УДК 517.5

Е. С. Синайский (Нац. горн. акад. Украины, Днепропетровск)

АППРОКСИМАЦИОННЫЙ МЕТОД В ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛА

Singularities of the V. K. Dzyadyk approximation method in connection with a binomial function are investigated. Conditions are studied under which an estimate of relative error of approximation in the uniform metric is exact. The results obtained are applied to problems in potential theory.

Досліджуються властивості апроксимаційного методу В. К. Дзядика стосовно біноміальної функції. Вивчаються умови, за яких оцінка для відносної похибки наближення у рівномірній метриці є точною. Результати застосовуються до задач теорії потенціалу.

Основной переменной, входящей в выражения для потенциалов того или иного вида, является величина $1/r$, где r — расстояние между фиксированной точкой пространства и точкой области, в которой распределены массы или заряды, создающие поле. Логарифм либо степень этой переменной образуют ядро подынтегрального выражения, в связи с чем, как правило, задачи вычисления потенциалов сопряжены с преодолением трудностей, вызванных соответствующими особенностями. На практике для решения этих задач применяются ряды Тейлора, ортогональные разложения, квадратурные формулы. При этом не всегда удается совместить удовлетворительную точность приближений с достаточно небольшим количеством вычислительных операций. Поэтому сохраняется актуальность разработки методов и алгоритмов приближенного вычисления потенциалов, которые давали бы высокое качество приближения при малом объеме вычислений. Указанное свойство имеет аппроксимационный метод (а-метод) В. К. Дзядыка [1, 2]. Величину $1/r$ во многих случаях можно привести к биномиальной функции $y(x) = (1+x)^{\alpha-1}$, эффективные аппроксимации которой на отрезке $[-h, h]$, $h \in (0, 1)$, наряду с другими элементарными функциями изучены в [2]. Построенные с помощью а-метода аппроксимирующие полиномы осуществляют асимптотически наилучшие приближения указанной функции в равномерной метрике, причем уже при небольших значениях степеней полиномов получаются достаточно хорошие приближения.

В данной статье применение а-метода к биномиальной функции $y(x) = (1+x)^{\alpha-1}$, $x \in [0, h]$, при произвольном $h > 0$ рассматривается более детально, устанавливаются новые оценки приближения, результаты прилагаются к задачам теории потенциала.

1. Уравнение

$$(1+x)\,y(x) - \alpha\int_a^x y(t)\,dt = (1+a)^{\alpha}, \quad 0 \le x \le h, \tag{1}$$

в котором постоянная $a \in [0, h]$, α и h — действительные числа, определяет функцию $y(x) = (1+x)^{\alpha-1}$. Любой многочлен $y_n(x)$ степени n, приближающий $y(x)$, при подстановке в (1) приводит к образованию невязки ε_n в виде многочлена степени $\le n+1$. Наоборот, задав невязку априорно в форме $\varepsilon_n = \tau \times P_{n+1}(x/h)$, где P_{n+1} — некоторый многочлен степени $n+1$, τ — параметр, можно построить многочлены $y_n(x; a)$, удовлетворяющие уравнению

$$(1+x)\,y_n(x;a) - \alpha\int_a^x y_n(t;a)\,dt = (1+a)^{\alpha} - \varepsilon_n, \quad \varepsilon_n := \tau P_{n+1}(x/h), \tag{2}$$

Действительно, подставляя в (2) многочлены

$$y_n(x;a) := \sum_{j=0}^{n} b_j(a)x^j, \quad P_{n+1}(x/h) := \sum_{j=0}^{n+1} p_j(x/h)^j \tag{3}$$

и применяя метод неопределенных коэффициентов, получаем алгебраическую систему с неизвестными τ и b_j, в которой

$$b_{n+1} := 0,$$

$$b_0 = (1+a)^\alpha - \alpha \sum_{j=0}^{n} b_j a^{j+1}/(j+1) - \tau p_0,$$

$$b_j + (1-\alpha/j)b_{j-1} = -\tau p_j h^{-j}, \quad j = \overline{1, n+1}.$$

Решая эту систему, находим

$$b_j = b_j(a) = \tau(a) \sum_{k=j+1}^{n+1} h^{-k}(p_k/\omega_j^k), \quad j = \overline{0, n}, \quad \tau = \tau(a) = \frac{(1+a)^\alpha}{\sigma_{n+1}(a)}, \tag{4}$$

где

$$\sigma_{n+1}(a) := \sum_{k=0}^{n+1} h^{-k} S_k(a)\,(p_k/\omega_0^k) \neq 0, \tag{5}$$

$$S_k(a) := 1 + \alpha \sum_{j=1}^{k} \omega_0^{j-1}(a^j/j), \quad k \geq 1, \quad \omega_j^k := \prod_{i=j+1}^{k} (\alpha/i - 1), \quad k \geq j+1,$$
$$S_0(a) := 1, \quad \omega_j^j := 1. \tag{6}$$

Множество многочленов P_{n+1} ограничиваем условием $\sigma_{n+1}(a) \neq 0$. При его выполнении числа τ и b_j находятся однозначно.

От выбора многочлена P_{n+1} и постоянной a зависят величина $\tau(a)$, коэффициенты многочлена $y_{n+1}(x;a)$, а также погрешности приближения

$$\Delta y_n(x;a) := y(x) - y_n(x;a), \quad \delta_n(x;a) := \Delta y_n(x;a)/y(x). \tag{7}$$

Пока многочлен P_{n+1} не зафиксирован, параметр τ неопределен. Это позволяет, не уменьшая общности рассмотрения, считать, что любой многочлен P_{n+1} в (2) подчинен условию

$$\| P_{n+1}(x/h) \| = 1, \quad \| \varphi(x) \| := \max_{0 \leq x \leq h} |\varphi(x)|. \tag{8}$$

Требованию (8) удовлетворяют, в частности, смещенные полиномы Чебышева $T_{n+1}^*(x/h)$:

$$T_k^*(x) := T_k(2x-1) := \cos k \arccos(2x-1), \quad 0 \leq x \leq 1,$$
$$T_k^*(x) = \sum_{j=0}^{k} c_j^k x^j. \tag{9}$$

Знаком $*$ в дальнейшем будем отмечать все величины, связанные с выбором $P_{n+1} = T_{n+1}^*$ (при этом в (3) коэффициенты $p_j = c_j^{n+1}$).

Теорема. 1°. *При* $\alpha < 1$, $a = 0$ *в равномерной метрике на произвольном промежутке* $[0, h]$ *наименьшую невязку уравнению* (2) *доставляют многочле-*

ны $y_n^*(x;0)$. *Такое же свойство имеют многочлены* $y_n^*(x;a)$ *при* $-1/a \le \alpha < 0$, $0 < a \le 1$.

2°. *Для любого натурального* n *относительная погрешность приближения функции* $y(x)$ *многочленами* $y_n^*(x;a)$ *на промежутке* $[0,h]$ *удовлетворяет соотношениям:*

при $a=0$

$$\left\|\delta_n^*(x;0)\right\| = \left|\tau^*(0)\right|, \ \alpha \ge 0, \quad \left|\delta_n^*(x;0)\right| \le \left|\tau^*(0)\right|\left[2(1+x)^{-\alpha}-1\right], \ \alpha < 0; \quad (10)$$

при $a=h$

$$\left\|\delta_n^*(x;h)\right\| = \left|\tau^*(h)\right|(1+h)^{-\alpha}, \quad \alpha \le 0,$$
$$\left|\delta_n^*(x;h)\right| \le \left|\tau^*(h)\right|\left[2(1+x)^{-\alpha}-(1+h)^{-\alpha}\right], \quad \alpha > 0; \quad (11)$$

при $0 < a < h$

$$\left|\delta_n^*(x;a)\right| \le (1+a)^{-\alpha}\left|\tau^*(a)\right|, \ \alpha \le 0, \ x \in [0,a] \quad \textit{или} \quad \alpha \ge 0, \ x \in [a,h],$$
$$\left|\delta_n^*(x;a)\right| \le \left|\tau^*(a)\right|\left[2(1+x)^{-\alpha}-(1+a)^{-\alpha}\right], \ \alpha \le 0, \ x \in [a,h] \ \textit{или} \ \alpha \ge 0, \ x \in [0,a]. \quad (12)$$

3°. *Среди многочленов* $y_n(x;a)$, *для которых полином, формирующий невязку, в точке* $x=a$ *имеет максимальный модуль:* $\left|P_{n+1}^0(a)\right| = 1$, *многочлены* $y_n^*(x;a)$ *при* $a=0$, $0<\alpha<1$, $h>0$, *а также при* $a=h\le 1$, $-1/a \le \alpha < 0$ *на промежутке* $[0,h]$ *равномерно приближают функцию* $y(x)$ *с наименьшей относительной погрешностью.*

4°. *При* $\alpha = 0$ *многочлены* $y_n^*(x)$ *среди всех возможных многочленов степени не выше* n *приближают функцию* $y(x)$ *на отрезке* $[0,h]$ *с наименьшей в равномерной метрике относительной погрешностью.*

5°. *Для значений* $0 \le a \le 1$, $\alpha \in (-1/a, 1)$ *с ростом* n *параметр* $\tau^*(a)$, *а вместе с ним величина невязки* ε_n^* *в уравнении* (2) *и погрешности приближения* $\Delta y_n^*(x;a)$ *и* $\delta_n^*(x;a)$ (7) *убывают в геометрической прогрессии. При любом натуральном* n *справедливо неравенство*

$$\left|\tau^*(a)\right| < 2\gamma(1+a)^{\alpha} q^{n+1}, \quad -1/a < \alpha < 1, \quad 0 \le a \le 1, \quad (13)$$

где

$$q := \left[l + (l^2-1)^{1/2}\right]^{-1} \ \text{и} \ l = 1 + 2/h, \quad \gamma = 1, \quad \textit{если} \quad 0 \le \alpha < 1,$$
$$l = 1 + 2/[h(1-\alpha)], \quad \gamma = 1/(1+\alpha a), \quad \textit{если} \quad -1/a < \alpha < 0.$$

Доказательство. 1°. Согласно (6) при $a=0$, $\alpha<1$ числа $S_k = S_k(0) = 1$, $\omega_0^k = (-1)^k\left|\omega_0^k\right|$, $k = 0, 1, \ldots, n+1$. В предположении (8) для коэффициентов произвольного многочлена P_{n+1} и полинома Чебышева T_{n+1}^* (9) выполняются соотношения [3] $|p_k| \le |c_k^{n+1}|$, $k = 0, 1, \ldots, n+1$, причем $c_k^{n+1} = (-1)^{k+n+1}|c_k^{n+1}|$. Поэтому в силу (5)

$$|\sigma_{n+1}(0)| \le \left|\sigma_{n+1}^*(0)\right| = \overline{\sigma}_{n+1}(0), \quad \overline{\sigma}_n(a) := \max_{P_n}|\sigma_n(a)|. \quad (14)$$

На основании (4) и (14) заключаем, что при $\alpha<1$

$$|\tau(0)| \geq |\tau^*(0)| = \overline{\tau}(0), \quad \overline{\tau}(a) := \min_{P_{n+1}} |\tau(a)| = (1+a)^{\alpha} / \overline{\sigma}_{n+1}(a). \tag{15}$$

Отсюда с учетом (2) и (8) следует

$$\| \varepsilon_n(x;0) \| = |\tau(0)| \geq |\tau^*(0)| = \| \varepsilon_n^*(x;0) \|, \quad \| \varepsilon_n^*(x;0) \| = \min_{P_{n+1}} \| \varepsilon_n(x;0) \|. \tag{16}$$

Пусть теперь $a > 0$. Тогда $S_0 = 1$, а при $k = 1, 2, \ldots,$ группируя слагаемые попарно, имеем

$$S_k = (1+\alpha a) + \alpha \sum_{j=1}^{\left[\frac{k-1}{2}\right]} \frac{2j(1-a)+(1+\alpha a)}{2j(2j+1)} a^{2j} \omega_0^{2j-1} + \frac{\alpha}{k} a^k \omega_0^{k-1} \eta_k \tag{17}$$

и

$$S_k = 1 + \alpha \sum_{j=1}^{\left[\frac{k}{2}\right]} \frac{(2j-1)(1-a)+(1+\alpha a)}{2j(2j-1)} a^{2j-1} \omega_0^{2j-2} + \frac{\alpha}{k} a^k \omega_0^{k-1} (1-\eta_k), \tag{18}$$

где $[q]$ — целая часть числа q, $\eta_k = 0$ для нечетного k, $\eta_k = 1$ для четного k.

Если $0 < a \leq 1$ и $-1/a \leq \alpha < 0$, то справа в (17) все члены ≥ 0, а в (18) все члены, кроме первого, ≤ 0. Поэтому при любом k

$$0 \leq 1 + \alpha a \leq S_k \leq 1. \tag{19}$$

Подобно (14) – (16) получаем

$$\begin{gathered} |\sigma_{n+1}(a)| \leq |\sigma_{n+1}^*(a)|, \quad |\tau(a)| \geq |\tau^*(a)| = \overline{\tau}(a), \\ \| \varepsilon_n(x;a) \| \geq \| \varepsilon_n^*(x;a) \| = \overline{\tau}(a). \end{gathered} \tag{20}$$

При $h \leq 1$ можно положить, в частности, $a = h$, а при $h > 1$ выбрать $a = 1$. Соответствующие этим значениям a многочлены $y_n^*(x;a)$ доставляют уравнению (2) на промежутке $[0, h]$ невязку с наименьшей нормой.

2°. Для погрешности приближения $\Delta y_n(x;a)$ (7) из уравнений (1) и (2) находим

$$(1+x)\Delta y_n(x;a) - \alpha \int_a^x \Delta y_n(t;a)\,dt = \varepsilon_n(x;a). \tag{21}$$

Резольвента этого уравнения [2, с. 221]

$$R(x,t) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}/(1+t)^{\alpha}.$$

С помощью функции $R(x,t)$ решение (21) представляется в виде

$$\Delta y_n(x;a) = \frac{\varepsilon_n(x;a)}{1+x} + \alpha \int_a^x \frac{(1+x)^{\alpha-1}}{(1+t)^{\alpha+1}} \varepsilon_n(t;a)\,dt. \tag{22}$$

Из (22) в силу (2) и (8) следует

$$|\Delta y_n(x;a)| \leq \frac{|\tau(a)|}{1+x}\left[1 + \left|1 - \frac{(1+x)^{\alpha}}{(1+a)^{\alpha}}\right|\right], \quad x \in [0,h]. \tag{23}$$

При $a=0$, учитывая (7), на основании (23) получаем:
если $\alpha \geq 0$, то

$$|\Delta y_n(x;0)| \leq |\tau(0)|(1+x)^{\alpha-1} = |\tau(0)|\, y(x), \quad |\delta_n(x;0)| \leq |\tau(0)|, \tag{24}$$

если $\alpha < 0$, то

$$|\Delta y_n(x;0)| \leq \frac{|\tau(0)|}{1+x}\left[2-(1+x)^{\alpha}\right], \quad |\delta_n(x;0)| \leq |\tau(0)|\left[2(1+x)^{-\alpha}-1\right].$$

Соответственно (21), (2), (1), (7) имеем

$$(1+a)\Delta y_n(a;a) = \tau(a)P_{n+1}(a), \quad y(a) = (1+a)^{\alpha-1},$$
$$\delta_n(a;a) = \tau(a)(1+a)^{-\alpha}P_{n+1}(a). \tag{25}$$

Следовательно, $\delta_n(0;0) = \tau(0)P_{n+1}(0)$, и если $|P_{n+1}(0)| = 1$, то $|\delta_n(0;0)| = |\tau(0)|$. В данном случае последнее неравенство из (24) заменяется равенством $\|\delta_n(x;0)\| = |\tau(0)|$. Это распространяется на полиномы $P_{n+1} = T^*_{n+1}$, что приводит к оценкам (10). Аналогично с помощью (23), (25) устанавливаются соотношения (11) и (12).

3°. При $a=0$, $0 \leq \alpha < 1$ и условии $|P^0_{n+1}(0)| = 1$ согласно (10), (15) и (25) находим

$$\|\delta^*_n(x;0)\| = |\tau^*(0)| \leq |\tau(0)| = \|\delta_n(x;0)\|, \quad \|\delta^*_n(x;0)\| = \min_{P^0_{n+1}}\|\delta_n(x;0)\|.$$

Точно так же, если $|P^0_{n+1}(a)| = 1$, то при $a=h\leq 1$ и $-1/a < \alpha < 0$ на основании (11), (20), (23) и (25) получаем

$$\|\delta^*_n(x;h)\| = |\tau^*(h)|(1+h)^{-\alpha} \leq |\tau(h)|(1+h)^{-\alpha} = \|\delta_n(x;h)\|,$$
$$\|\delta^*_n(x;h)\| = \min_{P^0_{n+1}}\|\delta_n(x;h)\|.$$

Таким образом, на множестве многочленов P^0_{n+1}, имеющих свойство $|P^0_{n+1}(a)| = 1$, при указанных значениях α и a полиномы T^*_{n+1} минимизируют погрешность $\delta_n(x;a)$.

4°. Если $\alpha = 0$ (этот случай в качестве примера рассмотрен в [4]), то параметр a во всех соотношениях исчезает и для любого многочлена $P_{n+1}(x/h)$, удовлетворяющего условию (8), на основании (2), (7) и (21) $\|\delta_n(x)\| = |\tau|$. При $P_{n+1} = T^*_{n+1}$ на основании (2) получаем $\tau^* = 1/T^*_{n+1}(-1/h)$ (см. также [4, с. 471]). В силу (15) имеем $\|\delta^*_n(x)\| \leq \|\delta_n(x)\|$, следовательно, $\|\delta^*_n(x)\| = \min_{P_{n+1}}\|\delta_n(x)\|$.

5°. Вследствие (6) $|\omega^k_0| \leq 1$, если $0 \leq \alpha < 1$, $|\omega^k_0| \leq (1-\alpha)^k$, если $\alpha < 0$. Согласно (18) $S_k(a) \geq 1$, если $0 \leq a \leq 1$, $0 \leq \alpha < 1$. Эти неравенства вместе с (19) ввиду знакочередования величин c^{n+1}_k и ω^k_0 приводят к следующим оценкам суммы (5), где $p_k = c^{n+1}_k$:

при $0 \leq \alpha < 1$, $0 \leq a \leq 1$

$$|\sigma^*_{n+1}(a)| \geq \sum_{k=0}^{n+1}|c^{n+1}_k|h^{-k} = |T^*_{n+1}(-1/h)|, \tag{26}$$

при $-1/a < \alpha < 0,\ 0 \le a \le 1$

$$\left|\sigma_{n+1}^*(a)\right| \ \ge\ (1+\alpha a)\sum_{k=0}^{n+1}\left|c_k^{n+1}\right| h^{-k}(1-\alpha)^{-k} \ =$$

$$=\ (1+\alpha a)\left|T_{n+1}^*(-1/(h(1-\alpha))\right|. \tag{27}$$

Используя представление для полиномов Чебышева [2, с. 15]

$$T_n(x)\ =\ \frac{1}{2}\left[\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n+\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n\right],$$

в обозначениях $q := [l+(l^2-1)^{1/2}]^{-1},\ l := 1+2/m,$ получаем

$$\left|T_{n+1}^*\left(-\frac{1}{m}\right)\right| \ =\ \left|T_{n+1}\left(-1-\frac{2}{m}\right)\right| \ =\ \left|T_{n+1}(l)\right| \ >\ \frac{1}{2}q^{-n-1}. \tag{28}$$

При $m = h$ и $m = h(1-\alpha)$ из соотношений (26)–(28) и (4) следует (13). Теорема доказана.

Пример. Пусть $\alpha=-1,\ h=1.$ Полагая $n=5,$ согласно формулам (4)–(6), (10), (11) находим:

при $a=0$

$$\tau^*(0)\ =\ 2{,}556\cdot 10^{-4}, \qquad \left\|\delta_n^*(x;0)\right\| \ \le\ 3\ \tau^*(0),$$

при $a=1$

$$\tau^*(1)\ =\ 2{,}556\cdot 10^{-4}, \qquad \left\|\delta_n^*(x;1)\right\| \ \le\ 2\ \tau^*(1),$$

т. е. за счет более удачного выбора параметра a оценка погрешности приближения уменьшена в 1,5 раза.

***Замечание* 1.** Если $1 < \alpha < 2,\ a \le 1,$ то согласно (6) и (17) $S_k(a) \ge 1,$ $\omega_0^0=1,\ \omega_0^1=\alpha-1>0,\ \omega_0^k = (-1)^{k-1}\left|\omega_0^k\right|$ при $k\ge 2.$ В этом случае, учитывая (14), (4), (15) и экстремальное свойство коэффициентов полинома $T_{n+1}^*,$ имеем

$$\sigma_{n+1}^*(a)\ =\ (-1)^n\left[\overline{\sigma}_{n+1}(a)-2\right], \quad \left|\tau^*(a)\right| \ =\ \overline{\tau}(a)\Big/\left|1-2\overline{\tau}(a)/(1+a)^{\alpha}\right|,$$

т. е. при достаточно малом $\overline{\tau}(a)$ величины $\left|\tau^*(a)\right|$ и $\overline{\tau}(a)$ практически неразличимы, норма невязки $\varepsilon_n^*(x;a)$ почти совпадает с минимальной.

***Замечание* 2.** Утверждения теоремы можно использовать с целью построения приближения с хорошо оцениваемой погрешностью для функций, которые являются интегралами от бинома. В частности, при $y(x)=(1+x)^{-1},\ x\in[0,h],$ получаем

$$z(x)\ :=\ \int_0^x y(t)\,dt\ =\ \ln(1+x), \quad z_{n+1}^*(x)\ :=\ \int_0^x y_n^*(t)\,dt,$$

где $y_n^*(t)$ — многочлен (3), приближающий $y(x).$ Вследствие (24)

$$\left|\Delta y_n^*(x)\right| \ \le\ |\tau^*|/(1+x),$$

$$\left|\Delta z_{n+1}^*(x)\right| := \left|z(x)-z_{n+1}^*(x)\right| \ =\ \left|\int_0^x \Delta y_n^*(t)\,dt\right| \ \le\ |\tau^*|\ln(1+x).$$

При этом

$$\left|\delta_{n+1}^*(x)\right| := \left|\Delta z_{n+1}^*(x)/z(x)\right| \le |\tau^*|.$$

***Замечание* 3.** Для функции $y = (1-x)^{\alpha-1}$, $x \in [0, h]$, $h < 1$, по уравнению

$$(1-x)y(x) + \alpha\int_a^x y(t)\,dt = (1-a)^{\alpha}, \quad 0 \le x \le h,$$

аналогично предыдущему находится приближение с сохранением формул (3)–(6), если в них величины x, a, h заменить соответственно на $-x$, $-a$, $-h$. Для погрешности δ_n^* на отрезке $[0, h]$ справедливы оценки

$$\left\|\delta_n^*(x;0)\right\| = \left|\tau^*(0)\right|, \quad \alpha \le 0, \quad \left|\delta_n^*(x;0)\right| \le \left|\tau^*(0)\right|\left[2(1-x)^{-\alpha}-1\right], \quad \alpha > 0,$$

$$\left\|\delta_n^*(x;h)\right\| = \left|\tau^*(h)\right|(1-h)^{-\alpha}, \quad \alpha \ge 0,$$

$$\left\|\delta_n^*(x;h)\right\| \le \left|\tau^*(h)\right|\left[2(1-x)^{-\alpha} - (1-h)^{-\alpha}\right], \quad \alpha < 0.$$

2. В краевых задачах теории потенциала для бесконечной плоскости потенциал U в произвольной точке $P(x,y,z)$ полупространства определяется в виде интеграла по плоскости D: $z=0$ [5, с. 163]:

$$U(P) = \frac{1}{2\pi}\iint_D \left(\frac{1}{r}\right)^{\nu} Q(M)\,dS,$$

где $Q(M)$ — заданная на D функция, r — расстояние точки P от текущей точки $M(\xi,\eta,0)$. В задаче Дирихле $\nu = 3$, $Q = zU$, в задаче Неймана $\nu = 1$, $Q = \partial U/\partial n$, потенциал U либо его нормальная производная $\partial U/\partial n$ в точках M плоскости D известны. При необходимости приближенного вычисления $U(P)$ естественным представляется путь, связанный с построением степенной аппроксимации величины $1/r$. В полярных координатах ρ, φ на D с началом в точке $(x, y, 0)$ $r = (z^2+\rho^2)^{1/2}$. При $0 \le \rho \le z$ $r = z(1+u)^{1/2}$, $u := (\rho/z)^2 \le 1$, при $z \le \rho < \infty$ $r = \rho(1+u)^{1/2}$, $u := (z/\rho)^2 \le 1$. В указанных задачах аппроксимация бинома $(1+u)^{\alpha-1}$, где $\alpha = -1/2$ либо $\alpha = 1/2$, с использованием результатов предыдущего пункта создает предпосылки для приближения потенциала $U(P)$ небольшим числом слагаемых с хорошо оцениваемой погрешностью. Для задачи Дирихле получаем

$$U(P) = \frac{1}{2\pi}\sum_{j=0}^{n} b_j^* \int_0^{2\pi} d\varphi \left[\int_0^z U(M)\frac{\rho^{2j+1}}{z^{2j+2}}\,d\rho + \int_z^{\infty} U(M)\frac{z^{2j+1}}{\rho^{2j+2}}\,d\rho\right].$$

Пусть, например, $U(M) = 1/(1+\rho^2)$, тогда

$$U(P) = \sum_{j=0}^{n} b_j^* \left[(-1)^j \frac{\ln(1+z^2)}{2z^{2j+2}} - (-1)^j z^{2j+1}\operatorname{arcctg} z + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=0}^{j}(-1)^k z^{2k}/(2j-2k+1) + \sum_{k=1}^{j}(-1)^{k+1} z^{-2k}/(2j-2k+2)\right].$$

Последнюю сумму при $j = 0$ здесь следует опустить.

При $n = 4$, $a = 1$, $\alpha = -1/2$, $p_k = c_k^{n+1}$ по формулам (4)–(6), (11) находим

$\tau^* = -6{,}8077 \cdot 10^{-4}$, $b_0^* = 0{,}9993$, $b_1^* = -1{,}4649$, $b_2^* = 1{,}5589$, $b_3^* = -1{,}0562$, $b_4^* = 0{,}3169$, $\|\delta_n^*\| < 10^{-3}$.

Формула для потенциала простого слоя имеет вид

$$V(P) = \iint_D \frac{\mu}{r} dS,$$

где μ — поверхностная плотность массы, распределенной в конечной области D плоскости xOy, $P(x,y)$ — фиксированная точка плоскости, $r = [(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]^{1/2}$ — расстояние между точками P и $M(\xi,\eta) \in D$, не исключается также значение $r = 0$.

Всю координатную плоскость прямыми $\eta - y = \pm(\xi - x)$ разбиваем на две части, в одной из которых $|\eta - y| \le |\xi - x|$, а в другой выполняется противоположное неравенство. Область D либо целиком принадлежит одной из таких частей, либо разбивается на подобласти D_1 и D_2: в D_1 $1/r = |\xi - x|^{-1} \times (1+u)^{-1/2}$, $u := (\eta - y)^2/(\xi - x)^2 \le 1$; в D_2 $1/r = |\eta - y|^{-1}(1+u)^{-1/2}$, $u := (\xi - x)^2 : (\eta - y)^2 \le 1$.

Аппроксимируя бином $(1+u)^{-1/2}$, в общем случае имеем

$$V(P) = \sum_{j=0}^{n} b_j^* \left[\iint_{D_1} \frac{(\eta - y)^{2j}}{|\xi - x|^{2j+1}} \mu(\xi,\eta)\, dS + \iint_{D_2} \frac{(\xi - x)^{2j}}{|\eta - y|^{2j+1}} \mu(\xi,\eta)\, dS \right].$$

Коэффициенты b_j^* находятся согласно формулам (4), где $p_k = c_k^{n+1}$, $\alpha = 1/2$, $a = 0$, $h = 1$, норма относительной погрешности приближения $\delta_n^*(x;0)$ определяется формулой (10). При $n = 4$ $\|\delta_n^*\| < 10^{-4}$.

Пусть, в частности, $\mu = 1$, D — квадрат: $|\xi| \le d$, $|\eta| \le d$, $P(x, 0)$ — точка оси абсцисс. Тогда при $0 \le x \le d$

$$V(P) = \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j^*}{j(2j+1)} \left[(2d - x)(4j+1) - d(1 + x/d)^{-2j} - d(1 - x/d)^{2j+1} \right] +$$

$$+ b_0^* \left[4(2d - x) + 2d \ln(1 + x/d) - 2(d - x)\ln(1 - x/d) \right].$$

Если $x \ge 2d$, то разбиение D на подобласти не требуется,

$$V(P) = \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j^* d^{2j+1}}{j(2j+1)} \left[(x-d)^{-2j} - (x+d)^{-2j} \right] + 2 b_0^* d \ln \frac{x+d}{x-d}.$$

В задаче Неймана для сферы возникает интеграл, ядро которого содержит слагаемое вида $\Phi(\theta) = \ln(\sin^2\theta/2 + \sin\theta/2)$. При известной функции $\partial U/\partial n$ произведение $(\partial U/\partial n)\Phi(\theta)\sin\theta$ интегрируется численно [5, с. 73]. Сомножитель $\Phi(\theta)$ либо подобный ему появляется под знаком интеграла во многих формулах геофизики, связанных с задачей Неймана (формулы Бьеркнесса, Стокса и др. [5, с. 148, 153, 263]). Вычисления по этим формулам можно упростить, а их точность проконтролировать, если воспользоваться степенными аппроксимациями невысокой степени для функций $z(x) = \ln(1+x)$ и $g(x) = x \ln x$ на отрезке $[0, 1]$ при хороших оценках качества приближения. Такие эффективные аппроксимации получены в работах [1, 2, 4]. На примере недифференцируемой при $x = 0$ функции $g(x)$ покажем, что несмотря на наличие особой точки a-метод позволяет достаточно просто строить приближающие полиномы и надежно оценивать точность допущенной погрешности.

Рассмотрим уравнение

$$xy(x)+2\int\limits_x^1 y(t)\,dt \;=\; \frac{1}{2}(x^2-1)-\tau x^2(1-x)T_n^{*\prime\prime}(x), \quad x\in[0,\,1]. \tag{29}$$

При $\tau=0$ решением (29) является функция $y=g(x)$. Слагаемое, содержащее параметр τ, — невязка уравнения, ее форма учитывает особенность в точке $x==0$ и предполагает построение такой приближающей функции $g_n(x)$, которая с функцией $g(x)$ имела бы общие нули.

Многочлен $g_n(x)$ ищем в виде

$$g_n(x) := (1-x)\sum_{j=1}^{n-1} b_j x^j. \tag{30}$$

Подставляем (30) и (9) в (29) и приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x слева и справа. Получаем равенства

$$\begin{gathered} b_{j-1} \;=\; b_j+\tau j(j+1)\left[\frac{j+1}{j-1}c_{j+1}^n-c_j^n\right], \quad j=\overline{2,n}, \\ 2\tau c_2^n \;=\; \frac{1}{2}, \quad \sum_{j=1}^{n-1}\frac{4b_j}{(j+1)(j+2)} \;=\; -1, \end{gathered} \tag{31}$$

где $b_n=0$, $c_{n+1}^n=0$. Из (31) следуют формулы

$$b_j \;=\; \tau\left[-(j+1)(j+2)c_{j+1}^n+\sum_{k=j+2}^{n}\frac{2k}{k-2}c_k^n\right], \quad j=\overline{1,n-1}, \quad \tau=\frac{1}{4c_2^n}. \tag{32}$$

Последнее из соотношений (31) опускается, так как вследствие (32) является тождеством. Используя выражение для коэффициента c_2^n [4], находим

$$\tau \;=\; (-1)^n\frac{3}{8n^2(n^2-1)}. \tag{33}$$

Погрешность приближения $\Delta g_n(x):=g(x)-g_n(x)$ согласно (29) удовлетворяет уравнению

$$x\Delta g_n(x)+2\int\limits_x^1\Delta g_n(t)\,dt \;=\; \tau x^2(1-x)T_n^{*\prime\prime}(x).$$

Резольвента этого уравнения $R(x;t)=2x/t^2$, следовательно,

$$\Delta g_n(x) \;=\; \tau\left[\Lambda(x)-2\int\limits_x^1\frac{x}{t^2}\Lambda(t)\,dt\right], \quad \Lambda(x):=x(1-x)T_n^{*\prime\prime}(x). \tag{34}$$

Заменой $x=\sin^2(\pi s/4n)$, $0\le s\le 2n$, учитывая (9) и (34), получаем

$$\begin{gathered} T_n^*(x) \;=\; (-1)^n\cos(\pi s/2), \quad T_n^{*\prime}(x) \;=\; (-1)^{n+1}\frac{2n\sin(\pi s/2)}{\sin(\pi s/2n)}, \\ \Lambda(x) \;=\; (-1)^n n^2\lambda(s), \end{gathered} \tag{35}$$

где

$$\lambda(s) := \frac{1}{n}\operatorname{ctg}\frac{\pi s}{2n}\sin\frac{\pi s}{2} - \cos\frac{\pi s}{2}, \quad \lambda(2n-s) = (-1)^n \lambda(s). \tag{36}$$

При $0 \le s \le 1$ слагаемые, составляющие величину $\lambda(s)$ (36), имеют различные знаки, их модули не больше 1, поэтому $|\lambda(s)| \le 1$. На промежутке $1 \le s \le n$ в силу неравенства Коши

$$|\lambda(s)| \le \sqrt{1+\frac{1}{n^2}ctg^2\left(\frac{\pi s}{2n}\right)} \le \sqrt{1+\frac{4}{\pi^2 s^2}} < 1{,}2.$$

В силу свойства симметричности $\lambda(s)$ относительно точки $s = n$ (36) это неравенство верно на всем промежутке $0 \le s \le 2n$. Согласно (35) имеем

$$|\Lambda(x)| < 1{,}2n^2, \quad x \in [0, 1]. \tag{37}$$

Из соотношений (34), (33), (37) следует оценка

$$|\Delta g_n(x)| < \frac{0{,}45(3-2x)}{n^2-1}, \quad x \in [0, 1], \quad n > 1.$$

Вместе с тем, как видно из (34), на концах отрезка $[0, 1]$ $\Delta g_n(x) = 0$.

При $n = 4$, применяя (30), (32), находим многочлен $g_4(x) = x(1-x)(-4x^2 + 5{,}6x - 3{,}1)$. Непосредственные вычисления показывают, что на всем отрезке $[0, 1]$ фактическая погрешность приближения $|\Delta g_4(x)| \le 0{,}023$.

1. *Дзядык В. К.* Аппроксимационный метод приближения алгебраическими многочленами решений линейных дифференциальных уравнений // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1974. – **38**, № 4. – С. 937 – 967.
2. *Дзядык В. К.* Аппроксимационные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1988. – 304 с.
3. *Бернштейн С. Н.* Экстремальные свойства полиномов. – М.; Л.: ОНТИ НКТП СССР, 1937. – 204 с.
4. *Ланцош К.* Практические методы прикладного анализа. – М.: Физматгиз, 1961. – 524 с.
5. *Идельсон Н. И.* Теория потенциала и ее приложения к вопросам геофизики. – М.; Л.: Техтеориздат, 1932. – 348 с.

Получено 23.12.97