УДК 517.956

А. С. Лавренюк (Львів. нац. ун-т)

СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНА СПЕКТРАЛЬНА ЗАДАЧА ДЛЯ БІГАРМОНІЧНОГО ОПЕРАТОРА З УМОВАМИ НЕЙМАНА

We study the mathematical model of a composite plate which consists of two components with similar elastic properties but different distributions of density. The space of domain occupied by one of the components is infinitely small as $\varepsilon \to 0$. We investigate the asymptotic behavior of eigenvalues and eigen-functions of the boundary-value problem for biharmonic operator with Neumann conditions exhibited as $\varepsilon \to 0$. We describe four different cases of the limiting behavior of spectrum depending on the ratio of densities of medium components. In particular, we describe the so-called effect of E. Sances-Palencia local vibrations: A vibrating system has a countable series of fundamental frequencies infinitely small as $\varepsilon \to 0$ and associated with proper forms of vibrations localized in the domain of density perturbation.

Вивчено математичну модель композитної пластини, яка складається з двох компонент, що мають подібні пружні властивості, але відрізняються розподілом густини. Площа області, яку займає одна з компонент, є безмежно малою при $\varepsilon \to 0$. Досліджується асимптотична поведінка при $\varepsilon \to 0$ власних значень і власних функцій крайової задачі для бігармонічного оператора з умовами Неймана. Описано чотири різні випадки граничної поведінки спектра в залежності від співвідношення густин компонент середовища. Зокрема, описано так званий ефект локальних коливань Е. Санчес-Паленсія: коливна система має зліченну серію нескінченно малих при $\varepsilon \to 0$ власних частот, яким відповідають власні форми коливань, локалізовані в області збурення густини.

Вступ. В одному з розділів теорії сильно неоднорідних середовищ вивчаються динамічні та спектральні властивості коливних систем із сильно неоднорідними розподілами густини. На противагу класичним моделям з приєднаними масами ([1], гл. IV) композитні коливні системи мають деякі нові властивості.

В [2] вперше, як нам відомо, було описано явище локальних коливань, а саме доведено існування серії безмежно малих при $\varepsilon \to 0$ власних частот та відповідних високочастотних власних коливань, зосереджених в околі збурення густини, які швидко згасають поза цим околом. О. А. Олейнік [3] запропонувала нову математичну модель, в рамках якої такий ефект було описано для багатьох композитних систем [4–9].

В статті вивчено поведінку власних значень та власних функцій композитної пластини з вільним краєм, густина якої сингулярно збурена в околі точки. Наявність в задачі нульового власного значення змусила змінити методику дослідження в порівнянні з аналогічною задачею з умовами Діріхле [6]. Подібна задача для системи теорії пружності з крайовими умовами Неймана вивчалась С. А. Назаровим [10].

1. Формулювання задачі. Нехай Ω і ω — обмежені області в $\mathbb{R}^2$ з гладкою межею і містять початок координат. Розглянемо задачу на власні значення:

$$\Delta^2 u_\varepsilon(x) - \lambda_\varepsilon \rho_\varepsilon(m, x)\, u_\varepsilon(x) = 0 \quad \text{в } \Omega, \tag{1}$$

$$\frac{\partial \Delta u_\varepsilon}{\partial n} - (1-\sigma)\frac{\partial}{\partial l}\left[n_{x_1} n_{x_2}\left(\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x_2^2}\right) + \left(n_{x_2}^2 - n_{x_1}^2\right)\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x_1 \partial x_2}\right] = 0, \tag{2}$$

$$\Delta u_\varepsilon + (1-\sigma)\left[2 n_{x_1} n_{x_2} \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x_1 \partial x_2} - n_{x_2}^2 \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x_1^2} - n_{x_1}^2 \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x_2^2}\right] = 0 \quad \text{на } \partial\Omega, \tag{3}$$

де $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2}$, λ – спектральний параметр, σ – коефіцієнт Пуассона, $-1 < \sigma \le 1/2$; $n = (n_{x_1}, n_{x_2})$ — вектор зовнішньої нормалі до $\partial\Omega$, l — дотичний вектор до межі такий, що пара (n, l) задає ту ж орієнтацію, що і (x_1, x_2). Тут

$\rho_\varepsilon(m, x) = p(x) + \varepsilon^{-m} q(x/\varepsilon)$, де функції p, q — вимірні обмежені на Ω і ω відповідно. Крім цього, $p(x) > 0$ в $\overline{\Omega}$; $q(\xi) > 0$, $\xi \in \overline{\omega}$ і $q(\xi) = 0$, $\xi \notin \overline{\omega}$, де $\xi = x/\varepsilon$. Надалі умови (2), (3) позначатимемо через $\mathcal{N} u_\varepsilon = 0$.

Задача (1) – (3) має нульове власне значення, якому відповідає тривимірний власний підпростір, породжений функціями $1, x_1, x_2$. Надалі вивчатимемо ненульові власні значення. Перетворимо рівняння (1), ввівши новий спектральний параметр $\mu_\varepsilon = \lambda_\varepsilon + 1$. Задача (1) – (3) набере вигляду

$$\Delta^2 u_\varepsilon + \rho_\varepsilon(m, x) u_\varepsilon = \mu_\varepsilon \rho_\varepsilon(m, x) u_\varepsilon \quad \text{в} \quad \Omega, \qquad \mathcal{N} u_\varepsilon = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega. \tag{4}$$

Введемо в просторі Соболєва $H^2(\Omega)$ $(= W_2^2(\Omega))$ скалярний добуток

$$(u, v) = \int_\Omega E_\sigma(u, v)\, dx + \int_\Omega p(x) u v\, dx$$

і норму $\| u \| = (u, u)^{1/2}$, де

$$E_\sigma(u, v) = u_{x_1 x_1} v_{x_1 x_1} + u_{x_2 x_2} v_{x_2 x_2} + \sigma(u_{x_1 x_1} v_{x_2 x_2} + u_{x_2 x_2} v_{x_1 x_1}) + 2(1 - \sigma) u_{x_1 x_2} v_{x_1 x_2}.$$

Форма E_σ є додатно означеною, якщо σ належить вказаному у формулюванні задачі проміжку. Введемо також білінійні форми на $H^2(\Omega)$:

$$a_\varepsilon(u, v) = \int_\Omega E_\sigma(u, v)\, dx + \int_\Omega \rho_\varepsilon u v\, dx; \qquad b_\varepsilon(u, v) = \int_\Omega \rho_\varepsilon u v\, dx.$$

Існує п'ять різних випадків асимптотичної поведінки при $\varepsilon \to 0$ власних значень λ_ε і власних функцій u_ε для значень параметра m: $m < 2$, $m = 2$, $2 < m < 4$, $m = 4$, $m > 4$.

Означення 1. *Число μ_ε і відмінну від нуля функцію $u_\varepsilon \in H^2(\Omega)$ будемо називати власним значенням і власною функцією задачі* (4), *якщо виконується тотожність*

$$a_\varepsilon(u_\varepsilon, \varphi) - \mu_\varepsilon b_\varepsilon(u_\varepsilon, \varphi) = 0, \qquad \varphi \in H^2(\Omega). \tag{5}$$

Нехай оператор $A_\varepsilon : H^2(\Omega) \to H^2(\Omega)$ розв'язує задачу

$$\Delta^2 v_\varepsilon + \rho_\varepsilon(m, x) v_\varepsilon = \rho_\varepsilon(m, x) f, \quad x \in \Omega, \qquad \mathcal{N} v_\varepsilon(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega,$$

тобто кожній функції f з простору $H^2(\Omega)$ ставиться у відповідність узагальнений розв'язок $v_\varepsilon = A_\varepsilon f$. Форма a_ε — симетрична і додатно означена, а вкладення $H^2(\Omega) \subset L_2(\Omega, \rho_\varepsilon)$ компактне, тому при кожному $\varepsilon > 0$ оператор A_ε є компактним, додатним, а також симетричним відносно скалярного добутку a_ε. Нехай μ_ε^i — власні значення, а u_ε — ортонормована послідовність власних функцій. Тотожності (5) відповідає зліченна множина власних значень:

$$1 < \mu_\varepsilon^1 \le \mu_\varepsilon^2 \le \ldots \le \mu_\varepsilon^n \le \ldots, \qquad \mu_\varepsilon^n \to \infty, \quad n \to \infty.$$

Кратність кожного μ_ε скінченна, а відповідні власні функції утворюють ортонормовану базу. Трикратне власне значення $\mu = 1$ вивчатися не буде.

Надалі буде використовуватись таке твердження.

Твердження 1. *Для довільної функції f з $H^2(\Omega)$ виконується*

$$\varepsilon^{-2} \int_{\omega_\varepsilon} q\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) | f(x) - f(0) |\, dx \le C \varepsilon |\ln \varepsilon|^{1/2} \| f \|,$$

де константа C не залежить від ε [6].

Означення 2 [11, с. 110]. *Нехай H — гільбертів простір, а M і N — його підпростори, P_M і P_N — відповідні ортопроектори. Розхилом між підпросторами M і N назвемо величину*

$$\Theta_H(M,N) = \| P_M - P_N \| = \sup_{\|u\|_H = 1} \| (P_M - P_N) u \|_H .$$

2. Поведінка власних значень та власних функцій у випадках $m < 2$, $m = 2$. Оскільки з апріорної оцінки маємо

$$\| u_\varepsilon \| \le C \| \rho_\varepsilon f \|_{L_2(\Omega)} \le C_1 + C_2 \varepsilon^{2-m} \| f \|,$$

то

$$\| A_\varepsilon \| \le C_1 + C_2 \varepsilon^{2-m},$$

тобто у випадку $m \le 2$ сім'я операторів $\{A_\varepsilon\}_{\varepsilon > 0}$ є рівномірно обмеженою. Введемо оператор $A_0 : H^2(\Omega) \to H^2(\Omega)$, що розв'язує граничну задачу

$$\Delta^2 v + p v = p f \quad \text{в} \quad \Omega, \qquad \mathcal{N} v = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega \tag{6}$$

і, очевидно, є компактним, обмеженим, симетричним та додатним.

Доведемо, що сім'я операторів $\{A_\varepsilon\}_{\varepsilon > 0}$ рівномірно збігається до A_0. Маємо

$$|(A_\varepsilon u, v) - (A_0 u, v)| \le \varepsilon^{-m} \left| \int\limits_{\omega_\varepsilon} q\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) A_\varepsilon u v \, dx - \int\limits_{\omega_\varepsilon} q\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) u v \, dx \right| \le C_2 \varepsilon^{2-m} \| u \| \, \| v \|,$$

звідки робимо висновок, що

$$\| A_\varepsilon - A_0 \| \le C \varepsilon^{2-m}.$$

Оператору A_0 відповідає задача на власні значення

$$\Delta^2 u + p u = \mu p u \quad \text{в} \quad \Omega, \qquad \mathcal{N} u = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega .$$

Введемо позначення $\lambda = \mu + 1$ і запишемо цю задачу так:

$$\Delta^2 u - \lambda p u = 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \qquad \mathcal{N} u = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega . \tag{7}$$

Теорема 1 ($m < 2$). *Нехай $\{\lambda_\varepsilon^{(k)}\}_{k=0}^\infty$ — послідовність власних значень задачі* (1) – (3), *а $\{\lambda^{(k)}\}_{k=0}^\infty$ — послідовність власних значень задачі* (7). *Тоді для $k = 1, 2, \ldots$ при $\varepsilon \to 0$ справджується оцінка*

$$\left| \lambda_\varepsilon^{(k)} - \lambda^{(k)} \right| \le C(k) \varepsilon^{2-m},$$

$$\Theta_{H^2}\left(V_\lambda(\varepsilon), V_\lambda \right) \le C \varepsilon^{2-m},$$

де λ — власне значення задачі (7) *кратності r, V_λ — підпростір, що відповідає власному значенню λ цієї задачі, а $V_\lambda(\varepsilon)$ — підпростір у $H^2(\Omega)$, породжений тими власними функціями задачі* (1) – (3), *для яких відповідні власні значення λ_ε прямують до λ при $\varepsilon \to 0$.*

Відмінністю випадку $m = 2$ від випадку $m < 2$ є інша гранична задача на знаходження головних членів асимптотики

$$\Delta^2 v + (p + q_0 \delta(x)) v = (p + q_0 \delta(x)) f, \quad x \in \Omega, \qquad \mathcal{N} v = 0, \quad x \in \partial\Omega . \tag{8}$$

Через $\delta(x)$ позначено функцію Дірака. Введемо оператор $A_1 : H^2 \to H^2$, який функції f з $(H^2)^*$ — простору функціоналів на H^2 — ставить у відповідність узагальнений розв'язок задачі (8).

Доведемо, що сім'я операторів $\{A_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ рівномірно збігається до A_1. При цьому скористаємось апріорною оцінкою $\|u_\varepsilon\|_{(H^2)^*} \le C\|f\|_{(H^2)^*}$. Далі

$$|(A_\varepsilon u, v)-(A_1 u, v)| \le \varepsilon^{-m}\left|\int_{\omega_\varepsilon} q\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)A_\varepsilon u v\,dx - \int_{\omega_\varepsilon} q\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)u v\,dx + q_0 u(0)v(0)\right| \le$$

$$\le C\varepsilon|\ln\varepsilon|^{1/2}\|u\|\,\|v\|,$$

звідки робимо висновок, що

$$\|A_\varepsilon - A_1\| \le C\varepsilon|\ln\varepsilon|^{1/2}.$$

Оператору A_1 відповідає задача на власні значення

$$\Delta^2 u + (p+q_0\delta(x))\,u = \mu(p+q_0\delta(x))\,u \quad \text{в } \Omega, \qquad \mathcal{N}u=0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega.$$

Введемо позначення $\lambda=\mu+1$ і запишемо цю задачу так:

$$\Delta^2 u - \lambda(p+q_0\delta(x))\,u = 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \qquad \mathcal{N}u=0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega. \tag{9}$$

Теорема 2 $(m=2)$. *Нехай* $\{\lambda_\varepsilon^{(k)}\}_{k=0}^\infty$ — *послідовність власних значень задачі* (1)–(3), *а* $\{\lambda^{(k)}\}_{k=0}^\infty$ — *послідовність власних значень задачі* (9). *Тоді для* $k=1,2,\ldots$ *при* $\varepsilon\to 0$ *справджується оцінка*

$$\left|\lambda_\varepsilon^{(k)}-\lambda^{(k)}\right| \le C(k)\varepsilon|\ln\varepsilon|^{1/2},$$

$$\Theta_{H^2}(V_\lambda(\varepsilon), V_\lambda) \le C\varepsilon|\ln\varepsilon|^{1/2},$$

де λ *є власним значенням задачі* (9) *кратності* r, *а* V_λ — *підпростір, що відповідає власному значенню* λ *цієї задачі.*

3. Випадок $2<m<4$. Введемо гільбертовий простір $\mathcal{H}=\{u\in H^2(\Omega)\,|\,u(0)=0\}$ і розглянемо задачу (6), вважаючи, що $f\in\mathcal{H}$. Оскільки

$$0 < a_\varepsilon(u_\varepsilon,u_\varepsilon) = \|u_\varepsilon\|^2 + \varepsilon^{-m}\int_{\omega_\varepsilon} q\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)u_\varepsilon^2\,dx =$$

$$= \int_\Omega \rho_\varepsilon f\,u_\varepsilon\,dx \le \left(\int_\Omega \rho_\varepsilon f^2\,dx\right)^{1/2}\left(\int_\Omega \rho_\varepsilon u_\varepsilon^2\,dx\right)^{1/2} \le$$

$$\le \left(\int_\Omega \rho_\varepsilon f^2\,dx\right)^{1/2} a_\varepsilon^{1/2}(u_\varepsilon,u_\varepsilon),$$

то, використовуючи твердження 1, робимо висновок, що

$$\|u_\varepsilon\|^2 \le (C_1+C_2\varepsilon^{4-m}|\ln\varepsilon|)\,\|f\|^2. \tag{10}$$

Введемо оператор $A_\varepsilon\colon\mathcal{H}\to\mathcal{H}$, який розв'язує задачу (6) у випадку $2<m<4$ і діє за формулою $A_\varepsilon f = u_\varepsilon(x)-u_\varepsilon(0)$. Також введемо оператор $B_\varepsilon\colon H^2\to H^2$, що діє за формулою $B_\varepsilon f = u_\varepsilon$.

Твердження 2. *Якщо* $(\lambda_\varepsilon, u_\varepsilon)$ — *власне значення і власна функція оператора* B_ε, *то* $(\lambda_\varepsilon, v_\varepsilon(x)=u_\varepsilon(x)-u_\varepsilon(0))$ — *власне значення і власна функція оператора* A_ε.

Доведення. Справді, за означенням оператора A_ε

$$A_\varepsilon v_\varepsilon = (B_\varepsilon v_\varepsilon)(x) - (B_\varepsilon v_\varepsilon)(0) = (B_\varepsilon(u_\varepsilon(x) - u_\varepsilon(0)))(x) - (B_\varepsilon(u_\varepsilon(x) - u_\varepsilon(0)))(0) =$$
$$= \lambda_\varepsilon(u_\varepsilon(x) - u_\varepsilon(0)) - \lambda_\varepsilon(u_\varepsilon(x) - u_\varepsilon(0))(0) = \lambda_\varepsilon v_\varepsilon(x).$$

Твердження 3. *Для розв'язку* u_ε *задачі* (1)–(3) *справедлива оцінка*

$$|u_\varepsilon(0)| \le C(\varepsilon^{m-2} + \varepsilon|\ln\varepsilon|^{1/2})\|u_\varepsilon\|.$$

Доведення. З інтегральної тотожності (5) маємо

$$\varepsilon^{-m}\left|\int_{\omega_\varepsilon} q\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)u_\varepsilon(x)\,dx\right| \le C_1\|u_\varepsilon\|,$$

якщо за пробну функцію взяти одиницю. Отже,

$$\left|\varepsilon^{-2}\int_{\omega_\varepsilon} q\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)u_\varepsilon(0)\,dx + \varepsilon^{-2}\int_{\omega_\varepsilon} q\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)(u_\varepsilon(x) - u_\varepsilon(0))\,dx\right| \le C_1\varepsilon^{m-2}\|u_\varepsilon\|,$$

$$q_0|u_\varepsilon(0)| \le C_1\varepsilon^{m-2} + \varepsilon^{-2}\left|\int_{\omega_\varepsilon} q\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)(u_\varepsilon(x) - u_\varepsilon(0))\,dx\right| \le C_2(\varepsilon^{m-2} + \varepsilon|\ln\varepsilon|^{1/2})\|u_\varepsilon\|.$$

Оператор A_ε є обмеженим, що випливає з оцінки (10) і твердження 3.

Введемо оператор $A_2 : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, який розв'язує задачу

$$\Delta^2 v + pv = pf \quad \text{в} \quad \Omega, \quad v(0) = 0, \quad \mathcal{N}v = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega,$$
$$A_2 f = v.$$

Оцінимо норму різниці операторів A_ε і A_2. Дійсно,

$$|a_\varepsilon((A_\varepsilon - A_2)f, \varphi)| = |a_\varepsilon(u_\varepsilon - u_\varepsilon(0) - v, \varphi)| = |a_\varepsilon(u_\varepsilon - v, \varphi) - a_\varepsilon(u_\varepsilon(0), \varphi)| =$$
$$= \left|\int_\Omega pf\varphi\,dx + \varepsilon^{-m}\int_{\omega_\varepsilon} q\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)f\varphi\,dx - \int_\Omega pf\varphi\,dx -\right.$$
$$\left. - \varepsilon^{-m}\int_{\omega_\varepsilon} q\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)v\varphi\,dx - \varepsilon^{-m}u_\varepsilon(0)\int_{\omega_\varepsilon} q\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\varphi\,dx - u_\varepsilon(0)\int_\Omega p\varphi\,dx\right| \le$$
$$\le \left|\varepsilon^{-m}\int_{\omega_\varepsilon} q\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)(f - v)\varphi\,dx\right| + \varepsilon^{-m}|u_\varepsilon(0)|\left|\int_{\omega_\varepsilon} q\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\varphi\,dx\right| + |u_\varepsilon(0)|\left|\int_\Omega p\varphi\,dx\right| \le$$
$$\le C_1\varepsilon^{4-m}|\ln\varepsilon|\,\|f\|\,\|\varphi\| + C_2\left(\varepsilon|\ln\varepsilon|^{1/2} + \varepsilon^{4-m}|\ln\varepsilon|\right)\|f\|\,\|\varphi\| +$$
$$+ C_3\left(\varepsilon^{m-2} + \varepsilon|\ln\varepsilon|^{1/2}\right)\|f\|\,\|\varphi\| = C\left(\varepsilon^{m-2} + \varepsilon^{4-m}|\ln\varepsilon|\right)\|f\|\,\|\varphi\|.$$

Отже, можна зробити висновок, що для довільної $u \in H^2(\Omega)$ є сильна збіжність $A_\varepsilon u \to A_2 u$ в $H^2(\Omega)$. Оператору A_2 відповідає задача на власні значення

$$\Delta^2 u + pu = \mu pu \quad \text{в} \quad \Omega, \quad \mathcal{N}u = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega.$$

Введемо позначення $\lambda = \mu + 1$ і запишемо цю задачу так:

$$\Delta^2 u - \lambda pu = 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \quad \mathcal{N}u = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega. \tag{11}$$

Теорема 3 $(2 < m < 4)$. *Нехай* $\{\lambda_\varepsilon^{(k)}\}_{k=0}^\infty$ — *послідовність власних значень задачі* (1)–(3), а $\{\lambda^{(k)}\}_{k=0}^\infty$ — *послідовність власних значень задачі* (11). *Тоді для* $k = 1, 2, \ldots$ *при* $\varepsilon \to 0$ *справджується оцінка*

$$\left|\lambda_\varepsilon^{(k)} - \lambda^{(k)}\right| \le C(k)(\varepsilon^{m-2} + \varepsilon^{4-m}|\ln\varepsilon|),$$

$$\Theta_{H^2}(V_\lambda(\varepsilon), V_\lambda) \le C(\varepsilon^{m-2} + \varepsilon^{4-m}|\ln\varepsilon|),$$

де λ *є власним значенням задачі* (11) *кратності* r, *а* V_λ — *підпростір, що відповідає власному значенню* λ *цієї задачі.*

4. Випадок $m > 4$. Перейдемо в формулах (1) – (3) до нових змінних ξ, які пов'язані з вихідними x_1, x_2 таким співвідношенням:

$$\xi = x/\varepsilon, \quad \xi = (\xi_1, \xi_2), \quad \xi = (x_1, x_2).$$

Тоді рівняння (1) перепишеться у вигляді

$$\varepsilon^{-4}\Delta_\xi^2 u_\varepsilon(\varepsilon\xi) - \lambda_\varepsilon(p(\varepsilon\xi) + \varepsilon^{-m}q(\xi))u_\varepsilon(\varepsilon\xi) = 0 \text{ в } \Omega, \quad \mathcal{N}u_\varepsilon(\varepsilon\xi) = 0 \text{ на } \partial\Omega.$$

Введемо новий спектральний параметр $\mu_\varepsilon = \varepsilon^{4-m}\lambda_\varepsilon$, а замість функцій $u_\varepsilon(\varepsilon\xi)$ розглядатимемо $v_\varepsilon(\xi)$, норма яких в $H^2(\Omega_\varepsilon)$ рівна одиниці ($\|v_\varepsilon(\xi)\|_{H^2(\Omega_\varepsilon)} = 1$, $v_\varepsilon(\xi) = u_\varepsilon(\varepsilon\xi)\varepsilon^{-1}$). Тоді отримаємо

$$\Delta_\xi^2 v_\varepsilon(\xi) - \mu_\varepsilon(p(\varepsilon\xi)\varepsilon^m + q(\xi))v_\varepsilon(\varepsilon\xi) = 0, \ \xi \in \Omega_\varepsilon, \ \mathcal{N}v_\varepsilon = 0 \text{ на } \partial\Omega, \tag{12}$$

де $\Omega_\varepsilon = \{\xi = x/\varepsilon \mid x \in \Omega\}$.

Означення 3. *Число* μ_ε *і відмінну від нуля функцію* $u_\varepsilon \in H^2(\Omega_\varepsilon)$ *будемо називати власним значенням і власною функцією задачі* (12), *якщо для неї виконується інтегральна тотожність*

$$\int_{\Omega_\varepsilon} E_\sigma(v_\varepsilon, \varphi)\,d\xi_1 d\xi_2 -$$

$$- \mu_\varepsilon\left[\varepsilon^m \int_{\Omega_\varepsilon} p(\varepsilon\xi)v_\varepsilon(\xi)\varphi(\xi)\,d\xi_1 d\xi_2 + \int_\omega q(\xi)v_\varepsilon(\xi)\varphi(\xi)\,d\xi_1 d\xi_2\right] = 0, \ \varphi \in H^2(\Omega_\varepsilon). \tag{13}$$

Введемо позначення $e_1 = 1$, $e_2 = \xi_1$, $e_3 = \xi_2$. Розглянемо простір

$$\mathcal{H}_\varepsilon = \{\psi \in H^2(\Omega_\varepsilon) \mid (q(\xi)\psi, e_i)_{L_2(\omega)} = 0, i = 1, 2, 3\}.$$

Оскільки $H^2(\Omega_\varepsilon) \subset L_2(\Omega_\varepsilon)$, то простір $H^2(\Omega_\varepsilon)$ подається у вигляді прямої суми замкненого підпростору V і його ортогонального доповнення $\mathcal{H}_\varepsilon$ відносно скалярного добутку в $L_2(\omega)$ з вагою $q(\xi)$

$$H^2(\Omega_\varepsilon) = \mathcal{H}_\varepsilon \oplus V,$$

де V — тривимірний замкнений підпростір, породжений функціями e_1, e_2, e_3.

Кожну функцію з $H^2(\Omega)$ можемо зобразити у вигляді

$$v_\varepsilon(\xi) = w_\varepsilon(\xi) + \alpha_1(\varepsilon) + \alpha_2(\varepsilon)\xi_1 + \alpha_3(\varepsilon)\xi_2, \qquad w_\varepsilon \in \mathcal{H}_\varepsilon. \tag{14}$$

Скористаємось цим, підставивши (14) у співвідношення (13):

$$a_\varepsilon(w_\varepsilon, \varphi) - \mu_\varepsilon\left[\varepsilon^m(p(\varepsilon\xi)w_\varepsilon, \varphi)_{L_2(\Omega_\varepsilon)} + (q(\xi)w_\varepsilon, \varphi)_\omega -\right.$$

$$\left. - \left(B_\varepsilon^{-1}\tau w_\varepsilon, \tau\varphi\right)_{\mathbb{R}^3}\right] = 0, \qquad w_\varepsilon \in \mathcal{H}_\varepsilon, \quad \varphi \in \mathcal{H}_\varepsilon, \tag{15}$$

де B_ε — матриця розміру 3×3 з елементами

$$b_{ij} = \left(\left(p(\varepsilon\xi)\,\varepsilon^m + q(\xi)\right) v^{(i)}, v^{(j)}\right)_{L_2(\Omega_\varepsilon)},$$

$$\tau\varphi = \left(\int\limits_{\omega} p(\varepsilon\xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi,\ \int\limits_{\omega} p(\varepsilon\xi)\,\varphi(\xi)\,\xi_1\,d\xi,\ \int\limits_{\omega} p(\varepsilon\xi)\,\varphi(\xi)\,\xi_2\,d\xi\right),$$

$$a_\varepsilon(w_\varepsilon, \varphi) = \int\limits_{\Omega_\varepsilon} E_\sigma(w_\varepsilon, \varphi)\,d\xi.$$

Легко бачити, що $\int_{\Omega_\varepsilon} E_\sigma(w, w)\,d\xi = 0$ тоді й лише тоді, коли $w = 0$. Тому задамо скалярний добуток $[u, v] = \int_{\Omega_\varepsilon} E_\sigma(u, v)\,d\xi_1\,d\xi_2$ на $\mathcal{H}_\varepsilon$ і норму $\|u\|_{\mathcal{H}_\varepsilon} = [u, u]^{1/2}$.

Вивчимо асимптотику $\alpha_\varepsilon = (\alpha_1(\varepsilon), \alpha_2(\varepsilon), \alpha_3(\varepsilon))$ при $\varepsilon \to 0$. Оскільки матриця B_ε є матрицею Грамма лінійно незалежної системи $\{1, \xi_1, \xi_2\}$ відносно скалярного добутку в $L_2(\Omega_\varepsilon)$ з вагою $p(\varepsilon\xi)\,\varepsilon^m + q(\xi)$, то вона є невиродженою.

Знаходження α_ε для кожної конкретної функції v_ε у розкладі (14) зводиться до розв'язування системи

$$B_\varepsilon \alpha_\varepsilon = -\tau v_\varepsilon.$$

Звідси отримуємо

$$\alpha_\varepsilon(w_\varepsilon) = -B_\varepsilon^{-1} \tau v_\varepsilon.$$

Будемо розглядати в (15) як пробну функцію почергово базові функції V. В результаті маємо

$$\left(\left(p(\varepsilon\xi)\,\varepsilon^m + q(\xi)\right)\left(w_\varepsilon(\xi) + \alpha_\varepsilon^{(1)} + \alpha_\varepsilon^{(2)}\xi_1 + \alpha_\varepsilon^{(3)}\xi_2\right), e_i\right)_{L_2(\omega)} = 0, \qquad i = 1, 2, 3.$$

Аналізуючи отриману систему, бачимо, що домінуючим членом є матриця, елементами якої є $\left(q(\xi)e_i, e_j\right)_{L_2(\omega)}$ і яка є невиродженою. Отже, робимо висновок, що $\alpha_1 = O(\varepsilon^{m-3})$, $\alpha_2 = O(\varepsilon^{m-4})$, $\alpha_3 = O(\varepsilon^{m-4})$.

Розглянемо оператор $A_\varepsilon : \mathcal{H}_\varepsilon \to \mathcal{H}_\varepsilon$, що діє за формулою

$$[A_\varepsilon w_\varepsilon, \varphi] = b_\varepsilon(w_\varepsilon, \varphi),$$

де

$$b_\varepsilon(w_\varepsilon, \varphi) = \int\limits_{\Omega_\varepsilon} \left(\varepsilon^m p(\varepsilon\xi) + q(\xi)\right) w_\varepsilon(\xi)\varphi(\xi)\,d\xi_1\,d\xi_2 - \left(B_\varepsilon^{-1}\tau w_\varepsilon, \tau\varphi\right).$$

Для кожного $\varepsilon > 0$ спектр інтегральної тотожності (13) складається з послідовності власних значень

$$1 < \mu_\varepsilon^1 \le \mu_\varepsilon^2 \le \ldots \le \mu_\varepsilon^n < \ldots, \qquad \mu_\varepsilon^n \to \infty, \quad n \to \infty,$$

а сам оператор A_ε діє так:

$$A_\varepsilon w_\varepsilon = \mu_\varepsilon^{-1} w_\varepsilon.$$

Кратність кожного μ_ε скінченна, а відповідні власні функції утворюють ортонормовану базу.

Лема 1. *Нехай власні значення задачі* (13) $\mu_\varepsilon \to \mu \ne 0$ *при* $\varepsilon \to 0$. *Тоді існує функція* $v \not\equiv 0$ *з простору* $H^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$ *така, що відповідна послідовність власних функцій* $v_\varepsilon \to v$ *в* $H^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$, *і пара* (μ, v) *задовольняє інтегральну тотожність*

$$\int_{\mathbb{R}^2} E_\sigma(v, \varphi)\, d\xi_1\, d\xi_2 - \mu \int_\omega q(\xi) v(\xi) \varphi(\xi)\, d\xi_1\, d\xi_2 = 0.$$

Доведення. Переходимо до границі при $\varepsilon \to 0$ в інтегральній тотожності (13).

Простором $\hat{\mathcal{H}}$ називатимемо простір, отриманий поповненням простору $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ за нормою $\| w \| = \int_{\mathbb{R}^2} E_\sigma(w, w)\, d\xi_1\, d\xi_2$, для елементів якого виконується співвідношення

$$(w, e_i)_{L_2(\omega)} = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

З леми 1 отримуємо, що пара (μ, v) є власним значенням і власною функцією такої задачі:

$$\Delta^2 w - \mu q(\xi) w = 0 \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^2, \quad w \in \hat{\mathcal{H}}.$$

Лема 2. *Справедлива оцінка*

$$\| A_\varepsilon v - \mu^{-1} v \|_{\mathcal{H}_\varepsilon} \le C \varepsilon^{\beta(m)},$$

де $\beta(m) = \min\{1, m-4\}$.

Доведення. Для довільної функції $\varphi \in \mathcal{H}_\varepsilon$

$$\left| \left[A_\varepsilon v - \mu^{-1} v, \varphi \right]_{\mathcal{H}_\varepsilon} \right| = \left| \int_{\Omega_\varepsilon} \left(\varepsilon^m p(\varepsilon\xi) + q(\xi) \right) v(\xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi_1\, d\xi_2 - \right.$$

$$\left. - \left(B_\varepsilon^{-1} \tau v, \tau\varphi \right) - \mu^{-1} [v, \varphi] \right| \le I_1 + I_2 + I_3,$$

де

$$I_1 = \varepsilon^m \left| \int_{\Omega_\varepsilon} p(\varepsilon\xi)\, v(\xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi_1\, d\xi_2 \right|,$$

$$I_2 = \left| \int_\omega q(\xi)\, v(\xi) \varphi(\xi)\, d\xi_1\, d\xi_2 - \mu^{-1} \int_{\Omega_\varepsilon} E_\sigma(v, \varphi)\, d\xi_1\, d\xi_2 \right|,$$

$$I_3 = \left| \left(B_\varepsilon^{-1} \tau v, \tau \varphi \right) \right|.$$

Оцінимо кожен з доданків I_j, $j = 1, 2, 3, 4$. Використовуючи нерівність Пуанкаре, одержуємо

$$I_1 = \varepsilon^m \left| \int_{\Omega_\varepsilon} p(\varepsilon\xi)\, v(\xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi_1\, d\xi_2 \right| \le \varepsilon^m \| v \|_{L_2(\Omega_\varepsilon)} \| \varphi \|_{L_2(\Omega_\varepsilon)} \le$$

$$\le C_1 \varepsilon^{m-4} \| \Delta v \|_{L_2(\Omega_\varepsilon)} \| \Delta \varphi \|_{L_2(\Omega_\varepsilon)} \le C_2 \varepsilon^{m-4} \| v \|_{\mathcal{H}_\varepsilon} \| \varphi \|_{\mathcal{H}_\varepsilon} \le C_3 \varepsilon^{m-4} \| \varphi \|_{\mathcal{H}_\varepsilon}.$$

Оскільки

$$\left| \int_{\mathbb{R}^2 - \Omega_\varepsilon} E_\sigma(v, \varphi)\, d\xi_1\, d\xi_2 \right| \le C\varepsilon, \quad \text{то} \quad I_2 \le C\varepsilon, \quad I_3 \le C\varepsilon^{m-4} \| \varphi \|_{\mathcal{H}_\varepsilon}.$$

Отже $|(A_\varepsilon v - \mu^{-1} v, \varphi)_{\mathcal{H}_\varepsilon}| \le C \varepsilon^{\beta(m)} \| \varphi \|_{\mathcal{H}_\varepsilon}$, тобто

$$\| A_\varepsilon v - \mu^{-1} v \|_{\mathcal{H}_\varepsilon} \le C \varepsilon^{\beta(m)}. \tag{16}$$

За лемою Вишика – Люстерника [12] з оцінки (16) випливає, що існує таке власне значення μ_ε для тотожності (15), що виконується оцінка $\| v_\varepsilon - w_\varepsilon \| \leq 2C d^{-1} \varepsilon^{\beta(m)}$. Число d, що фігурує в лемі Вишика – Люстерника, виберемо так, щоб інтервал $[\mu^{-1} - d, \mu^{-1} + d]$ не містив точок спектра оператора B, відмінних від μ^{-1}. Оператор B визначається за формулою

$$[Bu, v]_{\hat{\mathcal{H}}} = \int\limits_{\omega} q(\xi) u(\xi) v(\xi) \, d\xi_1 \, d\xi_2 .$$

Теорема 4 $(m > 4)$. *Нехай* $\{\lambda_\varepsilon^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ *— послідовність власних значень задачі* (1) – (3), а $\{\lambda^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ *— послідовність власних значень граничної задачі. Тоді для* $k = 1, 2, \ldots$ *при* $\varepsilon \to 0$ *справджується оцінка*

$$\left| \varepsilon^{m-4} \lambda_\varepsilon^{(k)} - \lambda^{(k)} \right| \leq C(k) \varepsilon^{\beta(m)} ,$$

$$\Theta_{H^2}\big(V_\lambda(\varepsilon), W_\lambda(\varepsilon)\big) \leq C \varepsilon^{\beta(m)},$$

де λ *є власним значенням граничної задачі кратності* r, *а* V_λ *— підпростір, що відповідає власному значенню* λ; $W_\lambda(\varepsilon)$ *— простір функцій вигляду* $\varepsilon w(x/\varepsilon)$, *звужений на* Ω.

Структура головних членів асимптотики власних функцій у цьому випадку є математичним описом ефекту локальних коливань.

1. *Гантмахер Ф. Р., Крейн М. Г.* Осциляционные матрицы, ядра и малые колебания механических систем. – М.; Л.:Гостехтеоретиздат, 1950. – 359 с.
2. *Sanches-Palensia E.* Perturbation of eigenvalue in thermoelasticity and vibration of systems with concentrated masses // Trends and App. pure Math. to Mech. Lect. Notes Phys. – 1984. – № 155. – P. 346–368.
3. *Olejnik O. A.* Homogenization problems in elasticity. Spektrum of singularity perturbed operators // Non-classical continuum mech. – 1987. – Lecture Notes series, 122. – P. 188–205.
4. *Sanches-Palensia E., Tchatat H.* Vibration de system elastique avec des masses concentrees // Rend. Semin. math. Univ. e politech. Torino. – 1984. – **42**, № 3. – C. 43–63.
5. *Олейник О. А.* О собственных колебаниях тел с концентрированными массами // Современные проблемы прикладной математики и математической физики. – М.: Наука, 1988. – С. 101–128.
6. *Головатый Ю. Д.* Спектральные свойства колебательных систем с присоединенными массами // Тр. Моск. мат. о-ва. – 1992. – **54**. – С. 29–72.
7. *Miquel Lobo and Eugenia Perez.* Vibrations of a membrane with many concentrated masses near the boundary // Math. Models and Methods in Appl. Sci. – 1995. – **5**, № 5. – C. 565–585.
8. *Miquel Lobo and Eugenia Perez.* Vibrations of a body with many concentrated masses near the boundary // World Sci. Publ. Company. – 1992. – P. 249–273.
9. *Мельник Т. А., Назаров С. А.* Асимптотическая структура спектра в задаче о гармонических колебаниях ступицы с тяжелыми спицами // Докл. АН СССР. – 1993. – **133**, № 1. – С. 13–15.
10. *Nazarov S. A.* Interaction of concentrated masses in a harmonically oscillating spatial body with Neumann boundary conditions. RAIRO // Modelisation Nath. Anal. – 1993. – **27**, № 6. – P. 777–799.
11. *Ахиезер Н. И., Глазман И. М.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. – Харьков: Выща шк., 1977. – Т. 1. – 316 с.
12. *Вишик М. И., Люстерник А. А.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи мат. наук. – 1957. – **12**, № 5. – С. 3–122.

Одержано 16.04.98,
після доопрацювання – 23.11.98