УДК 517.54

А. Л. Гольберг (Крым. ин-т природоохран. и курорт. стр-ва, Симферополь)

КВАЗИКОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ И РАДИУСЫ НОРМАЛЬНЫХ СИСТЕМ ОКРЕСТНОСТЕЙ

A new geometric criterion for belonging of plane homeomorphisms to the class of q-quasiconformal mappings is established.

Встановлено новий геометричний критерій належності плоских гомеоморфізмів до класу q-квазіконформних відображень.

Данная работа посвящена геометрическим вопросам теории плоских квазиконформных отображений.

Пусть x_0 — произвольная точка в $\mathbb{R}^2$, $B(x_0, h) = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x - x_0| < h\}$, mA означает двумерную меру Лебега множества A.

Будем говорить, что множество замкнутых окрестностей $\{\mathcal{G}_t(x_0), t \in (0, 1]\}$ образует нормальную систему, если существует непрерывная функция $v: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ такая, что $v(x_0) = 0$ и $v(x) > 0$ при $x \neq x_0$, где $\mathcal{G}_t(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^2 : v(x) \le t\}$. Множество $\Gamma_t(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^2 : v(x) = t\}$ является границей $\mathcal{G}_t(x_0)$ при каждом $t \in (0, 1]$. Функция v называется порождающей функцией нормальной системы $\{\mathcal{G}_t(x_0)\}$.

Полагаем

$$r(x_0, t) = \inf_{x \in \Gamma_t(x_0)} |x - x_0|, \qquad \mathcal{R}(x_0, t) = \sup_{x \in \Gamma_t(x_0)} |x - x_0|.$$

Величина

$$\varlimsup_{t \to 0} \frac{\mathcal{R}(x_0, t)}{r(x_0, t)} = \Delta(x_0)$$

называется параметром регулярности семейства $\{\mathcal{G}_t(x_0)\}$. Система окрестностей $\{\mathcal{G}_t(x_0)\}$ называется K-регулярной в точке x_0, если $\Delta(x_0) \le K < \infty$.

Пусть $f: G \to G^*$ — гомеоморфизм, G и $G^* = f(G)$ — ограниченные области в $\mathbb{R}^2$, $x_0 \in G$, $\{\mathcal{G}_t(x_0)\}$ — нормальная система окрестностей точки x_0. Обозначим

$$r^*(x_0, t) = \inf_{x \in \Gamma_t(x_0)} |f(x) - f(x_0)|, \qquad \mathcal{R}^*(x_0, t) = \sup_{x \in \Gamma_t(x_0)} |f(x) - f(x_0)|,$$

$$\varlimsup_{t \to 0} \frac{\mathcal{R}^*(x_0, t)}{r^*(x_0, t)} = \Delta^*(x_0).$$

Система окрестностей $\{f(\mathcal{G}_t(x_0))\}$ называется K^*-регулярной в точке $f(x_0)$, если $\Delta^*(x_0) \le K^* < \infty$.

Если гомеоморфное отображение в каждой точке области переводит некоторое K-регулярное семейство в K^*-регулярное, то отсюда следует его дифференцируемость п. в., суммируемость якобиана и N-свойство на п. в. сечениях, параллельных координатным осям. Для суммируемости производных с квадратом достаточно потребовать, чтобы п. в. $K \cdot K^* \le c < \infty$. Эти факты впервые были установлены Д. Е. Меньшовым [1] при доказательстве теоремы о том, что всякое гомеоморфное отображение, переводящее бесконечно малый круг в бесконечно малый круг, осуществляется аналитической функцией (см. [2, с. 18 – 21]).

Определение 1 [3]. *Гомеоморфное отображение* $f\colon G \to \mathbb{R}^2$ *называется* q-*квазиконформным в области* G, *если существуют постоянная* $q \geq 1$ *такая, что для каждой точки* $x \in G$ *существует нормальная* K-*регулярная система окрестностей* $\{\mathcal{G}_t(x)\}$ *точки* x, *для которой выполняется неравенство*

$$\overline{\lim_{t \to 0}} \frac{\mathfrak{R}^*(x, t)}{r(x, t)} \cdot \frac{\mathfrak{R}(x, t)}{r^*(x, t)} \leq q. \tag{1}$$

Это определение q-квазиконформного отображения будем называть геометрическим.

Если отображение $f\colon G \to \mathbb{R}^2$ имеет в точке $x \in G$ частные производные $\partial f_i / \partial x_j$, $i, j = 1, 2$, то в этой точке определены выражения: линейное отображение $f'(x)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, являющееся формальной производной отображения f, якобиан $|J(x, f)|$ отображения f, минимальное $l(x, f) = \min_{|h|=1} |f'(x)h|$ и максимальное $\mathcal{L}(x, f) = \max_{|h|=1} |f'(x)h|$ растяжения отображения f.

Определение 2 [4]. *Гомеоморфизм* $f\colon G \to G^*$ *называется* q-*квазиконформным, если выполняются следующие условия:*

1) f — ACL-*отображение*;
2) f *дифференцируемо п. в. в* G;
3) *для п. в.* $x \in G$ $q^{-1}\mathcal{L}^2(x, f) \leq |J(x, f)| \leq q\, l^2(x, f)$.

Это так называемое аналитическое определение квазиконформного отображения.

Основным результатом данной работы является следующий критерий принадлежности гомеоморфизмов классу q-квазиконформных отображений.

Теорема. *Гомеоморфное отображение* $f\colon G \to G^*$ *является* q-*квазиконформным,* $1 \leq q < \infty$, *тогда и только тогда, когда для любых фиксированных* α, β, $1 \leq \alpha, \beta \leq 2$, *и для каждой точки* $x \in G$ *существует нормальная* K-*регулярная система окрестностей* $\{\mathcal{G}_t(x)\} \subset G$ *точки* x *такая, что имеют место неравенства*

$$\overline{\lim_{t \to 0}} \frac{\mathfrak{R}^*(x, t)}{r(x, t)} \cdot \left(\frac{\mathfrak{R}(x, t)}{r^*(x, t)}\right)^{\alpha - 1} \leq q^{\alpha/2} (\overline{\Theta}'(x))^{(2-\alpha)/2}, \tag{2}$$

$$\overline{\lim_{t \to 0}} \left(\frac{\mathfrak{R}^*(x, t)}{r(x, t)}\right)^{\beta - 1} \cdot \frac{\mathfrak{R}(x, t)}{r^*(x, t)} \leq q^{\beta/2} (1/\underline{\Theta}'(x))^{(2-\beta)/2}, \tag{3}$$

где

$$\overline{\Theta}'(x) = \overline{\lim_{t \to 0}} \frac{mf(B(x, \mathfrak{R}(x, t)))}{mB(x, \mathfrak{R}(x, t))}, \quad \underline{\Theta}'(x) = \underline{\lim_{t \to 0}} \frac{mf(B(x, \mathfrak{R}(x, t)))}{mB(x, \mathfrak{R}(x, t))}.$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $x \in G$ такова, что f дифференцируемо в x и $|J(x, f)| \neq 0$. Фиксируя произвольно α, $1 \leq \alpha \leq 2$, из неравенства (1) получаем

$$\overline{\lim_{t \to 0}} \frac{\mathfrak{R}^*(x, t)}{r(x, t)} \cdot \left(\frac{\mathfrak{R}(x, t)}{r^*(x, t)}\right)^{\alpha - 1} \leq q^{\alpha/2}\, \overline{\lim_{t \to 0}} \left(\frac{\mathfrak{R}^*(x, t) r^*(x, t)}{\mathfrak{R}(x, t) r(x, t)}\right)^{(2-\alpha)/2}.$$

Поскольку в точке x

$$\varlimsup_{t\to 0} \frac{\mathcal{R}^*(x,t)r^*(x,t)}{\mathcal{R}(x,t)r(x,t)} = |J(x,f)| = \overline{\Theta}'(x),$$

отсюда вытекает неравенство (2).

Неравенство (3) выводится аналогично.

Доказательство *достаточности* при $1 \le \alpha, \beta < 2$ распадается на ряд вспомогательных утверждений. (При $\alpha = \beta = 2$ неравенства (2), (3) очевидным образом превращаются в соотношение (1).)

Лемма 1. *Пусть* $f\colon G \to G^*$ *— гомеоморфное отображение областей* G *и* G^* *из* $\mathbb{R}^2$. *Если для любого фиксированного* α, $1 \le \alpha < 2$, *и каждой точки* $x \in G$ *существует нормальная K-регулярная система окрестностей* $\{\mathcal{G}_t(x)\} \subset G$ *такая, что выполняется неравенство* (2), *то* f *— ACL-отображение, дифференцируемое п. в. в области* G.

Лемма 2. *Пусть* $f\colon G \to G^*$ *— гомеоморфное отображение областей* G *и* G^* *из* $\mathbb{R}^2$. *Если для любого фиксированного* β, $1 \le \beta < 2$, *и каждой точки* $x \in G$ *существует нормальная K-регулярная система окрестностей* $\{\mathcal{G}_t(x)\} \subset G$ *такая, что выполняется неравенство* (3), *то* f^{-1} *— ACL-отображение, дифференцируемое п. в. в области* G^*.

Лемма 3. *Пусть* $f\colon G \to G^*$ *— гомеоморфное отображение областей* G *и* G^* *из* $\mathbb{R}^2$. *Если для любых фиксированных* α, β, $1 \le \alpha, \beta < 2$, *и каждой точки* $x \in G$ *существует нормальная K-регулярная система окрестностей* $\{\mathcal{G}_t(x)\} \subset G$ *такая, что выполняются неравенства* (2), (3), *то для п. в.* $x \in G$ *справедливо двойное неравенство*

$$q^{-1}\mathcal{L}^2(x,f) \le |J(x,f)| \le q\, l^2(x,f).$$

Достаточность. Из лемм 1 – 3 следует, что f удовлетворяет всем условиям определения 2, следовательно, f — q-квазиконформное отображение.

Замечание 1. Полученный в теореме критерий позволяет ввести новое определение q-квазиконформности отображения $f\colon G \to G^*$. Это определение будем называть α, β-геометрическим определением q-квазиконформного отображения.

Замечание 2. Эквивалентное α, β-модульное определение q-квазиконформных гомеоморфизмов было дано В. С. Кудьявиным в работе [5].

1. *Menshov D. E.* Sur une generalization d'un theoreme de M. H. Bohr // Mat. sb. – 1937. – 2. – P. 339 – 356.
2. *Белинский П. П.* Общие свойства квазиконформных отображений. – Новосибирск: Наука, 1974. – 98 с.
3. *Решетняк Ю. Г.* Пространственные отображения с ограниченным искажением. – Новосибирск: Наука, 1982. – 285 с.
4. *Vaisala J.* Lectures on n-dimensional quasiconformal mappings // Lect. Notes Math. – Berlin; New York: Springer, 1971. – 144 p.
5. *Кудьявин В.С.* Квазиконформные отображения и α-модули семейств кривых // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1992. – № 7. – С. 11 – 13.

Получено 16.03.98