УДК 517.5

Б. В. Винницький, О. В. Шаповаловський (Дрогоб. пед. ін-т)

ЗАУВАЖЕННЯ ПРО ПОВНОТУ СИСТЕМ ЕКСПОНЕНТ З ВАГОЮ В $L^2(\mathbb{R})$*

New conditions of the completeness of systems of exponentials with a weight in $L^2(\mathbb{R})$ are established which supplement and generalize authors' results obtained earlier.

Знайдено нові умови повноти систем експонент з вагою в $L^2(\mathbb{R})$, які доповнюють і узагальнюють результати авторів, отримані раніше.

Метою статті є узагальнення і доповнення результатів роботи [1] стосовно повноти системи

$$\exp\{-\gamma(t)+t\lambda_n\}, \qquad n\in\mathbb{N}, \tag{1}$$

у просторі $L^2(\mathbb{R})$, де $\gamma:\mathbb{R}\to[0;+\infty)$ — опукла на $\mathbb{R}$ функція, для якої $t = o(\gamma(t))$ при $t\to+\infty$ і (λ_n) — послідовність різних комплексних чисел із $\mathbb{C}_+=\{z:\operatorname{Re}z>0\}$. Нехай $z=x+iy$, $r=|z|$, $\varphi=\arg z$, $\varphi_n=\arg\lambda_n$, через C_1, $C_2, \ldots$ позначаємо додатні сталі.

Теорема 1. *Якщо система* (1) *не є повною в* $L^2(\mathbb{R})$, *то*

$$\sum_{|\lambda_n|\le 1}\operatorname{Re}\lambda_n < +\infty, \tag{2}$$

і для кожного $b>0$

$$\varlimsup_{r\to+\infty}\left(2S(r)-\frac{\gamma_*(r+b)}{r}\right) < +\infty, \tag{3}$$

де

$$\gamma_*(x) = \sup_{t\ge 0}\{xt-\gamma(t)\}, \qquad S(r) = \sum_{1<|\lambda_n|\le r}\left(\frac{1}{|\lambda_n|}-\frac{|\lambda_n|}{r^2}\right)\cos\varphi_n.$$

Для доведення цієї теореми потрібна наступна лема (див. в [2] лему 1 та доведення теореми 1, а також [1]).

Лема 1. *Якщо аналітична в* $\mathbb{C}_+$ *функція* $f\not\equiv 0$ *має нулі в точках* λ_n *і зображується у вигляді* $f=f_1+f_2$, де f_2 — *ціла функція, а* f_1 *належить простору Харді* $H^2(\mathbb{C}_+)$ [3, 4] *у півплощині* $\mathbb{C}_+=\{z:\operatorname{Re}z>0\}$, *то виконується* (2) *і при* $r\in[1;+\infty)$

$$S(r) \le \frac{1}{\pi r}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\ln\left|f\left(re^{i\varphi}\right)\right|\cos\varphi\, d\varphi + \frac{1}{2\pi}\int_1^r\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r^2}\right)\ln|f(it)f(-it)|\,dt + C_0. \tag{4}$$

***Доведення теореми* 1.** Якщо система (1) не є повною, то знайдеться $\alpha\in L^2(\mathbb{R})$, $\alpha\not\equiv 0$, така, що

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\alpha(t)\exp(-\gamma(t)+t\lambda_n)\,dt = 0, \qquad n\in\mathbb{N}. \tag{5}$$

* Частково підтримана Міжнародною соросівською програмою підтримки освіти в галузі точних наук (ISSEP), грант № APU071012.

Розглянемо функцію

$$f(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(t) \exp(-\gamma(t) + tz) dt. \tag{6}$$

Оскільки $\alpha \not\equiv 0$, то і $f \not\equiv 0$. Із (5) випливає, що f має нулі в точках λ_n, а із (6) отримуємо $f = f_1 + f_2$, де

$$f_1(z) = \int_{-\infty}^{0} \alpha(t) \exp(-\gamma(t) + tz) dt, \qquad f_2(z) = \int_{0}^{+\infty} \alpha(t) \exp(-\gamma(t) + tz) dt.$$

Очевидно, f_2 — ціла функція, а $f_1 \in H^2(\mathbb{C}_+)$ згідно з теоремою Пелі – Вінера [3, с. 20]. При $b > 0$ для $z \in \mathbb{C}_+$ маємо

$$|f_2(z)| \le \|\alpha\| \left(\int_0^{+\infty} \exp(-2\gamma(t) + 2tx) dt \right)^{1/2} \le$$

$$\le \|\alpha\| \exp(\gamma_*(x+b)) \left(\int_0^{+\infty} \exp(-2bt) dt \right)^{1/2} = \frac{\|\alpha\|}{\sqrt{2b}} \exp(\gamma_*(x+b)).$$

Тому, враховуючи відому оцінку для функцій із простору Харді [4], для $z \in \mathbb{C}_+$ отримуємо

$$|f(z)| \le \frac{C_1}{\sqrt{x}} + C_2 \exp(\gamma_*(x+b)) \le C_3 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) \exp(\gamma_*(x+b)). \tag{7}$$

Зауважимо, що

$$\ln|f(z)| \le \ln^+|f_1(z)| + \ln^+|f_2(z)| + \ln 2,$$

$$\ln|f_1(z)| \le \frac{|f_1(z)|^2}{2}, \qquad f_1(iy) \in L^2(\mathbb{R})$$

і f_2 — обмежена функція на уявній осі. Тому

$$\frac{1}{2\pi} \int_1^r \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2} \right) \ln|f(it)| dt \le$$

$$\le \frac{1}{4\pi} \int_1^r \frac{|f_1(it)|^2 + 2\ln^+|f_2(it)| + 2\ln 2}{t^2} dt = O(1), \qquad r \in [1; +\infty),$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_1^r \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2} \right) \ln|f(-it)| dt = O(1), \qquad r \in [1; +\infty).$$

Крім цього, оскільки γ_* — опукла функція, то функція $(\gamma_*(x) - \gamma_*(0)) / x$ є неспадною на $(0; +\infty)$. Внаслідок цього при $r \in [1; +\infty)$ маємо

$$\frac{1}{\pi r} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \ln\left| f\left(re^{i\varphi}\right) \right| \cos\varphi \, d\varphi \le$$

$$\le \frac{1}{\pi r} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{r\cos\varphi}} \right) \cos\varphi \, d\varphi + \frac{1}{\pi r} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \gamma_*(r\cos\varphi + b) \cos\varphi \, d\varphi \le$$

$$\le \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\gamma_*(r\cos\varphi + b) - \gamma_*(0)}{r\cos\varphi}\cos^2\varphi\, d\varphi + C_4 \le$$

$$\le \frac{1}{\pi}\frac{\gamma_*(r+b)-\gamma_*(0)}{r}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2\varphi\, d\varphi + C_5 \le \frac{\gamma_*(r+b)}{2r} + C_6.$$

Тому з леми 1 отримуємо (2) і (3).

Теорема 2. *Нехай* $\gamma(t) = e^t$. *Якщо система* (1) *не є повною, то виконується умова* (2) *і*

$$\varlimsup_{r\to+\infty} (2S(r) - \ln r) < +\infty.$$

Якщо виконується (2) *і при деякому* $\rho_1 \in (0; 1)$

$$\varlimsup_{r\to+\infty} (2S(r) - \rho_1 \ln r) < +\infty, \tag{8}$$

то система (1) *не є повною.*

Доведення. В даному випадку $\gamma_*(x) = x\ln x - x$. Тому

$$\frac{\gamma_*(x+b)}{x} = \frac{x+b}{x}\ln(x+b) - \frac{x+b}{x} = O(1) + \ln x, \quad x\to+\infty,$$

і перша частина теореми 2 випливає із теореми 1. Доведемо другу частину теореми 2. Нехай $H = H_1H_2$, де

$$H_1(z) = \prod_{|\lambda_n|\le 1}\frac{\lambda_n - z}{\overline{\lambda}_n + z}, \quad H_2(z) = \prod_{|\lambda_n|>1}\frac{1 - z/\lambda_n}{1 + z/\overline{\lambda}_n}\exp\left(\frac{z}{\lambda_n} + \frac{z}{\overline{\lambda}_n}\right). \tag{9}$$

Скористаємось наступним твердженням, доведеним в [5]. Якщо виконується (8), то

$$|H_2(z)| \le C_4\exp(\rho_1 x\ln r + C_7 x), \quad z\in\mathbb{C}_+.$$

Оскільки H_1 — добуток Бляшке для $\mathbb{C}_+$ (його збіжність випливає із (2) [6, с. 30]), то $|H_1(z)|\le 1$ при $z\in\mathbb{C}_+$ і тому

$$|H(z)| \le C_4\exp(\rho_1 x\ln r + C_7 x), \quad z\in\mathbb{C}_+.$$

Зазначимо, що якщо функція ν є неспадною на $[0; +\infty)$ і

$$\int_1^{+\infty}\frac{\nu(t)}{t^2}dt < +\infty,$$

то (див., наприклад, [1]) існує аналітична в $\mathbb{C}_+$ функція $\omega \not\equiv 0$, для якої $|\omega(z)| \le \exp(-\nu(|z|))$, $z\in\mathbb{C}_+$. Функція $\nu(t) = t^{\rho_2}$, $0<\rho_1<\rho_2<1$, задовольняє вказані вимоги. Тому існує аналітична в $\mathbb{C}_+$ функція ω така, що $|\omega(z)| \le \le \exp\left(-|z|^{\rho_2}\right)$, $z\in\mathbb{C}_+$. Тоді для функції $R_0(z) = \omega(z)H(z)$ маємо

$$|R_0(z)| \le C_8\exp\left(\rho_1 x\ln r - r^{\rho_2} + C_7 x\right) \le$$

$$\le C_8\exp\left(C_7 x + \sup_{r>0}\left\{\rho_1 x\ln r - r^{\rho_2}\right\}\right) \le C_8\exp\left(C_9 x + \frac{\rho_1}{\rho_2}x\ln x\right).$$

Тому для функції $f(z) = \exp(-C_9 z)R_0(z)/(1+z)^2$ виконується нерівність

$$|f(z)| \le \frac{C_8 \exp((\rho_1/\rho_2) x \ln x)}{1+y^2}, \quad z \in \mathbb{C}_+. \tag{10}$$

Отже, інтеграл

$$\alpha_1(t) = \frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} f(z) \exp(-tz)\, dz$$

не залежить від $x > 0$ і

$$\alpha_1(t) \exp(xt) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+iy) \exp(-iyt)\, dt. \tag{11}$$

Таким чином, функцію $\alpha_1(t)\exp(xt)$ для кожного $x > 0$ можна розглядати як перетворення Фур'є функції $f(x+iy) \in L^2(\mathbb{R})$. Тому

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha_1(t) \exp(zt)\, dt, \quad z \in \mathbb{C}_+. \tag{12}$$

Оскільки $f(iy) \in L^2(\mathbb{R})$, то $\alpha_1 \in L^2(\mathbb{R})$. Крім цього, із (10) і (11) для $t > 0$ маємо

$$|\alpha_1(t)| \le C_{10} \exp\left(-\sup_{x>0}\left(xt - \frac{\rho_1}{\rho_2} x \ln x\right)\right) = C_{10} \exp\left(-\frac{\rho_1}{\rho_2} \exp\left(\frac{\rho_2}{\rho_1} t - 1\right)\right).$$

Отже, $\alpha(t) = \alpha_1(t)\exp(e^t) \in L^2(\mathbb{R})$ і згідно з (12) для всіх $n \in \mathbb{N}$ отримуємо

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(t) \exp\left(-e^t + t\lambda_n\right) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha_1(t) \exp(t\lambda_n)\, dt = \sqrt{2\pi}\, f(\lambda_n) = 0.$$

Таким чином, система (1) не є повною в $L^2(\mathbb{R})$.

Нехай далі

$$s(t) = \sum_{1<|\lambda_n|\le t} \cos\varphi_n.$$

Теорема 3. *Нехай*

$$\varlimsup_{t\to+\infty} \frac{s(t)}{t} = \tau < +\infty, \tag{13}$$

виконується умова (2) *і для деякого* $b > 0$

$$\int_1^{+\infty} \frac{\gamma(2S(r) - b)}{r^2}\, dr < +\infty. \tag{14}$$

Тоді система (1) *не є повною в* $L^2(\mathbb{R})$.

Доведення. Нехай $H = H_1 H_2$, де H_1 і H_2 визначаються формулами (9). Якщо виконується (13), то

$$S(r) = \sum_{|\lambda_n|\le r} \frac{\operatorname{Re}\lambda_n}{|\lambda_n|^2} + O(1),$$

і тому [1] отримуємо

$$|H_2(z)| \le C_{11} \exp(2xS(r) + C_{12}x), \quad z \in \mathbb{C}_+.$$

Отже,

$$|H(z)| \le C_{11} \exp(2xS(r) + C_{12}x), \qquad z \in \mathbb{C}_+. \tag{15}$$

Існує [1] аналітична в $\mathbb{C}_+$ функція $T(z)$ така, що

$$|T(z)| \le 2S_1(r) - bx, \quad S_1(r) = \gamma(2S(r) - b), \qquad z \in \mathbb{C}_+. \tag{16}$$

Тому, враховуючи (15) і (16), для функції

$$Q(z) = \frac{H(z) \exp(-C_{13} z + T(z))}{(1+z)^2}$$

при належному виборі сталих C_{13} і C_{14} у півплощині $\operatorname{Re} z > 0$ маємо

$$|Q(z)| \le \frac{C_{14} \exp(2\gamma_*(x/2))}{1+y^2}. \tag{17}$$

Згідно з (17) інтеграл

$$\alpha_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi i}} \int\limits_{x-i\infty}^{x+i\infty} Q(z) \exp(-zt)\, dz$$

не залежить від $x > 0$ і тому, дослівно повторюючи доведення леми 7 з [1], переконуємось у справедливості теореми 3.

Теорема 4. *Нехай $\gamma(t) = e^t$ і (λ_n) — така послідовність із $\mathbb{C}_+$, що для тих членів послідовності, які лежать в області $\{z: |z| > 1\}$, виконується нерівність*

$$|\lambda_n| - |\lambda_m| \ge h > 0, \qquad n \ne m, \tag{18}$$

$$|\arg \lambda_n| \le \theta < \frac{\pi}{2}. \tag{19}$$

Тоді для того щоб система (1) *не була повною в $L^2(\mathbb{R})$, необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова* (2) *і*

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\exp(2S(r))}{r^2} dr < +\infty. \tag{20}$$

Необхідність випливає з теорем 2 і 3. *Достатність* умови (2) випливає з теореми (1), а *достатність* умови (20) доведено в [1].

Теорема 5. *Нехай (λ_n) — така послідовність із $\mathbb{C}_+$, що для тих членів послідовності, які лежать в області $\{z: |z| > 1\}$, виконуються* (18) *і* (19). *Тоді для того щоб система* (1) *не була повною в $L^2(\mathbb{R})$, необхідно і достатньо, щоб виконувались умови* (2) *і* (14).

Достатність випливає з теореми 3, тому що із (18) і (19) випливає (13) [1]. *Необхідність* умови (2) є наслідком теореми 1. Доведемо *необхідність* умови (14). Припустимо, що система (1) не є повною, але (14) не виконується, тобто

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\gamma(2S(r) - b)}{r^2} dr = +\infty \quad \forall b > 0. \tag{21}$$

Оскільки система (1) не є повною, то знайдеться $\alpha \in L^2(\mathbb{R})$, $\alpha \not\equiv 0$, для якої виконується (5) і для функції (6) при $x = \operatorname{Re} z > 0$ справедлива оцінка (7). Використаємо наступне твердження [7, с. 119; 8].

Нехай $\tilde{\gamma}_*(x)$ — додатна неспадна опукла на $(-\infty; +\infty)$ функція і $x = o(\tilde{\gamma}_*(x))$ при $x \to +\infty$, а функція G — аналітична в $\operatorname{Re} z \ge 0$ і задовольняє умову $|G(z)| \le \exp(\tilde{\gamma}_*(x) - 2xS(r))$, де $S(r)$ — неспадна функція. Тоді якщо

$$\int_1^{+\infty} \frac{\tilde{\gamma}(2S(r)-b)}{r^2} dr = +\infty \quad \forall b \in \mathbb{R}, \tag{22}$$

то $G(z) \equiv 0$, де $\tilde{\gamma}(t) = \sup_{t \geq 0} \{xt - \tilde{\gamma}_*(t)\}$. Для функції $g(z) = f(z)/H_2(z)$, де $H_2(z)$ визначена в (9), з (7) і леми 3 з [1] при $\operatorname{Re} z > 0$ і $z \notin \left\{\bigcup_{n=1}^{\infty} |z-\lambda_n| \leq h/3\right\}$ маємо

$$|g(z)| \leq C_{15} \frac{\left(1+1/\sqrt{x}\right)\exp(\gamma_*(x+b))}{\exp(2xS(r)-C_{16}x)}.$$

Якщо $z = \{w : |w-\lambda_n| < h/3\}$, то згідно з принципом максимуму

$$|g(z)| \leq \max_{|z-\lambda_n|=h/3} |g(z)| \leq C_{15} \frac{\left(1+1/\sqrt{x-2h/3}\right)\exp(\gamma_*(x+b+2h/3))}{\exp\left(2(x-2h/3)S(r-2h/3) - C_{16}(x+2h/3)\right)}.$$

Із умови (13) випливає, що для кожного $l \in \mathbb{R}$ виконується $S(r+l) = S(r) + O(1)$, $r \in [1; +\infty)$. Тому при відповідному виборі сталих C_{17}, a, a_0 і b_0 функція $G(z) = C_{17}\exp(-az)g(z+a_0)$ буде аналітичною в $\mathbb{C}_+$ і в цій півплощині $|G(z)| \leq \exp(\gamma_*(x+b_0) - 2xS(r))$. Покажемо, що з (21) випливає (20), якщо $\tilde{\gamma}_*(x) = \gamma_*(x+b_0)$. Дійсно,

$$\tilde{\gamma}(x) = \sup_{t \geq 0}\{xt - \tilde{\gamma}_*(t)\} = \sup_{t \geq 0}\{xt - \gamma_*(t+b_0)\} =$$

$$= \sup_{m \geq 0}\{(m-b_0)x - \gamma_*(m)\} = -b_0 x + \gamma(x).$$

З умови (18) одержуємо $S(r) = O(\ln r)$, $r \to +\infty$. Отже,

$$\int_1^{+\infty} \frac{\tilde{\gamma}(2S(r)-b)}{r^2} dr = \int_1^{+\infty} \frac{\gamma(2S(r)-b)}{r^2} dr + O(1).$$

Тому функція $G(z)$ задовольняє вимоги наведеного вище твердження з [7, 8], а значить, $G \equiv 0$, $g \equiv 0$ і, отже, $\alpha \equiv 0$, що неможливо.

Зазначимо, що у випадку $\operatorname{Im}\lambda_n = 0$ і $\lambda_n \to +\infty$ теореми 5 і 4 доведено раніше відповідно в [8 і 9].

1. *Винницкий Б. В., Шаповаловский А. В.* О полноте систем экспонент с весом // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, № 12. – С. 1695–1700.
2. *Винницкий Б.В.* Про нулі деяких класів функцій, аналітичних в півплощині // Мат. студ. – 1996. – Вип. 6. – С. 67–72.
3. *Винер Н., Пэли Р.* Преобразование Фурье в комплексной области. – М.: Наука, 1964. – 268 с.
4. *Кусис П.* Введение в теорию пространств H^p. – М.: Наука, 1984. – 368 с.
5. *Винницкий Б. В.* О нулях функций, аналитических в полуплоскости и полноте систем экспонент // Укр. мат. журн. – 1994. – **45**, № 2. – С. 484–500.
6. *Говоров Н. В.* Краевая задача Римана с бесконечным индексом. – М.: Наука, 1986. – 240 с.
7. *Мандельбройт С.* Теоремы замкнутости и теоремы композиции. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 165 с.
8. *Malliavin P.* Sur Quelques procedes d'extrapolation // Acta Math. – 1955. – **93**, № 3–4. – P. 179–255.
9. *Fuchs W. N. J.* On the closure of $\{e^{-t}t^{a_\nu}\}$ // Proc. Cambridge Phil. Soc. – 1946. – **18**, № 2. – P. 91–105.

Одержано 01.06.98