УДК 517.5

А. И. Степанец, А. С. Сердюк (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

НЕРАВЕНСТВА ЛЕБЕГА ДЛЯ ИНТЕГРАЛОВ ПУАССОНА

We obtain estimates of deviations of the partial Fourier sums on sets of Poisson integrals of functions from a space L_p, $p \geq 1$, which are represented in terms of values of the best approximations of functions of this sort by trigonometric polynomials in the metric of L_p. We show that the estimates obtained are unimprovable on some important functional subsets.

Одержано оцінки відхилень часткових сум Фур'є на множинах інтегралів Пуассона функцій з простору L_p, $p \geq 1$, що виражаються через значення найкращих наближень таких функцій тригонометричними многочленами в метриці L_p. Показано непокращуваність отриманих оцінок на деяких важливих функціональних підмножинах.

1. Обозначения и основные результаты. Пусть $f(\cdot)$ — 2π-периодическая интегрируемая на периоде функция $(f \in L)$ и

$$S[f] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

— ее ряд Фурье.

Интегралом Пуассона функции $\varphi \in L$ называют функцию $f(x)$, которая задается равенством

$$f(x) = \mathcal{J}_\beta^q(\varphi; x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(x+t)\, \mathcal{P}_\beta^q(t)\, dt, \tag{1}$$

где

$$\mathcal{P}_\beta^q(t) = \sum_{k=1}^{\infty} q^k \cos\left(kt + \frac{\beta\pi}{2}\right)$$

— ядро Пуассона с параметрами $q \in (0, 1)$ и $\beta \in R^1$.

Множество всех функций, представимых в виде (1) при $\varphi \in L$, обозначается через L_β^q; множество функций, представимых в виде (1) при $\varphi \in \mathfrak{N}$, где $\mathfrak{N}$ — некоторое подмножество из L, обозначается через $L_\beta^q \mathfrak{N}$ (так что при $\mathfrak{N} = L$ $L_\beta^q \mathfrak{N} = L_\beta^q$). Функцию $\varphi(\cdot)$ в представлении (1) иногда удобно обозначать через $f_\beta^q(\cdot)$ и называть (q, β)-производной функции $f(\cdot)$.

Как обычно, L_p, $1 \leq p \leq \infty$, обозначает пространство функций $f \in L$ с конечной нормой $\|f\|_p$, где при $p \in [1, \infty)$

$$\|f\|_p = \|f\|_{L_p} = \left(\int_0^{2\pi} |f(t)|^p\, dt \right)^{1/p},$$

так что $L_1 = L$, а при $p = \infty$

$$\|f\|_\infty \overset{\mathrm{df}}{=} \|f\|_M = \operatorname{ess\,sup} |f(t)|.$$

Единичный шар в L_p обозначаем через U_p, $U_p = \{f\colon f \in L_p,\ \|f\|_p \leq 1\}$, кроме того, полагаем $L_\beta^q U_p = L_{\beta,p}^q$.

Подмножество непрерывных функций из множества L обозначается через C; $\|\cdot\|_C$ — норма в пространстве C:

$$\|f\|_C = \max_t |f(t)|.$$

Отметим также (см., например, [1, с. 88]), что функции, представимые равенствами (1), допускают аналитическое продолжение до функций $f(z) = f(x+iy)$, аналитических в полосе $|y| \leq \ln\frac{1}{q}$.

Пространство тригонометрических полиномов $t_{n-1}(\cdot)$, порядок которых не превышает $n-1$, обозначается через $\mathcal{T}_{2n-1}$; величина

$$E_n(f)_p = \inf_{t_{n-1}\in\mathcal{T}_{2n-1}} \|f(\cdot) - t_{n-1}(\cdot)\|_p$$

— наилучшее приближение $f(\cdot)$ в пространстве L_p тригонометрическими полиномами из $\mathcal{T}_{2n-1}$.

Пусть, наконец, $f\in L$, $S_n(f;x)$ — частная сумма порядка n ряда Фурье функции f и

$$\rho_n(f;x) = f(x) - S_{n-1}(f;x). \tag{2}$$

Основные результаты настоящей работы содержатся в следующем утверждении.

Теорема 1. *Пусть $q\in(0,1)$, $\beta\in R^1$ и $p\geq 1$. Тогда для произвольной функции $f\in L^q_\beta L_p$ справедливо асимптотическое неравенство*

$$\|\rho_n(f;x)\|_p \leq \left(\frac{8q^n}{\pi^2}\boldsymbol{K}(q) + \frac{q^n O(1)}{(1-q)^2 n}\right) E_n(f^q_\beta)_p, \tag{3}$$

в котором $\boldsymbol{K}(q)$ — полный эллиптический интеграл первого рода:

$$\boldsymbol{K}(q) = \int_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{1-q^2\sin^2 u}},$$

а $O(1)$ — величина, равномерно ограниченная по параметрам q, β, p, n и по $f\in L^q_\beta L_p$.

Неравенства вида (3) для других классов функций установлены в [2]. Там же было обращено внимание на то, что такие неравенства являются точными на некоторых важных подмножествах рассматриваемых функций. Отметим ряд таких случаев для оценки (3).

Если $f\in L^q_{\beta,p}$, то $\|f^q_\beta\|_p \leq 1$ и, следовательно, $E_n(f^q_\beta)_p \leq 1$. Рассматривая верхние грани обеих частей (3) по множествам $L^q_{\beta,p}$, получаем

$$\mathcal{E}_n(L^q_{\beta,p})_p = \sup_{f\in L^q_{\beta,p}} \|\rho_n(f;x)\|_p \leq \frac{8q^n}{\pi^2}\boldsymbol{K}(q) + \frac{O(1)q^n}{(1-q)^2 n}, \quad p\geq 1. \tag{3$'$}$$

Сопоставляя это соотношение с результатами С. М. Никольского [3, с. 221] (см. также [4; 5, с. 126]), который показал, что

$$\mathcal{E}_n(L^q_{\beta,p})_p = \frac{8q^n}{\pi^2}\boldsymbol{K}(q) + \frac{O(1)q^n}{n}, \quad p=1, \quad p=\infty,$$

заключаем, что при $p=1$ и $p=\infty$ соотношение (3$'$) является равенством.

Другой пример неулучшаемости оценки (3) дается следующими утверждениями — аналогами теорем 2 и 2′ из [2, с. 503].

Теорема 2. *Пусть* $q \in (0, 1)$, $\beta \in R^1$ *и* $L^q_\beta C$ *— множество интегралов Пуассона всех непрерывных функций. Тогда если* $f \in L^q_\beta C$, *то*

$$\| \rho_n(f; x) \|_C = \| \rho_n(f; x) \|_\infty \le \left(\frac{8q^n}{\pi^2} \boldsymbol{K}(q) + \frac{O(1)\, q^n}{(1-q)^2 n} \right) E_n(f^q_\beta)_C . \tag{4}$$

При этом для любой функции $f \in L^q_\beta C$ *при каждом натуральном* n *в пространстве* $L^q_\beta C$ *найдется функция* $F(x) = F(f; n; x)$ *такая, что* $E_n(F^q_\beta)_C = E_n(f^q_\beta)_C$ *и для нее выполняется равенство*

$$\| \rho_n(F; x) \|_C = \left(\frac{8q^n}{\pi^2} \boldsymbol{K}(q) + \frac{O(1)\, q^n}{(1-q)^2 n} \right) E_n(F^q_\beta)_C . \tag{5}$$

В (4) *и* (5) $O(1)$ *— величины, равномерно ограниченные по параметрам* n, q, β *и по* $f \in L^q_\beta C$.

Пусть $\varepsilon = \varepsilon_n$, $n \in N$, — произвольная монотонно убывающая к нулю последовательность неотрицательных чисел. Через $C_n(\varepsilon)$ обозначим множество непрерывных функций $\varphi \in C$, для которых при данном n выполняется неравенство $E_n(\varphi)_C \le \varepsilon_n$; через $L^q_\beta C_n(\varepsilon)$ — множество интегралов Пуассона $\mathcal{J}^q_\beta(\varphi; \cdot)$ функций φ из $C_n(\varepsilon)$. Тогда из теоремы 2 получаем следующее утверждение.

Теорема 2′. *Пусть* $q \in (0, 1)$, $\beta \in R^1$. *Тогда для любого класса* $L^q_\beta C_n(\varepsilon)$ *при любом* $n \in N$

$$\mathscr{E}_n(L^q_\beta C_n(\varepsilon))_C = \left(\frac{8q^n}{\pi^2} \boldsymbol{K}(q) + \frac{O(1)\, q^n}{(1-q)^2 n} \right) \varepsilon_n ,$$

где $O(1)$ *— величина, равномерно ограниченная по* n, q *и* β.

Действительно, если $f \in L^q_\beta C_n(\varepsilon)$, то $f^q_\beta(\cdot)$ непрерывна и $E_n(f^q_\beta)_C \le \varepsilon_n$. Поэтому на основании (4) имеем

$$\| \rho_n(f; x) \|_C \le \left(\frac{8q^n}{\pi^2} \boldsymbol{K}(q) + \frac{O(1)\, q^n}{(1-q)^2 n} \right) \varepsilon_n \qquad \forall f \in L^q_\beta C_n(\varepsilon) .$$

С другой стороны, для функции $F(x)$ из теоремы 2, построенной по функции $\varphi \in C_n(\varepsilon)$ такой, что $E_n(\varphi) = \varepsilon_n$, это неравенство переходит в равенство. Отсюда и следует теорема 2′.

Доказательство теоремы **1.** Вследствие (1) и (2), если $f \in L^q_\beta$, то

$$\rho_n(f; x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f^q_\beta(x+t)\, \mathcal{P}^q_{\beta,n}(t)\, dt ,$$

где

$$\mathcal{P}^q_{\beta,n}(t) = \sum_{k=n}^{\infty} q^k \cos\left(kt + \frac{\beta\pi}{2} \right). \tag{6}$$

Функция $\mathcal{P}^q_{\beta,n}(\cdot)$ ортогональна любому полиному $t_{n-1} \in \mathcal{T}_{2n-1}$. Поэтому

$$\rho_n(f;x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \delta_n(x+t)\,\mathcal{P}^q_{\beta,n}(t)\,dt, \qquad \delta_n(\tau) = f^q_\beta(\tau) - t_{n-1}(\tau), \tag{7}$$

где $t_{n-1}(\cdot)$ — произвольный полином из $\mathcal{T}_{2n-1}$.

Далее в силу (6) имеем

$$\mathcal{P}^q_{\beta,n}(t) = q^n\left[g(t)\cos\left(nt + \frac{\beta\pi}{2}\right) - h(t)\sin\left(nt + \frac{\beta\pi}{2}\right)\right],$$

где

$$g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} q^k \cos kt = \frac{1 - q\cos t}{1 - 2q\cos t + q^2}, \tag{8}$$

$$h(t) = \sum_{k=1}^{\infty} q^k \sin kt = \frac{q\sin t}{1 - 2q\cos t + q^2}. \tag{8$'$}$$

Таким образом,

$$\mathcal{P}^q_{\beta,n}(t) = \frac{q^n}{P_q(x)}\left((1 - q\cos t)\cos\left(nt + \frac{\beta\pi}{2}\right) - q\sin t\sin\left(nt + \frac{\beta\pi}{2}\right)\right), \tag{9}$$

где

$$P_q(x) = 1 - 2q\cos x + q^2. \tag{10}$$

Заметив, что

$$(1 - q\cos t)^2 + q^2\sin^2 t = P_q(t),$$

определим функцию $\theta(t)$ равенствами

$$\frac{1 - q\cos t}{\sqrt{P_q(t)}} = \cos\theta(t), \qquad \frac{q\sin t}{\sqrt{P_q(t)}} = \sin\theta(t),$$

так что

$$\theta(t) = \operatorname{arctg}\frac{q\sin t}{1 - q\cos t}. \tag{11}$$

Тогда в силу (9)

$$\mathcal{P}^q_{\beta,n}(t) = \frac{q^n}{\sqrt{P_q(t)}}\cos\left(nt + \theta(t) + \frac{\beta\pi}{2}\right). \tag{12}$$

Объединяя (7) и (12), находим

$$\rho_n(f;x) = \frac{q^n}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \delta_n(x+t)\,\frac{\cos\left(nt + \theta(t) + \dfrac{\beta\pi}{2}\right)}{\sqrt{P_q(t)}}\,dt. \tag{13}$$

Правая часть в (13) является 4-периодической функцией по параметру β. Поэтому в дальнейшем достаточно считать, что $\beta \in [0, 4)$.

Далее, положим

$$\tau = y_1(t) = t + \frac{\theta(t) + t + \dfrac{\beta\pi}{2}}{n-1}, \qquad n \ge 2. \tag{14}$$

Учитывая равенство (11), находим

$$y_1'(t) \;=\; 1 + \frac{1 - q\cos t}{(n-1)\,P_q(t)} \;=\; \frac{P_{q,n}(t)}{P_q(t)},$$

где

$$P_{q,n}(t) \;=\; \frac{n}{n-1} - \frac{2n-1}{n-1}\,q\cos t + q^2. \tag{15}$$

Отсюда видно, что всегда $y_1'(t) > 1$, так что $y_1(t)$ строго возрастает и, значит, у нее существует обратная функция $t = y(\tau) = y_1^{-1}(\tau)$, определенная на всей оси, при этом

$$y'(\tau) \;=\; \frac{P_q(y(\tau))}{P_{q,n}(y(\tau))}. \tag{16}$$

Следовательно, при всех $\tau \in R^1$ и $q \in (0, 1)$

$$0 < y'(\tau) < 1. \tag{17}$$

Полагая в интеграле в (13) $\tau = y(\tau)$, с учетом равенства (15) получаем

$$\rho_n(f; x) = \frac{q^n}{\pi}\int\limits_{y_1(0)}^{y_1(2\pi)} \delta_n(x + y(\tau))\,\frac{\sqrt{P_q(y(\tau))}}{P_{q,n}(y(\tau))}\cos(n-1)\tau\,d\tau.$$

Пусть

$$r_n^{(1)}(\tau) \;=\; \frac{\sqrt{P_q(y(\tau))}}{P_{q,n}(y(\tau))} - \frac{1}{\sqrt{P_q(y(\tau))}}. \tag{18}$$

Тогда

$$\rho_n(f; x) = \frac{q^n}{\pi}\int\limits_{y_1(0)}^{y_1(2\pi)} \delta_n(x + y(\tau))\,\frac{\cos(n-1)\tau}{\sqrt{P_q(y(\tau))}}\,d\tau + R_n^{(1)}(f) \qquad \forall f \in L_\beta^q, \tag{19}$$

где

$$R_n^{(1)}(f) \;=\; \frac{q^n}{\pi}\int\limits_{y_1(0)}^{y_1(2\pi)} \delta_n(x + y(\tau))\,r_n^{(1)}(\tau)\cos(n-1)\tau\,d\tau.$$

С учетом равенств (10), (15) и (8) находим

$$|r_n^{(1)}(t)| \;=\; \frac{\left|1 - 2q\cos y(\tau) - \dfrac{n}{n-1} + \dfrac{2n-1}{n-1}\,q\cos y(\tau)\right|}{\left(\dfrac{n}{n-1} - \dfrac{2n-1}{n-1}\,q\cos y(\tau) + q^2\right)\sqrt{1 - 2q\cos y(\tau) + q^2}} \le$$

$$\le \frac{1 - q\cos y(\tau)}{(n-1)(1-q)(1 - 2q\cos y(\tau) + q^2)} \le \frac{1}{(1-q)^2(n-1)}, \qquad n \ge 2. \tag{20}$$

Поэтому, применяя обобщенное неравенство Минковского

$$\left(\int\limits_a^b\left|\int\limits_c^d f(x,y)\,dy\right|^p dx\right)^{1/p} \le \int\limits_c^d\left(\int\limits_a^b |f(x,y)|^p\,dx\right)^{1/p} dy, \qquad 1 \le p < \infty, \tag{21}$$

при $p \in [1, \infty)$ получаем

$$\|R_n^{(1)}(f)\|_p \le \frac{q^n}{\pi}\|r_n^{(1)}\|_M \left(\int_0^{2\pi}\left(\int_{y_1(0)}^{y_1(2\pi)} |\delta_n(x+y(\tau))|\,d\tau\right)^p dx\right)^{1/p} \le$$

$$\le \frac{q^n}{\pi}\|r_n^{(1)}\|_M \int_{y_1(0)}^{y_1(2\pi)}\left(\int_0^{2\pi} |\delta_n(x+y(\tau))|^p\,dx\right)^{1/p} d\tau =$$

$$= \frac{q^n}{\pi}\|r_n^{(1)}\|_M \|\delta_n(\cdot)\|_p (y_1(2\pi) - y_1(0)) \le$$

$$\le \frac{q^n 2\|\delta_n(\cdot)\|_p \left(1+\dfrac{1}{n-1}\right)}{(n-1)(1-q)^2}, \qquad n \ge 2,$$

поскольку вследствие (14) и (11)

$$y_1(2\pi) - y_1(0) = 2\pi\left(1+\frac{1}{n-1}\right). \tag{22}$$

Ясно, что такая же оценка для $\|R_n^{(1)}(f)\|_p$ верна и при $p=\infty$. Таким образом,

$$\|R_n^{(1)}(f)\|_p \le \frac{q^n 2\|\delta_n(\cdot)\|_p \left(1+\dfrac{1}{n-1}\right)}{(n-1)(1-q)^2} \qquad \forall\, p \ge 1. \tag{23}$$

Пусть теперь $x_k = \dfrac{k\pi}{n-1}$, $k = 0, \pm 1, \ldots$. Так как $y_1(0) = \dfrac{\beta\pi}{2(n-1)}$, $y_1(2\pi) = 2\pi + \dfrac{2\pi}{n-1} + \dfrac{\beta\pi}{2(n-1)}$, то при $k = 2, \ldots, 2n$ все точки x_k лежат на промежутке $[y_1(0), y_1(2\pi)]$, причем

$$x_2 - y_1(0) \le \frac{2\pi}{n-1}, \qquad y_1(2\pi) - x_{2n} \le \frac{2\pi}{n-1}. \tag{24}$$

Определим функцию $l_n(\tau) = l_{n,q}(\tau)$, положив

$$l_n(\tau) =$$

$$= \begin{cases} \left(P_q(y(\tau_k))\right)^{-1/2}, & \tau \in [x_k, x_{k+1}],\ \tau_k = x_k + \dfrac{\pi}{2(n-1)},\ k = 2, \ldots, 2n-1; \\ 0, & \tau \in [y_1(0), x_2) \cup (x_{2n}, y_1(2\pi)]. \end{cases} \tag{25}$$

Тогда в силу (19)

$$\rho_n(f;x) = \frac{q^n}{\pi}\int_{x_2}^{x_{2n}} \delta_n(x+y(\tau))\, l_n(\tau)\cos(n-1)\tau\, d\tau +$$

$$+ R_n^{(1)}(f) + R_n^{(2)}(f) \qquad \forall f \in L_\beta^q, \tag{26}$$

где

$$R_n^{(2)}(f) = \frac{q^n}{\pi}\int_{y_1(0)}^{y_1(2\pi)} \delta_n(x+y(\tau))\, r_n^{(2)}(\tau)\cos(n-1)\tau\, d\tau \tag{27}$$

и $r_n^{(2)}(\tau) = \left(P_q(y(\tau_k))\right)^{-1/2} - l_n(\tau)$. На промежутках $[y_1(0), x_2)$ и $(x_{2n}, y_1(2\pi)]$

$$|r_n^{(2)}(\tau)| = \left|\frac{1}{\sqrt{P_q(y(\tau))}}\right| \le \frac{1}{1-q}. \tag{28}$$

На промежутке $[x_2, x_{2n}]$

$$|r_n^{(2)}(\tau)| \le \frac{\pi}{2(n-1)} \max_{t \in [x_2, x_{2n}]} \left|\left(\frac{1}{\sqrt{P_q(y(\tau))}}\right)'\right|. \tag{29}$$

Так как с учетом (17)

$$\left|\left(\frac{1}{\sqrt{P_q(y(\tau))}}\right)'\right| = \left|\frac{q \sin y(\tau)\, y'(\tau)}{(P_q(y(\tau)))^{3/2}}\right| \le$$

$$\le \frac{y'(\tau)}{\sqrt{1-2q+q^2}} \left|\frac{q \sin y(\tau)}{P_q(y(\tau))}\right| \le \frac{1}{1-q} \left|\frac{q \sin y(\tau)}{P_q(y(\tau))}\right|,$$

то на основании соотношения (8′) получаем

$$\max_{t \in [y_1(0), y_1(2\pi)]} \left|\left(\frac{1}{\sqrt{P_q(y(\tau))}}\right)'\right| \le \frac{1}{(1-q)^2}. \tag{30}$$

Следовательно, согласно (29) и (30)

$$|r_n^{(2)}(\tau)| \le \frac{\pi q}{2(n-1)(1-q)^2}, \qquad \tau \in [x_2, x_{2n}]. \tag{31}$$

Учитывая (28) и (31), в силу (27) и (20) для каждой $f \in L_\beta^q$ имеем

$$\|R_n^{(2)}(f)\|_p \le \frac{q^n}{\pi} \left[\left\| \int_{y_1(0)}^{x_2} \delta_n(x + y(\tau))\, r_n^{(2)}(\tau) \cos(n-1)\tau \, d\tau \right\|_p + \right.$$

$$+ \left\| \int_{x_2}^{x_{2n}} \delta_n(x + y(\tau))\, r_n^{(2)}(\tau) \cos(n-1)\tau \, d\tau \right\|_p +$$

$$\left. + \left\| \int_{x_{2n}}^{y_1(2\pi)} \delta_n(x + y(\tau))\, r_n^{(2)}(\tau) \cos(n-1)\tau \, d\tau \right\|_p \right] \le$$

$$\le \frac{q^n}{\pi} \left[\frac{1}{1-q} \|\delta_n\|_p [x_2 - y_1(0) + y_1(2\pi) - x_{2n}] + \right.$$

$$\left. + \frac{\pi q}{2(n-1)(1-q)^2} \|\delta_n\|_p (x_{2n} - x_2) \right] \le \frac{q^n}{(n-1)(1-q)} \|\delta_n\|_p \left(4 + \frac{\pi q}{1-q}\right) =$$

$$= O(1) \frac{q^n \|\delta_n\|_p}{(1-q)^2 n}, \qquad n \ge 2, \quad p \in [1, \infty). \tag{32}$$

Здесь и в дальнейшем $O(1)$ — величина, равномерно ограниченная по всем рассматриваемым параметрам. Понятно, что такая же оценка верна и при $p=\infty$. Объединяя соотношения (26), (23) и (32), для любого $p\geq 1$ получаем

$$\|\rho_n(f;x)\|_p = \frac{q^n}{\pi}\left\|\int\limits_{x_2}^{x_{2n}} \delta_n(x+y(\tau))\, l_n(\tau)\cos(n-1)\tau\, d\tau\right\|_p + $$

$$+ O(1)\frac{q^n\|\delta_n\|_p}{(1-q)^2 n}. \tag{33}$$

Пусть $\mathcal{J}_n(f)$ обозначает интеграл в последнем выражении. Тогда с учетом (25) имеем

$$\mathcal{J}_n(f) = \sum_{k=2}^{2n-1}(P_q(y(\tau_k)))^{-1/2}\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}\delta_n(x+y(\tau))\cos(n-1)\tau\, d\tau.$$

Применяя неравенство (21), находим

$$\left\|\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}\delta_n(x+y(\tau))\cos(n-1)\tau\, d\tau\right\|_p \leq$$

$$\leq \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}|\cos(n-1)\tau|\left(\int\limits_0^{2\pi}|\delta_n(x+y(\tau))|^p dx\right)^{1/p} d\tau =$$

$$= \|\delta_n\|_p \int\limits_{k\pi/(n-1)}^{(k+1)\pi/(n-1)}|\cos(n-1)\tau|\, d\tau = \frac{2\|\delta_n\|_p}{n-1}, \qquad 1\leq p<\infty.$$

Ясно, что такая же оценка верна и при $p=\infty$. Поэтому при любом $p\geq 1$

$$\|\mathcal{J}_n(f)\|_p \leq \frac{2\|\delta_n\|_p}{n-1}\sum_{k=2}^{2n-1}(P_q(y(\tau_k)))^{-1/2}. \tag{34}$$

Поскольку

$$\frac{\pi}{n-1}\sum_{k=2}^{2n-1}(P_q(y(\tau_k)))^{-1/2} = \int\limits_{x_2}^{x_{2n}} l_n(\tau)\, d\tau, \tag{35}$$

то

$$\frac{\pi}{n-1}\sum_{k=2}^{2n-1}(P_q(y(\tau_k)))^{-1/2} = \int\limits_{y_1(0)}^{y_1(2\pi)}(P_q(y(\tau)))^{-1/2} d\tau + R_n^{(2)}, \tag{36}$$

где

$$R_n^{(2)} = -\int\limits_{y_1(0)}^{y_1(2\pi)} r_n^{(2)}(\tau)\, d\tau$$

и, следовательно, в силу (28), (24) и (31)

$$|R_n^{(2)}| \leq \frac{4\pi}{(1-q)(n-1)} + \frac{\pi^2 q}{(n-1)(1-q)^2} = O(1)\frac{1}{(1-q)^2 n}, \qquad n\geq 2. \tag{37}$$

Далее имеем

$$\int\limits_{y_1(0)}^{y_1(2\pi)} (P_q(y(\tau)))^{-1/2}\, d\tau = \int\limits_0^{2\pi} (P_q(t))^{-1/2}\, dt + R_n^{(1)}, \tag{38}$$

где с учетом (18)

$$R_n^{(1)} = -\int\limits_{y_1(0)}^{y_1(2\pi)} r_n^{(1)}(\tau)\, d\tau. \tag{39}$$

Следовательно, согласно (20) и (22)

$$|R_n^{(1)}| \le \frac{2\pi\left(1+\dfrac{1}{n-1}\right)}{(1-q)^2(n-1)}, \qquad n \ge 2. \tag{40}$$

Таким образом, вследствие (35) – (40) находим

$$\frac{\pi}{n-1}\sum_{k=2}^{2n-1} (P_q(y(\tau_k)))^{-1/2} = \int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{\sqrt{1-2q\cos t+q^2}} + O(1)\frac{1}{(1-q)^2 n}.$$

Но

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{\sqrt{1-2q\cos t+q^2}} = 4\boldsymbol{K}(q).$$

Поэтому окончательно имеем

$$\frac{\pi}{n-1}\sum_{k=2}^{2n-1} (P_q(y(\tau_k)))^{-1/2} = 4\boldsymbol{K}(q) + O(1)\frac{1}{(1-q)^2 n}. \tag{41}$$

Значит, согласно (34),

$$\|\mathcal{J}_n(f)\|_p \le \frac{8}{\pi}\left(\boldsymbol{K}(q) + O(1)\frac{1}{(1-q)^2 n}\right)\|\delta_n\|_p. \tag{42}$$

Выбирая в качестве $t_{n-1}(\cdot)$ в (7) многочлен $t_{n-1}^*(\cdot)$, осуществляющий наилучшее приближение функции $f_\beta^q(\cdot)$ в пространстве L_p, и объединяя соотношения (33) и (42), получаем оценку (3).

***Доказательство теоремы* 2.** Поскольку $C \subset L_\infty$ и для функции $f \in C$ $\|f\|_\infty = \|f\|_C$, то оценка (4) является следствием (3). Поэтому остается доказать вторую часть теоремы. В рассматриваемом случае равенство (33) принимает вид

$$\|\rho_n(f;x)\|_C = \frac{q^n}{\pi}\left\|\int\limits_{x_2}^{x_{2n}} \delta_n(x+y(\tau))\, l_n(\tau)\cos(n-1)\tau\, d\tau\right\|_C + $$

$$+ O(1)\frac{q^n\|\delta_n\|_C}{(1-q)^2 n}. \tag{43}$$

Следовательно, требуемое утверждение будет доказано, если показать, что для любой функции $\varphi \in C$ можно указать непрерывную функцию $\Phi(x) = \Phi(\varphi; x)$, для которой при всех $n \ge 2$ выполняются равенства $E_n(\Phi)_C = E_n(\varphi)_C$ и

$$\frac{q^n}{\pi}\left|\int\limits_{x_2}^{x_{2n}}[\Phi(y(\tau)) - \tau^*_{n-1}(y(\tau))]\,l_n(\tau)\cos(n-1)\tau\,d\tau\right| =$$

$$= \left(\frac{8q^n}{\pi^2}K(q) + O(1)\frac{q^n}{(1-q)^2 n}\right)E_n(\varphi)_C,$$

где $t^*_{n-1}(\cdot)$ — многочлен наилучшего приближения функции $\Phi(\cdot)$ в пространстве C. Будем поступать подобно тому, как это делалось в [2, с. 507].

С этой целью положим $t_k = y(x_k)$, $z_k = y(\tau_k)$, $k = 2, \ldots, 2n$. Ясно, что

$$0 < t_2 < z_2 < t_3 < \ldots < z_{2n-1} < t_{2n} \leq 2\pi. \tag{44}$$

Отправляясь от данной функции $\varphi \in C$, на промежутке $[t_2, t_{2n}]$ определим функцию $\varphi_0(t)$, положив

$$\varphi_0(t) = E_n(\varphi)_C \operatorname{sign}\cos[(n-1)y_1(t)].$$

Для этой функции

$$\left|\int\limits_{x_2}^{x_{2n}}\varphi_0(y(\tau))\,l_n(\tau)\cos(n-1)\tau\,d\tau\right| =$$

$$= \sum_{k=2}^{2n-1} l_n(\tau_k)\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}\varphi_0(t)\cos[(n-1)y_1(t)]\,y_1'(t)\,dt =$$

$$= \sum_{k=2}^{2n-1} l_n(\tau_k)\,E_n(\varphi)_C\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}|\cos[(n-1)y_1(t)]|\,y_1'(t)\,dt =$$

$$= E_n(\varphi)_C\sum_{k=2}^{2n-1} l_n(\tau_k)\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}|\cos[(n-1)\tau]|\,d\tau = \frac{2E_n(\varphi)_C}{n-1}\sum_{k=2}^{2n-1} l_n(\tau_k).$$

Отсюда с учетом равенства (41) находим

$$\frac{q^n}{\pi}\left|\int\limits_{x_2}^{x_{2n}}[\varphi_0(y(\tau))\,l_n(\tau)\cos(n-1)\tau\,d\tau\right| =$$

$$= \left(\frac{8q^n}{\pi^2}K(q) + O(1)\frac{q^n}{(1-q)^2 n}\right)E_n(\varphi)_C. \tag{45}$$

Далее, через $\varphi_1(t) = \varphi_1(n, t)$ обозначим функцию, совпадающую при $[2\pi/(n-1), 2n\pi/(n-1)]$ с функцией $\varphi_0(t)$ всюду, за исключением δ-окрестностей ($\delta < \pi/2n$) точек z_k, $k = 2, \ldots, 2n-1$, где она линейна и ее график соединяет точки $(z_k - \delta, \varphi_0(z_k - \delta))$ и $(z_k + \delta, \varphi_0(z_k + \delta))$. На участках $[0, t_2)$ и $(t_{2n}, 2\pi]$ $\varphi_1(t)$ доопределим так, чтобы на промежутке $[0, 2\pi)$ существовало по крайней мере $2n$ точек ξ_k: $0 \leq \xi_1 < \xi_2 < \ldots < \xi_{2n} < 2\pi$, в которых она достигает по модулю максимального значения, равного $E_n(\varphi)_C$. Ясно, что в силу соотношения (44) это всегда осуществимо. Наконец, через $\varphi_\delta(t) = \varphi_\delta(n; t)$ обозначим 2π-периодическое продолжение функции $\varphi_1(t)$. Функция $\varphi_\delta(t)$ при любом $\delta > 0$ непрерывна, полиномом $t^*_{n-1}(\cdot)$ порядка не выше $n-1$, доставляющим ей наилучшее равномерное приближение согласно критерию Чебышева, будет полином, тождественно равный нулю, причем $E_n(\varphi_\delta)_C = E_n(\varphi_\delta)_C$. Поэтому

$$\int_{x_2}^{x_{2n}} [\varphi_\delta(y(\tau)) - t^*_{n-1}(y(\tau))]\, l_n(\tau)\cos(n-1)\tau\, d\tau =$$

$$= \int_{x_2}^{x_{2n}} \varphi_\delta(y(\tau))\, l_n(\tau)\cos(n-1)\tau\, d\tau =$$

$$= \int_{x_2}^{x_{2n}} \varphi_0(y(\tau))\, l_n(\tau)\cos(n-1)\tau\, d\tau + R_n^{(3)}(\delta), \tag{46}$$

где

$$R_n^{(3)}(\delta) = \int_{x_2}^{x_{2n}} [\varphi_0(y(\tau)) - \varphi_\delta(y(\tau))]\, l_n(\tau)\cos(n-1)\tau\, d\tau.$$

Значит,

$$|R_n^{(3)}(\delta)| \le \frac{2n\delta E_n(\varphi)_C}{1-q}. \tag{47}$$

Объединяя соотношения (45)–(47), в силу произвольности числа δ убеждаемся, что действительно существует функция $\Phi \in C$ такая, что $E_n(\Phi)_C = E_n(\varphi)_C$ и выполняется соотношение (43).

1. *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды. – М.: Физматгиз, 1961. – 936 с.
2. *Степанец А. И.* К неравенству Лебега на классах (ψ, β)-дифференцируемых функций // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, № 4. – С. 499–510.
3. *Никольский С. М.* Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1946. – **10**, № 3. – С. 207–256.
4. *Стечкин С. Б.* Оценка остатка ряда Фурье для дифференцируемых функций // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1980. – **145**. – С. 126–151.
5. *Степанец А. И.* Классификация и приближение периодических функций. – Киев: Наук. думка, 1987. – 268 с.

Получено 28.12.99