений // Там же. – 1976. – **12**, № 2. – С. 234 – 240.
11. *Козеева Н. И., Шиманова С. Н.* Исследование устойчивости систем разностных уравнений в критическом случае двойного единичного корня // Изв. вузов. Математика. – 1977. – № 12. – С. 23 – 28.
12. *Hull T. E., Luxsemburg W. F. J.* Numerical methods and existence theorems for ordinary differential equations // Numer. Math. – 1960. – **2**. – P. 30 – 41.
13. *Мартынюк А. А., Лакшмикантам В., Лила С.* Устойчивость движения: метод интегральных неравенств. – Киев: Наук. думка, 1989. – 272 с.

Получено 11.09.97,
после доработки — 26.02.98