УДК 517.51

В. К. Маслюченко, В. В. Михайлюк (Чернівец. ун-т)

ХАРАКТЕРИЗАЦІЯ МНОЖИН ТОЧОК РОЗРИВУ НАРІЗНО НЕПЕРЕРВНИХ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ НА ДОБУТКАХ МЕТРИЗОВНИХ ПРОСТОРІВ

We show that a subset of product of n metrizable spaces is a set of discontinuity points of some separately continuous function if and only if this subset can be represented as a union of sequence of F_σ-sets which are locally projectively of the first category.

Показано, що підмножина добутку n метризовних просторів є множиною точок розриву деякої нарізно неперервної функції тоді і тільки тоді, коли її можна подати у вигляді об'єднання послідовності F_σ-множин, які є локально проективно першої категорії.

1. Загальна обернена задача теорії нарізно неперервних відображень полягає в тому, щоб для заданої множини E, що лежить у добутку X топологічних просторів $X_1, \ldots, X_n$, побудувати таку нарізно неперервну функцію $f\colon X \to \mathbf{R}$, множина точок розриву якої $D(f)$ збігається з E. Прямі теореми про малість множини $D(f)$ для нарізно неперервних функцій дають необхідні умови на множину E для того, щоб обернена задача мала розв'язок, а розв'язання оберненої задачі при даних необхідних умовах приводить до повного опису множини точок розриву нарізно неперервних функцій на добутках просторів тих чи інших класів.

Результатів, які б давали такий повний опис, не так уже й багато. Так, Кешнер [1] дав характеризацію множин $D(f)$ для нарізно неперервних функцій $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, яка при $n = 2$ має вигляд: множина $E \subseteq \mathbf{R}^2$ є множиною точок розриву деякої нарізно неперервної функції $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ тоді і лише тоді, коли вона має тип F_σ і її проекції на обидві осі є першої категорії, тобто E є множиною проективно першої категорії. Брекенрідж і Нішіура [2], застосувавши інший підхід, розв'язали обернену задачу для F_σ-множин, що лежать в добутках двох метризовних просторів і є проективно першої категорії. Оскільки за теоремою Кальбрі – Труаліка [3] для просторів X і Y з другою аксіомою зліченності і нарізно неперервної функції $f\colon X \times Y \to \mathbf{R}$ множина $D(f)$ є проективно першої категорії і для дійснозначних функцій $D(f)$ завжди типу F_σ, то ми одержуємо подібну до кешнерової характеризацію множин точок розриву нарізно неперервних функцій на добутках двох сепарабельних метризовних просторів, зокрема на добутках двох метризовних компактів.

У працях [4 – 6] запропоновано нові методи розв'язання оберненої задачі на добутках метризовних просторів, що приводять у сепарабельному випадку до того ж опису. Особливо перспективним виявився метод, запропонований у роботі [6], в якому використовувалися локально скінченні системи і теорема Стоуна про паракомпактність метризовного простору. Він був розвинутий у дисертації [7] (результати якої увійшли до статті [8]) і застосований там до широкого класу просторів, що дістали назву сприятливих. Крім цього, з допомогою теореми про залежність нарізно неперервних функцій від зліченного числа координат у [9] вдалося отримати опис множин $D(f)$ для нарізно неперервних функцій $f\colon X \times Y \to \mathbf{R}$, де X і Y — добутки сімей метризовних компактів.

Характеризація Кешнера вже не має місця для нарізно неперервних функцій на добутках довільних метризовних просторів. Так, у роботі [10] був побудований приклад нарізно неперервної функції $f\colon \mathbf{R} \times l_\infty \to \mathbf{R}$, у якої проекція $D(f)$ на перший співмножник збігається з усією числовою прямою (див. також [8, 11]). Хоча глобально проекція множини $D(f)$ у цьому прикладі є великою, локально вона є малою, а сама проекція на перший співмножник будь-якої множини $D(f) \cap (\mathbf{R} \times V)$, де V — куля в l_∞ досить малого радіуса, складається не більше ніж з однієї точки. Це показало, що малість множини $D(f)$ для нарізно неперервних функцій $f: X \times Y \to \mathbf{R}$ на добутках загальних метризовних просторів, можливо, слід описувати в локальних термінах. Такий підхід і був реалізований в [7], де з допомогою техніки сприятливих просторів були охарактеризовані множини $D(f)$, коли X і Y метризовні і функція $f: X \times Y \to \mathbf{R}$ нарізно неперервна (анонсовано в [12], доведення наведено у [8]).

В цій статті розглядається загальний випадок функцій n змінних і одержано такий результат: якщо $X_1, \ldots, X_n$ — метризовні простори і $X = X_1 \times \ldots \times X_n$, то для множини $E \subseteq X$ тоді і тільки тоді існує така нарізно неперервна функція $f: X \to \mathbf{R}$, для якої $D(f) = E$, коли E можна подати у вигляді об'єднання послідовності F_σ-множин, які є локально проективно першої категорії. При цьому в доведенні необхідності ми використовуємо квазінеперервність — звичний інструмент у випадку $n \geq 3$, і так само, як у [8] (п. 1.6), — теорему Банаха про категорію [13, с. 87 – 90], а при доведенні достатності — апроксимаційний метод [6 – 8], що базується на понятті сприятливої пари. Одержана теорема є помітною в цій тематиці і підводить певну риску в розв'язанні задачі про опис множин точок розриву нарізно неперервних функцій на добутках метризовних просторів.

2. Для функції $f: X \to \mathbf{R}$ і множини $A \subseteq X$ число $\omega_f(A) = \sup\{|f(x') - f(x'')| : x', x'' \in A\}$ — це коливання f на A. Якщо X — топологічний простір, $x_0 \in X$ і $\mathcal{U}_{x_0}$ — система всіх околів точки x_0 в X, то $\omega_f(x_0) = \inf\{\omega_f(U) : U \in \mathcal{U}_{x_0}\}$ — коливання f у точці x_0. Функція $\omega_f : X \to [0, +\infty]$ напівнеперервна зверху і множини $\{x \in X: \omega_f(x) \geq \varepsilon\}$ замкнені для кожного $\varepsilon > 0$.

Функція $f: X \to \mathbf{R}$ називається квазінеперервною, якщо для кожної точки $x \in X$, будь-якого її околу U і довільного $\varepsilon > 0$ у просторі X знайдеться така відкрита непорожня множина V, що $V \subseteq U$ і $|f(v) - f(x)| < \varepsilon$ для кожного $v \in V$. Наступне твердження легко випливає з означення.

Лема 1. *Нехай X — топологічний простір. Функція $f: X \to \mathbf{R}$ буде квазінеперервною тоді і тільки тоді, коли $f(G) \subseteq \overline{f(A)}$ для кожної відкритої множини G в X і кожної щільної в G множини A з X.*

Нехай $X = X_1 \times \ldots \times X_n$ — топологічний добуток n просторів, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in X$ і k — один з індексів $1, \ldots, n$. Покладемо $\hat{X}_k = X_1 \times \ldots \times X_{k-1} \times X_{k+1} \times \ldots \times X_n$, $\hat{x}_k = (x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n)$ і $p_{\hat{X}_k}(x) = \hat{x}_k$. Відображення $p_{\hat{X}_k} : X \to \hat{X}_k$ назвемо k-ю проекцією. Будемо говорити, що множина A в X є проективно ніде не щільною (першої категорії) відносно k-ї змінної, якщо $p_{\hat{X}_k}(A)$ є ніде не щільною (першої категорії) в $\hat{X}_k$. Якщо для кожної точки $x \in X$ існує такий її окіл U в X, що $A \cap U$ є проективно ніде не щільною (першої категорії) відносно k-ї змінної, то множина A називається локально проективно ніде не щільною (першої категорії) відносно k-ї змінної. Проективно ніде не щільні (першої категорії) відносно кожної змінної множини називатимемо проективно ніде не щільними (першої категорії). Те ж саме стосується і локальних різновидів цих понять.

Нагадаємо, що функція $f: X_1 \times \ldots \times X_n \to \mathbf{R}$ називається нарізно неперервною, якщо вона неперервна відносно кожної змінної зокрема. Для розв'язання оберненої задачі нам буде потрібне наступне твердження, яке узагальнює лему 3.1.4 з [8].

Лема 2. *Нехай* $X = X_1 \times \ldots \times X_n$ — *топологічний добуток* n *просторів,* $\mathcal{W}$ — *локально скінченна система відкритих непорожніх множин в* X *і* $(f_W)_{W\in\mathcal{W}}$ — *сім'я напівнеперервних знизу нарізно неперервних функцій* $f_W: X \to \mathbf{R}$ *таких, що* $f_W(x) = 0$ *на* $X \setminus W$ *для кожного* $W \in \mathcal{W}$. *Тоді рівністю* $f(x) = \sum_{W\in\mathcal{W}} f_W(x)$ *визначається напівнеперервна знизу нарізно неперервна функція на* X, *причому* $D(f) = \bigcup\limits_{W\in\mathcal{W}} D(f_W)$.

Доведення. Нехай $x_0 \in X$, U — такий відкритий окіл точки x_0 в X, що система $\mathcal{W}_U = \{ W \in \mathcal{W}: W \cap U \neq \varnothing\}$ скінченна і $g = \sum_{W\in\mathcal{W}_U} f_W$. Функція g буде напівнеперервною знизу і нарізно неперервною в точці x_0, як скінченна сума таких функцій, а звуження f на U збігається з g, отже, і f буде такою ж. Якщо, до того ж, $x_0 \notin \bigcup\limits_{W\in\mathcal{W}} D(f_W)$, то всі функції f_W, а з ними функція g, а значить, і f, будуть неперервними в точці x_0, отже, $x_0 \notin D(f)$. Таким чином, $D(f) \subseteq \bigcup\limits_{W\in\mathcal{W}} D(f_W)$. Щоб довести обернене включення, візьмемо $W_0 \in \mathcal{W}$ і розглянемо функцію $g_{W_0} = \sum_{W\in\mathcal{W}\setminus\{W_0\}} f_W$. Ця функція напівнеперервна знизу, як і функція f_{W_0}, і $f = g_{W_0} + f_{W_0}$. Звідси легко встановити (лема 2.2.1 з [8]), що $D(f) = D(g_{W_0}) \cup D(f_{W_0})$, отже, зокрема, $D(f_{W_0}) \subseteq D(f)$, що й треба було довести.

3. Центральне місце в доведенні необхідності в основному результаті займає наступне твердження, яке узагальнює теорему 3.2.3 з [8].

Теорема 1. *Нехай* X — *берівський простір,* Y — *метричний простір і функція* $f: X \times Y \to \mathbf{R}$ *квазінеперервна відносно першої змінної і неперервна відносно другої. Тоді існує послідовність* F_σ-*множин* E_n *таких, що* $D(f) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$ *і для довільної відкритої множини* V *в* Y, *для якої* $\operatorname{diam} V < 1/n$, *множина* $E_n \cap (X \times V)$ *є проективно першої категорії відносно другої змінної.*

Доведення. Для $(x, y) \in X \times Y$ покладемо $f^x(y) = f_y(x) = f(x, y)$. Через $V(y_0, \varepsilon)$ позначимо відкриту кулю в Y з центром y_0 і радіусом ε. Для натуральних m і n розглянемо множини:

$$E_{mn} = \left\{(x, y) \in X \times Y: \omega_f(x, y) \geq \frac{1}{m} \quad i \quad \omega_{f^x}\left(V\left(y, \frac{1}{n}\right)\right) < \frac{1}{4m}\right\},$$

$$F_m = \left\{(x, y) \in X \times Y: \omega_f(x, y) \geq \frac{1}{m}\right\}, \quad F_{mn} = \overline{E_{mn}} \quad \text{і} \quad E_n = \bigcup_{m=1}^{\infty} F_{mn}.$$

Множини F_m замкнені, причому з неперервності функцій f^x випливає, що $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_{mn} = F_m$ для кожного m. Крім того, $D(f) = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} F_m$. Звідси легко вивести, що і $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = D(f)$.

Нехай $m, n \in \mathbf{N}$ і V — відкрита в Y множина, для якої $\operatorname{diam} V < 1/n$. Покажемо, що множина $M_0 = E_{mn} \cap (X \times V)$ є проективно ніде не щільною відносно другої змінної. Припустимо, що це не так. Розглянемо тоді операцію проектування $p_X = p_{\hat{Y}}$ на перший співмножник і множину $A_0 = p_X(M_0)$. За припущенням існує така відкрита непорожня множина U_0 в X, що $\overline{A_0} \supseteq U_0$.

Візьмемо довільну точку $y_0 \in V$. З квазінеперервності функції f_{y_0} випливає, що існує така відкрита в X непорожня множина U, що $U \subseteq U_0$ і $\omega_{f_{y_0}}(U) < 1/4m$. Зрозуміло, що множина $A = U \cap A_0$ щільна в U. Оскільки $A \subseteq p_X(M_0)$, то для кожної точки $a \in A$ існує така точка $v_a \in V$, що $(a, v_a) \in E_{mn}$, зокрема $\omega_{f^a}(V(v_a, 1/n)) < 1/4m$. Але $\operatorname{diam} V < 1/n$, отже, $V \subseteq V(v_a, 1/n)$ і $\omega_{f^a}(V) < 1/4m$ для кожного $a \in A$. Нехай $a_1, a_2 \in A$ і $y_1, y_2 \in V$. Тоді

$$|f(a_1, y_1) - f(a_2, y_2)| = |f(a_1, y_1) - f(a_1, y_0) + f(a_1, y_0) - f(a_2, y_0) + f(a_2, y_0) - f(a_2, y_2)| \le$$
$$\le \left|f^{a_1}(y_1) - f^{a_1}(y_0)\right| + \left|f_{y_0}(a_1) - f_{y_0}(a_2)\right| + \left|f^{a_2}(y_0) - f^{a_2}(y_1)\right| < \frac{3}{4m},$$

отже, $\omega_f(A \times V) \le 3/4m$. Добре відомо (див., наприклад, [2], теорема 2.2), що при вказаних умовах функція f буде квазінеперервною. Оскільки множина $A \times V$ щільна в $U \times V$, то за лемою 1 $f(U \times V) \subseteq \overline{f(A \times V)}$. В такому разі

$$\omega_f(U \times V) = \operatorname{diam} f(U \times V) \le \operatorname{diam} \overline{f(A \times V)} =$$
$$= \operatorname{diam} f(A \times V) = \omega_f(A \times V),$$

отже, $\omega_f(U \times V) \le 3/4m < 1/m$. Але тоді $E_{mn} \cap (U \times V) = \varnothing$, звідки і $A = \varnothing$, що неможливо.

Таким чином, ми показали, що множина $A_0 = p_X(M_0)$ ніде не щільна в X. Але тоді і її замикання $\overline{A}_0$ ніде не щільне в X. Оскільки множина $X \times V$ відкрита в добутку $X \times Y$, то $F_{mn} \cap (X \times V) = \overline{E_{mn}} \cap (X \times V) \subseteq \overline{E_{mn} \cap (X \times V)} = \overline{M}_0$, а з неперервності проекції p_X випливає, що $p_X(\overline{M}_0) \subseteq \overline{p_X(M_0)} = \overline{A}_0$. Отже, множини $F_{mn} \cap (X \times V)$ є проективно ніде не щільними відносно другої змінної, а тоді множина $E_n \cap (X \times V) = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} F_{mn} \cap (X \times V)$ є проективно першої категорії відносно другої змінної. Оскільки за побудовою E_n є множиною типу F_σ, доведення завершено.

4. Перейдемо до розгляду основного результату.

Теорема 2. *Нехай $X_1, \ldots, X_n$ — метризовні топологічні простори, $X = X_1 \times \ldots \times X_n$ і $E \subseteq X$. Для того щоб існувала така нарізно неперервна функція $f: X \to \mathbf{R}$, у якої $D(f) = E$, необхідно і досить, щоб E можна було подати у вигляді об'єднання послідовності F_σ-множин, які є локально проективно першої категорії.*

Доведення. *Необхідність.* Нехай $f: X \to \mathbf{R}$ — така нарізно неперервна функція, що $D(f) = E$. Зафіксуємо якийсь індекс $k = 1, \ldots, n$ і доведемо, що множину E можна подати у вигляді об'єднання F_σ-множин $E_m^{(k)}$, які є локально проективно першої категорії відносно k-ї змінної. Згідно з теоремою Банаха про категорію [13, с. 87–90], простір $\hat{X}_k$ можна подати у вигляді диз'юнктного об'єднання відкритої множини G, яка є берівським простором в індукованій з $\hat{X}_k$ топології, відкритої множини H першої категорії і замкненої ніде не щільної множини Γ. Простір $\hat{X}_k$ метризовний як скінченний добуток метризовних просторів, а значить, досконалий, отже, відкрита в $\hat{X}_k$ множина H є в цьому просторі множиною типу F_σ. Оскільки і множина E є типу F_σ в X, а k-та проекція $p_{\hat{X}_k}: X \to \hat{X}_k$ неперервна, то і множина $E_0^{(k)} = E \cap$

$\bigcap\ p^{-1}_{\hat{X}_k}(H \cup \Gamma)$ є типу F_σ в X. Крім того, $p_{\hat{X}_k}(E_0^{(k)}) \subseteq H \cup \Gamma$, отже, множина $E_0^{(k)}$ є проективно першої категорії відносно k-ї змінної. Простір $\tilde{X} = p^{-1}_{\hat{X}_k}(G)$ з топологією, індукованою з X, можна розглядати як топологічний добуток $G \times X_k$, а звуження $g = f_{|\tilde{X}}$ — як функцію двох змінних $\hat{x}_k$ і x_k. Оскільки $\tilde{X}$ — відкритий підпростір X, то $D(g) = D(f) \cap \tilde{X}$. Зрозуміло, що функція g неперервна відносно другої змінної, адже f нарізно неперервна. Покажемо, що g квазінеперервна відносно першої змінної. Нехай $\hat{x}_k \in G$. Оскільки G відкрита в $\hat{X}_k$, то для кожного $i = 1, \ldots, n$, $i \neq k$, існують такі відкриті в X_i множини U_i, що для їх добутку U маємо $\hat{x}_k \in U \subseteq G$. З беровості простору G випливає беровість простору U, а отже, і беровість кожного співмножника U_i. Зафіксуємо $x_k \in X_k$ і розглянемо звуження h функції $g_{x_k} : G \to \mathbf{R}$ на множину U. Функція $h : U \to \mathbf{R}$ є нарізно неперервною функцією $n-1$ змінних, яка визначена на добутку берівських метризовних просторів U_i, який сам є берівським. Тоді за теоремою 2.4 з [2] функція h буде квазінеперервною. В такому разі функція g_{x_k} буде квазінеперервною в точці $\hat{x}_k$, отже, g — квазінеперервна відносно першої змінної. Застосувавши тепер до функції g теорему 2, ми отримаємо, що $D(g) = \bigcup_{m=1}^{\infty} E_m^{(k)}$, де $E_m^{(k)}$ — F_σ-множини, які є локально проективно першої категорії відносно другої змінної в просторі $\tilde{X}$. Оскільки $\tilde{X}$ — відкритий підпростір X, а X — метризовний, то множини $E_m^{(k)}$ є типу F_σ в X і разом з тим є локально проективно першої категорії відносно k-ї змінної. Але $E = E_0^{(k)} \cup D(g)$. Таким чином, $E = \bigcup_{m=0}^{\infty} E_m^{(k)}$ — шукане подання.

Покладемо тепер $E_m = \bigcap\limits_{k=1}^{n} \bigcup\limits_{j=0}^{m} E_j^{(k)}$. Оскільки $\bigcup\limits_{j=0}^{\infty} E_j^{(k)} = E$ для кожного $k = 1, \ldots, n$, то і $\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} E_m = E$. Крім того, множини $\bigcup\limits_{j=0}^{m} E_j^{(k)}$ є локально проективно першої категорії відносно k-ї змінної і типу F_σ, тому їх перетин E_m буде локально проективно першої категорії і типу F_σ.

Достатність. Нехай $E = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} E_m$, де E_m — F_σ-множини, які є локально проективно першої категорії. Спочатку покажемо, що тоді E подається у вигляді об'єднання послідовності замкнених локально проективно ніде не щільних множин. Для цього досить показати, що кожна множина E_m подається у такому вигляді. З теореми Стоуна про паракомпактність метризовного простору [14, с. 414] випливає, що існує таке відкрите локально скінченне покриття $\mathcal{U}$ простору X, що для кожного $U \in \mathcal{U}$ множина $M = E_m \cap U$ є проективно першої категорії. Оскільки M — це множина типу F_σ, то $M = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} B_{0,j}$, де $(B_{0,j})_{j=1}^{\infty}$ — зростаюча послідовність замкнених множин. Для кожного $k = 1, \ldots, n$ проекція $M_k = p_{\hat{X}_k}(M)$ є множиною першої категорії в $\hat{X}_k$. Тому існує така зростаюча послідовність замкнених ніде не щільних в $\hat{X}_k$ множин $B_{k,j}$, що $M_k \subseteq \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} B_{k,j}$. Покладемо $B_j^{(U)} = B_{0,j} \cap \left(\bigcap\limits_{k=1}^{n} p^{-1}_{\hat{X}_k}(B_{k,j})\right)$. Зрозуміло, що множини $B_j^{(U)}$ замкнені і проективно ніде не щільні. Крім того, $M = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j^{(U)}$. Справді, якщо $x \in M$, то існують такі індекси j_k, $i = 0, 1, \ldots, n$, що $x \in B_{0,j_0}$ і $p_{\hat{X}_k}(x) \in B_{k,j_k}$ при $k = 1, \ldots, n$. Тоді для індекса $j = \max\{j_0, \ldots \ldots, j_n\}$ матимемо, що $x \in B_{0,j}$ і $p_{\hat{X}_k}(x) \in B_{k,j}$ при $k = 1, \ldots, n$, отже, $x \in B_j^{(U)}$. Оскільки сім'я $\left(B_j^{(U)}\right)_{U \in \mathcal{U}}$ локально скінченна, адже $B_j^{(U)} \subseteq U$, то множина $B_j = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} B_j^{(U)}$ замкнена і локально проективно ніде не щільна. Крім того, $\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j^{(U)} \right) = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} (E_m \cap U) = E_m$, адже $\mathcal{U}$ — це покриття X.

Таким чином, $E = \bigcup_{m=1}^{\infty} F_m$, де F_m — замкнені локально проективно ніде не щільні множини. Візьмемо $m \in \mathbf{N}$ і покажемо, що існує така нарізно неперервна і напівнеперервна знизу функція $f_m : X \to [0, 1]$, що $D(f_m) = F_m$. Нехай $\mathcal{U}$ — локально скінченне відкрите покриття X таке, що для кожного $U \in \mathcal{U}$ множина $F_m \cap U$ проективно ніде не щільна. Зафіксуємо $U \in \mathcal{U}$ і покладемо $L = F_m \cap U$. Множини $L_k = \overline{p_{\hat{X}_k}(L)}$ замкнені і ніде не щільні в $\hat{X}_k$, отже, і множина $A = \bigcup_{k=1}^{n} p_{\hat{X}_k}^{-1}(L_k)$ замкнена і ніде не щільна в X. Позначимо через $\mathcal{T}$ топологію добутку на X. За теоремою 3.2.1 з [8] пара (X, A) сприятлива, тобто існують послідовності сімей $\tau_i : A \to \mathcal{T}$ відкритих в X множин і функцій $\pi_i : A \to X$ такі, що для кожного номера i та довільних точок $a, b \in A$ виконуються умови:

1) системи $\mathcal{W}_i = \tau_i(A) = \{\tau_i(a) : a \in A\}$ локально скінченні;

2) $\pi_i(a) \in \tau_i(a)$ і $\pi_i(a) = \pi_i(b)$, якщо $\tau_i(a) = \tau_i(b)$;

3) $\tau_i(a) \cap A = \varnothing$;

4) $\lim_{i \to \infty} \pi_i(a) = a$;

5) для кожного околу U_1 довільної точки x_0 в X існує такий окіл U_2 цієї ж точки в X, що для деякого номера i_0 перетин $\tau_j(x) \cap U_2 = \varnothing$ для всіх $j > i_0$ і $x \in A \setminus U_1$.

Така побудова здійснюється з допомогою теореми Стоуна, коли ми у покриття простору X кулями радіуса $1/i$ відносно узгодженої з топологією $\mathcal{T}$ метрики вписуємо відкриті локально скінченні покриття. Для кожної множини $W = \tau_i(a) \in \mathcal{W}_i$ точка $\pi_i(a) \in \tau_i(a)$ на основі умови 2 від a не залежить, а визначається тільки множиною W; позначатимемо її $p_i(W)$.

Покладемо $F = \overline{L}$. Оскільки $L \subseteq A$ і A замкнена, то $F \subseteq A$. Побудуємо нарізно неперервну і напівнеперервну знизу функцію $g_m^{(U)} : X \to [0, +\infty)$, для якої $D(g_m^{(U)}) = F$. Позначимо $\mathcal{V}_i = \tau_i(F) = \{\tau_i(a) : a \in F\}$. Кожному елементу $V \in \mathcal{V}_i$ поставимо у відповідність неперервну функцію $\varphi_{V,i} : X \to [0, 1]$, для якої $\varphi_{V,i}(p_i(V)) = 1$ і $\varphi_{V,i}(x) = 0$ на $X \setminus V$. Покладемо

$$g_{m,i}(x) = \sum_{V\in\mathcal{V}_i} \varphi_{V,i}(x) \quad \text{і} \quad g_m^{(U)}(x) = \sum_{i=1}^{\infty} g_{m,i}(x),$$

коли $x \in X$. Оскільки системи $\mathcal{V}_i$ локально скінченні, то функції $g_{m,i}$ неперервні на X. Крім того, $g_{m,i}(x) \geq 0$ на X.

Нехай $x_0 \in X \setminus F$. Покажемо, що функція $g_m^{(U)}$ визначена і неперервна в точці x_0. Розглянемо такий окіл U_1 точки x_0, що $U_1 \cap F = \varnothing$, і згідно з (5) виберемо окіл U_2 точки x_0 і номер i_0 так, що $\tau_i(a) \cap U_2 = \varnothing$ для всіх $i > i_0$ та $a \in A \setminus U_1$. Але $F \subseteq A \setminus U_1$, тому $\varphi_{V,i}(x) = 0$ для всіх $x \in U_2$, $i > i_0$ та $V \in \in \mathcal{V}_i$, отже, $g_{m,i}(x) = 0$ на U_2 при $i > i_0$. Тоді $g_m^{(U)}(x) = \sum_{i=1}^{i_0} g_{m,i}(x)$ на U_2, звідки і випливає визначеність і неперервність $g_m^{(U)}$ в точці x_0.

Нехай $x_0 \in F$. Оскільки $F = \overline{L}$, то для кожного $k = 1, \ldots, n$ маємо $\hat{x}_{0,k} = = p_{\hat{X}_k}(x_0) \in p_{\hat{X}_k}(\overline{L}) \subseteq \overline{p_{\hat{X}_k}(L)} = L_k$, тому $p_{\hat{X}_k}^{-1}(\hat{x}_{0,k}) \subseteq A$. Але на основі властивості 3 $g_m^{(U)}(x) = 0$ на A, отже, $g_m^{(U)}$ — нарізно неперервна в точці x_0 і напівнеперервна знизу в цій точці, адже $g_m^{(U)}(x_0) = 0$ і $g_m^{(U)}(x) \geq 0$ на X. Крім того, для кожного i маємо $V_i = \tau_i(x_0) \in \mathcal{V}_i$ і в точці $z_i = p_i(V_i) = \pi_i(x_0)$ виконуються нерівності $g_m^{(U)}(z_i) \geq g_{m,i}(z_i) \geq \varphi_{V_i,i}(z_i) = 1$. При цьому за властивістю 4 $\lim\limits_{i\to\infty} z_i = x_0$. Тому $x_0 \in D(g_m^{(U)})$.

Оскільки простір X досконало нормальний, то для кожного $U \in \mathcal{U}$ існує така неперервна функція $h_U : X \to [0, 1]$, що $U = h_U^{-1}((0,1])$. Функції $g_{U,m} = = h_U \cdot g_m^{(U)}$ нарізно неперервні, невід'ємні, напівнеперервні знизу і $g_{U,m}(x) = 0$ на $X \setminus U$. Тоді за лемою 2 функція $g_m = \sum_{U\in\mathcal{U}} g_{U,m}$ буде нарізно неперервною, невід'ємною і напівнеперервною знизу на X, причому $D(g_m) = = \bigcup\limits_{U\in\mathcal{U}} D(g_{U,m})$. Зрозуміло, що $D(g_{U,m}) \subseteq D(g_m^{(U)}) = \overline{F_m \cap U} \subseteq F_m$, тому $D(g_m) \subseteq F_m$. Нехай $x_0 \in F_m$. Оскільки $\mathcal{U}$ покриває X, то існує таке $U_0 \in \mathcal{U}$, що $x_0 \in U_0$. Тоді $h_{U_0}(x) > 0$ на U_0, отже, $D(g_m^{(U_0)}) \cap U_0 \subseteq D(g_{U_0,m})$. В такому разі $x_0 \in F_m \cap U_0 \subseteq D(g_{U_0,m}) \subseteq D(g_m)$. Таким чином, $D(g_m) = F_m$. Беручи довільний гомеоморфізм $\psi : [0, +\infty) \to [0, 1)$ і покладаючи $f_m = \psi \circ g_m$, одержуємо шукану функцію f_m.

Розглянемо тепер функцію $f = \sum_{m=1}^{\infty} 2^{-m} f_m$. На основі наслідку 2.2.2 з [8] одержуємо $D(f) = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} D(f_m) = E$, причому, очевидно, f є нарізно неперервною.

1. *Kershner R.* The continuity of function of many variables // Trans. Amer. Math. Soc. – 1943. – **53**, № 1. – P. 83 – 100.
2. *Breckenridge J. C., Nishiura T.* Partial continuity, quasicontinuity and Baire spaces // Bull. Inst. Math. Acad. Sinica. – 1976. – **4**, № 2. – P. 191 – 203.
3. *Calbrix J., Troallic T.-P.* Applications separement nontinues // G.r. Acad. sci. A. – 1979. – **288**. – P. 647 – 648.
4. *Маслюченко В. К., Михайлюк В. В.* Нарізно неперервні функції з сепарабельною множиною точок розриву. – Чернівці, 1990. – 11 с. – Деп. в УкрНДІНТІ, N902-Ук90.

5. *Маслюченко В. К., Михайлюк В. В., Собчук О. В.* Обернені задачі теорії нарізно неперервних відображень // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**, № 9. – С. 1209 – 1220.
6. *Маслюченко В. К., Михайлюк В. В.* Про нарізно неперервні функції на добутках метризовних просторів // Допов. НАН України. – 1993. – № 4. – С. 28 – 31.
7. *Михайлюк В. В.* Обернені задачі теорії нарізно неперервних відображень: Дис. ... канд. фіз.-мат. наук. – Чернівці, 1994. – 82 с.
8. *Маслюченко В. К., Михайлюк В. В., Собчук О. В.* Дослідження про нарізно неперервні відображення // Матеріали міжнародної математичної конференції, присвяченої пам'яті Ганса Гана. – Чернівці: Рута, 1995. – С. 192 – 246.
9. *Маслюченко В. К., Михайлюк В. В.* Нарізно неперервні функції на добутках компактів і їх залежність від n змінних // Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, № 3. – С. 344 – 350.
10. *Маслюченко В. К.* Нове про нарізно неперервні відображення // Тези міжнародної конференції, присвяченої пам'яті академіка М. П. Кравчука. – Київ; Луцьк, 1992. – С. 125.
11. *Маслюченко В. К.* Зв'язки між різними характеристиками величини множини точок сукупної неперервності нарізно неперервних відображень. – Чернівці, 1994. – 17 с. – Деп. в ДНТБ України, N79-Ук94.
12. *Михайлюк В. В.* Характеризація множин точок розриву нарізно неперервних функцій на добутках метризовних просторів // Тези міжнародної математичної конференції, присвяченої пам'яті Ганса Гана. – Чернівці: Рута, 1994. – С. 103.
13. *Куратовский К.* Топология: В 2-х т. – М.: Мир, 1966. – Т. 1. – 594 с.
14. *Энгелькинг Р.* Общая топология. – М.: Мир, 1986. – 752 с.

Одержано 18.09.98