УДК 517.5

Ан. С. Федоренко (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ПРИБЛИЖЕНИЕ КЛАССОВ $C_\infty^{\overline{\Psi}}$ СУММАМИ ЗИГМУНДА

We consider the approximation of functions from the classes of $\overline{\psi}$-integrals by the Zygmund sums. In particular, we present asymptotic equalities for variables $\varepsilon_n(C_\infty^{\overline{\Psi}}; Z_n)_C$ under various conditions on functions $\psi_1(\cdot)$ and $\psi_2(\cdot)$.

Розглядається наближення функцій класів $\overline{\psi}$-інтегралів сумами Зигмунда. Зокрема, наводяться асимптотичні рівності для величин $\varepsilon_n(C_\infty^{\overline{\Psi}}; Z_n)_C$ за різних умов на функції $\psi_1(\cdot)$, $\psi_2(\cdot)$.

Суммами Зигмунда непрерывной 2π-периодической функции $f(x)$ называют тригонометрические полиномы вида

$$Z_n^s(f;x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\left(\frac{k}{n}\right)^s\right)A_k(f;x), \qquad s>0,$$

где $A_k(f;x) = a_k\cos kx + b_k \sin kx$, a_k, b_k, $k = 0, 1, \ldots,$ — коэффициенты Фурье функции $f(\cdot)$.

Эти полиномы ввел и впервые изучал А. Зигмунд [1].

Следуя [2], через $C_\infty^{\overline{\Psi}}$ обозначим множество непрерывных 2π-периодических функций, представимых в виде свертки

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x-t)\Psi(t)\,dt = \frac{a_0}{2} + (f^{\overline{\Psi}} * \Psi)(x), \tag{1}$$

где $\Psi(x)$ — функция, имеющая ряд Фурье

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\psi_1(k)\cos kx + \psi_2(k)\sin kx), \tag{2}$$

$\overline{\Psi} = (\psi_1, \psi_2)$ — пара произвольных фиксированных систем чисел, а функция φ называется $\overline{\Psi}$-производной функции f и обозначается через $f^{\overline{\Psi}}$, $\|f^{\overline{\Psi}}\|_\infty \le 1$, $\int_{-\pi}^{\pi} f^{\overline{\Psi}}(x)\,dx = 0$.

В данной работе исследуется поведение величин

$$\varepsilon_n(C_\infty^{\overline{\Psi}}; Z_n^s)_C \overset{\text{def}}{=} \sup_{f\in C_\infty^{\overline{\Psi}}} \left\| f(x) - Z_n^s(f;x)\right\|_C, \tag{3}$$

где $\|f\|_C = \max\limits_x |f(x)|$, при $n\to\infty$.

Оказывается, что величина (3) существенным образом зависит от поведения функций $g_i(u) \overset{\text{def}}{=} u^s\psi_i(u)$, $i = 1, 2$, которые будем считать выпуклыми вверх или вниз. Возможны следующие случаи: а) $g_i(u)$ выпуклы вниз и $\lim\limits_{u\to\infty} g_i(u) = \infty$; б) $g_i(u)$ выпуклы вверх и $\lim\limits_{u\to\infty} g_i(u) = \infty$; в) $g_i(u)$ выпуклы вверх и $\lim\limits_{u\to\infty} g_i(u) = C > 0$; г) $g_i(u)$ выпуклы вниз и $\lim\limits_{u\to\infty} g_i(u) = C > 0$; д) $g_i(u)$ выпуклы вниз и $\lim\limits_{u\to\infty} g_i(u) = 0$, $i = 1, 2$.

Здесь и далее через $C_1, C_2 \ldots$ будем обозначать абсолютные константы, вообще говоря, различные.

Будем рассматривать случаи а) и б) при условии, что $\psi_1 \in \mathfrak{M}$, а $\psi_2 \in \mathfrak{M}'$, где $\mathfrak{M}$ — множество выпуклых вниз функций $\psi(u)$, удовлетворяющих условию $\lim\limits_{u\to\infty} \psi(u) = 0$, а $\mathfrak{M}'$ — множество функций $\psi \in \mathfrak{M}$, удовлетворяющих условию [2]

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\psi(k)|}{k} < \infty. \tag{4}$$

Теорема 1. *Пусть* $\psi_1(u) \in \mathfrak{M}$, $\psi_2(u) \in \mathfrak{M}'$, *функции* $u^s\psi_i(u)$ *выпуклы вниз и* $\lim\limits_{u\to\infty} u^s\psi_i(u) = \infty$, $i = 1, 2$. *Тогда при* $n \to \infty$ *справедливо асимптотическое равенство*

$$\varepsilon_n(C_\infty^{\overline{\psi}}; Z_n^s)_C = \overline{\psi}(n)A(\tau_n) + O(1)\frac{\overline{\psi}(n)}{n}, \tag{5}$$

при этом

$$\frac{2}{\pi\overline{\psi}(n)}\int_n^\infty \frac{|\psi_2(u)|}{u}\,du < A(\tau_n) < C + \frac{4}{\pi\overline{\psi}(n)}\int_n^\infty \frac{|\psi_2(u)|}{u}\,du, \tag{6}$$

$$\tau_{n,i}(u) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{(s-1)\psi_i(1) + \psi_i'(1)}{n^{s-2}\overline{\psi}(n)}u^2 + \dfrac{(2-s)\psi_i(1) - \psi_i'(1)}{n^{s-1}\overline{\psi}(n)}u, & 0 \le u \le 1/n; \\ \dfrac{u^s\psi_i(nu)}{\overline{\psi}(u)}, & 1/n \le u \le 1; \\ \dfrac{\psi_i(nu)}{\overline{\psi}(u)}, & 1 \le u < \infty, \quad i = 1, 2, \end{cases} \tag{7}$$

$\overline{\psi}(n) = (\psi_1^2(n) + \psi_2^2(n))^{1/2}$, $C = \text{const}$, *а* $O(1)$ — *величина, равномерно ограниченная по* n.

Теорема 2. *Пусть* $\psi_1(u) \in \mathfrak{M}$, $\psi_2(u) \in \mathfrak{M}'$, *функции* $u^s\psi_i(u)$ *выпуклы вверх и*

$$\int_1^n u^{s-1}\psi_i(u)\,du = O(1)n^s\psi_i(n), \quad i = 1, 2. \tag{8}$$

Тогда при $n \to \infty$ *справедливо асимптотическое равенство*

$$\varepsilon_n(C_\infty^{\overline{\psi}}; Z_n^s)_C = \overline{\psi}(n)A(\tau_n) + O(1)\frac{1}{n^s}, \tag{9}$$

при этом

$$\frac{2}{\pi\overline{\psi}(n)}\int_n^\infty \frac{|\psi_2(u)|}{u}\,du < A(\tau_n) < C_1 + \frac{4}{\pi\overline{\psi}(n)}\int_n^\infty \frac{|\psi_2(u)|}{u}\,du, \tag{10}$$

$$\tau_{n,i}(u) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\psi_i(1)}{\overline{\psi}(u)} n^{\psi_i'(1)/\psi_i(1)} u^{(s\psi_i(1)+\psi_i'(1))/\psi_i(1)}, & 0 \le u \le 1/n; \\ \dfrac{u^s \psi_i(nu)}{\overline{\psi}(u)}, & 1/n \le u \le 1; \\ \dfrac{\psi_i(nu)}{\overline{\psi}(u)}, & 1 \le u \le \infty, \quad i = 1, 2, \end{cases} \tag{11}$$

$\overline{\psi}(n) = (\psi_1^2(n) + \psi_2^2(n))^{1/2}$, $C = \mathrm{const}$, *а* $O(1)$ *— величина, равномерно ограниченная по* n.

Теоремы 1 и 2 в случае, когда $\psi_1(u) = \psi(u)\cos\dfrac{\beta\pi}{2}$, $\psi_2(u) = \psi(u)\sin\dfrac{\beta\pi}{2}$, $\beta = \mathrm{const}$, где $\psi(u) \in \mathfrak{M}'$, при $\beta = 2k$, $k \in Z$, доказаны Д. Н. Бушевым [3]. Доказательство этих теорем в рассматриваемом случае проводится по схеме, предложенной в [3], с учетом того факта, что отношение $\dfrac{\psi_1(n)}{\psi_2(n)}$ не является постоянным.

Примерами функций, удовлетворяющих условиям теорем 1 и 2, для которых $\dfrac{\psi_2}{\psi_1} \ne \mathrm{const}$, являются соответственно функции $\psi_1(u) = \dfrac{1}{\ln^{\alpha_1}(u+C)}$, $\psi_2(u) = \dfrac{1}{\ln^{\alpha_2}(u+C)}$, $\alpha_1, \alpha_2 > 1$ и $\psi_1(u) = \dfrac{1}{u^r}\ln^{\alpha_1}(u+C)$, $\psi_2(u) = \dfrac{1}{u^r}\ln^{\alpha_2}(u+C)$, $0 < \alpha_1, \alpha_2$, — любые действительные числа, $r \ne 0$, $s-1 \le r < s$, $C = \mathrm{const}$.

При доказательстве теорем 1 и 2 будем использовать следующее утверждение из [6].

Лемма [6]. *Пусть функции* $\tau_{n,i}(u)$, $i = 1, 2$, *заданы посредством соотношений* (7) *или* (11), *непрерывны при всех* $u \ge 0$ *и сходятся интегралы*

$$A(\tau_n) \overset{\mathrm{def}}{=} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_0^{\infty} (\tau_{n,1}(u)\cos ut + \tau_{n,2}(u)\sin ut)\, du \right| dt, \qquad n = 1, 2, \ldots .$$

Тогда при $n \to \infty$

$$\varepsilon_n(C_\infty^{\overline{\psi}}; Z_n^s)_C = \overline{\psi}(n) A(\tau_n) + \gamma(n), \tag{12}$$

где $\gamma(n) \le 0$,

$$|\gamma(n)| = O(1)\overline{\psi}(n) a(\tau_n), \qquad n \to \infty,$$

а

$$a(\tau_n) \overset{\mathrm{def}}{=} \int_{|t| \ge n\pi/2} \left| \int_0^{\infty} (\tau_{n,1}(u)\cos ut + \tau_{n,2}(u)\sin ut)\, du \right| dt. \tag{13}$$

Доказательство теоремы **1.** Докажем, что интегралы $A(\tau_n)$ сходятся. В [3, с. 23, 31] показано, что

$$\left| \int_0^{\infty} (\tau_{n,1}(u)\cos ut \pm \tau_{n,2}(u)\sin ut)\, du \right| dt \le \frac{C_2}{t^2}. \tag{14}$$

Поэтому

$$a(\tau_n) = O(1)\left(\frac{1}{n}\right), \tag{15}$$

и

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|>\pi}\left|\int\limits_0^\infty (\tau_{n,1}(u)\cos ut + \tau_{n,2}(u)\cos ut)\,du\right| dt \le C_3. \tag{16}$$

Далее положим

$$\mathcal{J}_1^1(t) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \tau_{n,1}(u)\cos ut\,du, \qquad \mathcal{J}_2^1(t) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \tau_{n,2}(u)\sin ut\,du.$$

Имеем

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|\int\limits_0^\infty (\tau_{n,1}(u)\cos ut + \tau_{n,2}(u)\sin ut)\,du\right| dt \le$$

$$\le \int\limits_0^\pi \left|\mathcal{J}_1^1(t)\right|dt + \int\limits_0^\pi \left|\mathcal{J}_2^1(t)\right|dt + \int\limits_{-\pi}^0 \left|\mathcal{J}_1^1(t)\right|dt + \int\limits_{-\pi}^0 \left|\mathcal{J}_2^1(t)\right|dt. \tag{17}$$

Пользуясь оценками из [4, с. 65; 5, с. 389], убеждаемся, что

$$\int\limits_0^\pi \left|\mathcal{J}_1^1(t)\right|dt + \int\limits_0^\pi \left|\mathcal{J}_2^1(t)\right|dt = \frac{2}{\overline{\psi}(n)\pi}\int\limits_n^\infty \frac{|\psi_2(u)|}{u}\,du + O(1) \tag{18}$$

и

$$\int\limits_{-\pi}^0 \left|\mathcal{J}_1^1(t)\right|dt + \int\limits_{-\pi}^0 \left|\mathcal{J}_2^1(t)\right|dt = \frac{2}{\overline{\psi}(n)\pi}\int\limits_n^\infty \frac{|\psi_2(u)|}{u}\,du + O(1), \tag{19}$$

где $O(1)$ — величина, равномерно ограниченная по n. Объединяя соотношения (19), (18), (17) и (16), получаем

$$A(\tau_n) < C + \frac{4}{\overline{\psi}(n)\pi}\int\limits_n^\infty \frac{|\psi_2(u)|}{u}\,du. \tag{20}$$

Для получения оценки снизу величины $A(\tau_n)$ рассмотрим функцию f, для которой $f^{\overline{\psi}}(t) = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^\infty \frac{\sin kt}{k}$. Придерживаясь схемы доказательства теоремы 1. 3. 1 из [3] и проводя несложные вычисления, получаем

$$A(\tau_n) \ge \frac{1}{\overline{\psi}(n)}\,\varepsilon_n(C^{\overline{\psi}}_\infty; Z_n^s)_C \ge \frac{1}{\overline{\psi}(n)}\left\|f(x) - Z_n^s(f;x)\right\|_C \ge$$

$$\ge \frac{2}{\pi\overline{\psi}(n)}\int\limits_n^\infty \frac{|\psi_2(u)|}{u}\,du. \tag{21}$$

Объединяя соотношения (20) и (21), имеем

$$\frac{2}{\pi\overline{\psi}(n)}\int\limits_n^\infty \frac{|\psi_2(u)|}{u}\,du < A(\tau_n) < C + \frac{4}{\overline{\psi}(n)\pi}\int\limits_n^\infty \frac{|\psi_2(u)|}{u}\,du. \tag{22}$$

Далее, учитывая соотношения (22), (15) и используя лемму, устанавливаем справедливость теоремы.

Доказательство теоремы 2. Доказательство проводится по той же схеме, что и доказательство теоремы 1. 3. 2 из [3]. Отметим лишь его узловые моменты.

Пользуясь оценками из работы [3, с. 35], можно показать, что

$$\left| \int_0^\infty (\tau_{n,1}(u)\cos ut - \tau_{n,2}(u)\sin ut)\,du \right| \le \frac{1}{t^2}\left(C_4 + \frac{C_5}{n^{s-1}\overline{\psi}(n)} \right) \tag{23}$$

и

$$\left| \int_0^\infty (\tau_{n,1}(u)\cos ut + \tau_{n,2}(u)\sin ut)\,du \right| \le \frac{1}{t^2}\left(C_4 + \frac{C_5}{n^{s-1}\overline{\psi}(n)} \right), \tag{24}$$

откуда, повторяя ход доказательства теоремы 1. 3. 2 из [3], получаем

$$a(\tau_n) = O\left(\frac{1}{\overline{\psi}(n)n^s} \right). \tag{25}$$

Далее, проводя рассуждения, аналогичные тем, которые использовались при доказательстве теоремы 1. 3. 2 из [3], а также учитывая соотношения (18), (19) и (21), можно показать, что

$$\frac{2}{\pi\overline{\psi}(n)} \int_n^\infty \frac{|\psi_2(u)|}{u}\,du < A(\tau_n) < C_1 + \frac{4}{\overline{\psi}(n)\pi} \int_n^\infty \frac{|\psi_2(u)|}{u}\,du. \tag{26}$$

Используя лемму и соотношения (25), (26), устанавливаем справедливость теоремы.

1. *Zygmund A.* The approximation of functions by typical means of their Fourier series // Duke Math. J. – 1945. – **12**. – P. 695–704.
2. *Степанец А. И.* Скорость сходимости рядов Фурье на классах $\overline{\psi}$-интегралов // Укр. мат. журн. – 1997. – **49**, № 8. – С. 1069–1113.
3. *Бушев Д. Н.* Приближение классов непрерывных периодических функций суммами Зигмунда. – Киев, 1984. – 64 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 84.56).
4. *Степанец А. И.* Классификация и приближение периодических функций. – Киев: Наук. думка, 1987. – 286 с.
5. *Степанец А. И.* Приближение $\overline{\psi}$-интегралов периодических функций суммами Фурье (небольшая гладкость). II //Укр. мат. журн. – 1997. – **50**, № 3. – С. 388–400.
6. *Рукасов В. И., Чайченко С. О.* Приближение $\overline{\psi}$-интегралов 2π-периодических функций суммами Валле–Пуссена // Ряди Фур'є: теорія і застосування. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1998. – С. 242–254.

Получено 08.06.99