УДК 519.21

М. П. Моклячук

# О фильтрации преобразований случайных последовательностей

Пусть $\xi(n)$, $\eta(n)$ — некоррелированные стационарные случайные последовательности со значениями в гильбертовом пространстве. Обозначим через $A\xi$ преобразование случайной последовательности вида $A\xi = \sum_{j=0}^{\infty} \langle \xi(i), a(i) \rangle$. Для того чтобы найти оптимальную линейную оценку значения преобразования $A\xi$ по наблюдениям последовательности $\xi(n) + \eta(n)$ в точках $n = -1, -2, \ldots$, необходимо знать спектральные характеристики случайных последовательностей $\xi(n)$ и $\eta(n)$. Во многих случаях точные значения спектральных характеристик неизвестны, но можно предполагать, что спектральные плотности последовательностей $\xi(n)$, $\eta(n)$ существуют и принадлежат некоторым классам спектральных плотностей $F$, $G$, описанным ниже. Тогда можно найти оценку значения величины ошибки оптимальной линейной оценки преобразования $A\xi$.

Пусть $X$ — сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением $\langle x, y \rangle$ и $\{e_k\}$, $k = 1, 2, \ldots,$ — ортонормированный базис в $X$. Случайная последовательность $\xi(n)$ со значениями в $X$ стационарна, если ее компоненты $\xi_k(n) = \langle \xi(n), e_k \rangle$ удовлетворяют условиям [1, 2]

$$M\xi_k(n) = 0, \; M\,\|\xi(n)\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} M\,|\xi_k(n)|^2 < \infty,$$

$$M\xi_k(n)\,\overline{\xi_j(m)} = \langle B(n-m)\,e_k, e_j \rangle.$$

Корреляционная функция $B(n, m) = B(n-m)$ последовательности является операторной функцией в $X$, а корреляционный оператор $B = B(0)$ — ядерным: $\sum_{k=1}^{\infty} \langle Be_k, e_k \rangle = M\,\|\xi(n)\|^2 < \infty$.

Последовательность $\xi(n)$ имеет спектральную плотность, если существует положительная операторная функция $f(\lambda)$ в $X$ такая, что

$$\langle B(n-m)\,e_k, e_j \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)\lambda} \langle f(\lambda)\,e_k, e_j \rangle\,d\lambda, \qquad k, j = 1, 2, \ldots$$

Спектральная плотность $f(\lambda)$ при почти всех $\lambda$ является ядерным оператором и ее ядерная норма интегрируема [1]:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \langle f(\lambda)\,e_k, e_k \rangle\,d\lambda = \sum_{k=1}^{\infty} \langle B(0)\,e_k, e_k \rangle = M\,\|\xi(n)\|^2 < \infty.$$

(В дальнейшем будем использовать обозначение $\langle f(\lambda)\,e_k, e_k \rangle = f_k(\lambda)$).

В зависимости от свойств замкнутого линейного многообразия $H_n(\xi)$, порожденного в гильбертовом пространстве $H$ случайных величин второго порядка [3] величинами $\xi_k(s)$, $s \leqslant n$, $k = 1, 2, \ldots,$ случайная последовательность $\xi(n)$ может быть регулярной $\left(\bigcap_n H_n(\xi) = 0\right)$, сингулярной $\left(\bigcap_n H_n(\xi) = H_s(\xi),\ \forall s \in N\right)$ или ортогональной в $H$ суммой регулярной и сингулярной последовательностей. Достаточные условия регулярности приведены в [1].

Определим $F \times G$ как множество пар спектральных плотностей $(f(\lambda), g(\lambda))$ стационарных случайных последовательностей $\xi(n)$, $\eta(n)$, удовлетворяющих условиям:

а) $\sum_{k=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f_k(\lambda)\,d\lambda = M\,\|\xi(n)\|^2 \leqslant R^2;$

б) $\sum_{k=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\ln f_k(\lambda)\,d\lambda > -\infty$;

в) стационарная последовательность $\xi(n)+\eta(n)$ регулярна. Через $F\times G_1$ обозначим множество пар спектральных плотностей, удовлетворяющих кроме условий а — в условию

г) $\sum_{k=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f_k(\lambda)\,g_k(\lambda)\,[f_k(\lambda)+g_k(\lambda)]^{\oplus}\,d\lambda \leqslant R_1^2$;

а через $F\times G_2$ — множество пар спектральных плотностей, удовлетворяющих кроме условий а — в условию

д) $\sum_{k=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} g_k(\lambda)\,d\lambda = M\,\|\eta(n)\|^2 \leqslant R_2^2$.

($[f(\lambda)]^{\oplus}$ обозначает псевдообращение функции $f(\lambda)$ [3]).

Преобразование $A\xi$ задается последовательностью $a(j)$, $j=0,1,\ldots$, со значениями в $X$, удовлетворяющей условиям:

А) $\sum_{j=0}^{\infty}\|a(j)\| < \infty$;

Б) $\sum_{j=0}^{\infty}(j+1)\,\|a(j)\|^2 < \infty$.

Величину ошибки линейной оценки $\widehat{A}\xi$ значения преобразования $A\xi$ будем вычислять по формуле

$$\rho(\widehat{A}\xi) = M\,\|A\xi-\widehat{A}\xi\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} M\,|\langle(A\xi-\widehat{A}\xi), e_k\rangle|^2.$$

Рассмотрим сначала задачу для преобразования $A_N\xi = \sum_{j=0}^{N}\langle\xi(j), a(j)\rangle = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{N} a_k(j)\,\xi_k(j)$, $a_k(j)=\langle e_k, a(j)\rangle$. Обозначим через $\sup\limits_{F\times G_1}$ супремум по всем парам спектральных плотностей $(f(\lambda), g(\lambda))\in F\times G_1$, а через $\inf\limits_{\widehat{A}_N}$ — инфимум по всем линейным оценкам преобразования $A_N\xi$ по наблюдениям $\xi(n)+\eta(n)$, $n=-1,-2,\ldots$

Теорема 1. *Пусть $\widehat{A}_N\xi$ — линейная оценка значения $A_N\xi$ по наблюдениям $\xi(n)+\eta(n)$, $n=-1,-2,\ldots$, при фиксированных плотностях $(f(\lambda), g(\lambda))\in F\times G_1$. Тогда*

$$\sup_{F\times G_1}\inf_{\widehat{A}_N}\rho(\widehat{A}_N\xi) = \inf_{\widehat{A}_N}\sup_{F\times G_1}\rho(\widehat{A}_N\xi) = \max_k\,[\nu_{kN}^2 R_1^2 + \mu_{kN}^2(R^2-R_1^2)],$$

*где $\mu_{kN}^2$ — наибольшее собственное значение оператора $Q_{kN}$ в пространстве $R^{N+1}$, заданного матрицей с элементами $Q_{kN}(p,q) = \sum_{u=0}^{\min(N-p,N-q)} a_k(u+p)\,\overline{a_k(u+q)}$, $p,q=0,1,\ldots,N$, $\nu_{kN}^2 = \lim\limits_{n\to\infty}\nu_{knN}^2$, $\nu_{knN}^2$ — максимум эрмитовой формы $S_{knN} = \sum_{p=0}^{n}|a_k(N)u_p + a_k(N-1)u_{p+1}+\ldots+a_k(N-n+p)u_n|^2$ при условии $\sum_{p=0}^{n}|u_p|^2 = 1$. Последовательность $\nu_{knN}^2$, $n=1,2,\ldots$, неубывающая и $\nu_{kNN}^2 = \mu_{kN}^2$.*

Доказательство. Предположим, что спектральные плотности $f(\lambda)$, $g(\lambda)$ последовательностей $\xi(n)$, $\eta(n)$ заданы и $(f(\lambda), g(\lambda))\in F\times G_1$.

Обозначим через $\check{\xi}_k(j) = \hat{M}(\xi_k(j) \mid H(\xi_k + \eta_k))$ оптимальную в среднеквадратическом смысле линейную оценку значения $\xi_k(j)$ по наблюдениям всех значений $\xi_k(n) + \eta_k(n)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, а через $\hat{\xi}_k(j)$ — линейную оценку $\xi_k(j)$ по наблюдениям $\xi_k(n) + \eta_k(n)$, $n = -1, -2, \ldots$. Тогда можно записать

$$\inf_{\hat{A}_N} \rho(\hat{A}_N \xi) = \sum_{k=1}^{\infty} \inf_{\hat{\xi}_N} M \Big| \sum_{j=0}^{N} a_k(j)\, \xi_k(j) - \sum_{j=0}^{N} a_k(j)\, \hat{\xi}_k(j) \Big|^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \Big[ M \Big| \sum_{j=0}^{N} a_k(j)(\xi_k(j) - \check{\xi}_k(j)) \Big|^2 + \inf_{\hat{\xi}_k} M \Big| \sum_{j=0}^{N} a_k(j)(\check{\xi}_k(j) - \hat{\xi}_k(j)) \Big|^2 \Big] =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \Big[ \int_{-\pi}^{\pi} | A_{kN}(e^{i\lambda}) |^2 f_k(\lambda)\, g_k(\lambda)\, [f_k(\lambda) + g_k(\lambda)]^{\oplus} d\lambda +$$

$$+ \inf_{\hat{\xi}_N} M \Big| \sum_{j=0}^{N} a_k(j)(\check{\xi}_k(j) - \hat{\xi}_k(j)) \Big|^2 \Big].$$

Здесь $A_{kN}(e^{i\lambda}) = \sum_{j=0}^{N} a_k(j)\, e^{ij\lambda}$, а $\inf\limits_{\hat{\xi}_k}$ обозначает инфимум по всем линейным оценкам значений $\xi_k(j)$ по наблюдениям $\xi_k(n) + \eta_k(n)$, $n = -1, -2, \ldots$. Случайные последовательности $\check{\xi}_k(j)$ имеют спектральные плотности $f_k^2(\lambda)[f_k(\lambda) + g_k(\lambda)]^{\oplus}$ и в силу условий а — в регулярны. Следовательно, их можно представить в виде одностороннего скользящего суммирования $\check{\xi}_k(j) = \sum_{u=-\infty}^{j} h_k(j-u)\, \theta_k(u)$, где $\theta_k(u)$ — некоррелированная случайная последовательность с единичной дисперсией и $\sum_{u=0}^{\infty} | h_k(u) |^2 = \int_{-\pi}^{\pi} f_k^2(\lambda)[f_k(\lambda) + g_k(\lambda)]^{\oplus} d\lambda$. Тогда

$$\inf_{\hat{\xi}_k} M \Big| \sum_{j=0}^{N} a_k(j)(\check{\xi}_k(j) - \hat{\xi}_k(j)) \Big|^2 = M \Big| \sum_{j=0}^{N} a_k(j) \sum_{u=0}^{j} h_k(j-u)\, \theta_k(u) \Big|^2 =$$

$$= \sum_{j=0}^{N} \sum_{m=0}^{N} a_k(j)\, \overline{a_k(m)} \sum_{u=0}^{\min(m,j)} h_k(j-u)\, \overline{h_k(m-u)} =$$

$$= \sum_{p=0}^{N} \sum_{q=0}^{N} h_k(p)\, \overline{h_k(q)} \sum_{u-0}^{\min(N-p,N-q)} a_k(u+p)\, \overline{a_k(u+q)} =$$

$$= \sum_{p=0}^{N} \sum_{q=0}^{N} Q_{kN}(p,q)\, h_k(p)\, \overline{h_k(q)} =$$

$$= \sum_{p=0}^{N} \sum_{q=0}^{N} Q_{kN}(p,q)\, \tilde{h}_k(p)\, \overline{\tilde{h}_k(q)} \int_{-\pi}^{\pi} f_k^2(\lambda)[f_k(\lambda) + g_k(\lambda)]^{\oplus} d\lambda,$$

где $\tilde{h}_k(p) = h_k(p) \Big[ \int_{-\pi}^{\pi} f_k^2(\lambda)[f_k(\lambda) + g_k(\lambda)]^{\oplus} d\lambda \Big]^{-1/2}$, $\sum_{p=0}^{N} | \tilde{h}_k(p) |^2 = 1$.

Таким образом,

$$\inf_{\hat{A}_N} \rho(\hat{A}_N \xi) = \sum_{k=1}^{\infty} \Big[ \int_{-\pi}^{\pi} | A_{kN}(e^{i\lambda}) |^2 f_k(\lambda)\, g_k(\lambda)\, [f_k(\lambda) + g_k(\lambda)]^{\oplus} d\lambda +$$

$$+ \sum_{p=0}^{N} \sum_{q=0}^{N} Q_{kN}(p,q)\, \tilde{h}_k(p)\, \overline{\tilde{h}_k(q)} \int_{-\pi}^{\pi} f_k^2(\lambda)[f_k(\lambda) + g_k(\lambda)]^{\oplus} d\lambda. \qquad (1)$$

Отсюда

$$\sup_{F\times G_1}\inf_{\hat{A}_N}\rho(\hat{A}_N\xi)=\max_k[\max_\lambda|A_{kN}(e^{i\lambda})|^2R_1^2+$$

$$+\mu_{kN}^2(R^2-R_1^2)]=\max_k[\nu_{kN}^2R_1^2+\mu_{kN}^2(R^2-R_1^2)],$$

так как [4] $\max_\lambda|A_{kN}(e^{i\lambda})|^2=\nu_{kN}^2=\lim_{n\to\infty}\nu_{knN}^2$.

Оценим теперь $\inf_{\hat{A}_N}\sup_{F\times G_1}\rho(\hat{A}_N\xi)$. Обозначим через $C$ множество линейных оценок преобразования $A_N\xi$, которые имеют вид $\hat{A}_N\xi=\sum_{j=-\infty}^{-1}\langle\check{\xi}(j),c(j)\rangle=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{-1}c_k(j)\check{\xi}_k(j)$ $(\check{\xi}_k(j)\in H_j(\xi_k+\eta_k)$ в силу регулярности $\xi(n)+$ $+\eta(n))$. Тогда

$$\inf_{\hat{A}_N}\sup_{E\times G_1}\rho(\hat{A}_N\xi)\leqslant\inf_{\hat{A}_N\in C}\sup_{F\times G_1}\rho(\hat{A}_N\xi)=$$

$$=\inf_{\hat{A}_N\in C}\sup_{F\times G_1}\sum_{k=1}^{\infty}\left[M\left|\sum_{j=0}^{N}a_k(j)(\xi_k(j)-\check{\xi}_k(j))\right|^2+\right.$$

$$\left.+M\left|\sum_{j=0}^{N}a_k(j)\check{\xi}_k(j)-\sum_{j=-\infty}^{-1}C_k(j)\check{\xi}_k(j)\right|^2\right]=$$

$$=\inf_{\hat{A}_N\in C}\sup_{F\times C_1}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\int_{-\pi}^{\pi}|A_{kN}(e^{i\lambda})|^2f_k(\lambda)g_k(\lambda)[f_k(\lambda)+g_k(\lambda)]^{\oplus}d\lambda+\right.$$

$$\left.+\int_{-\pi}^{\pi}|A_{kN}(e^{i\lambda})-C(e^{i\lambda})|^2f_k^2(\lambda)[f_k(\lambda)+g_k(\lambda)]^{\oplus}d\lambda\right].\qquad(2)$$

Здесь $C(e^{i\lambda})=\sum_{s=-\infty}^{-1}c_k(s)e^{is\lambda}$. Учитывая, что [4]$\max_\lambda|A_{kN}(e^{i\lambda})-C(e^{i\lambda})|^2\geqslant$ $\geqslant\mu_{kN}^2$ и равенство в этом соотношении достигается для специально подобранной функции $C(e^{i\lambda})$, из (1), (2) получаем

$$\inf_{\hat{A}_N}\sup_{F\times G_1}\rho(\hat{A}_N\xi)\leqslant\max_k[\max_\lambda|A_{kN}(e^{i\lambda})|^2R_1^2+\mu_{kN}^2(R^2-R_1^2)]=\sup_{F\times G_1}\inf_{\hat{A}_N}\rho(\hat{A}_N\xi).$$

А так как в последнем соотношении возможно только равенство [5], то теорема доказана.

Анализируя соотношения (1), (2), можно показать справедливость следующих утверждений.

Теорема 2. *Пусть $\hat{A}_N\xi$ — линейная оценка $A_N\xi$ при заданных $(f(\lambda),g(\lambda))\in F\times G_1$. Тогда*

$$\sup_{F\times G_2}\inf_{\hat{A}_N}\rho(\hat{A}_N\xi)=\inf_{\hat{A}_N}\sup_{F\times G_2}\rho(\hat{A}_N\xi)=$$

$$=\max_k\left[\nu_{kN}^2\frac{R^2R_2^2}{R^2+R_2^2}+\mu_{kN}^2\frac{R^4}{R^2+R_2^2}\right].$$

Теорема 3. *Пусть $\hat{A}_N\xi$ — линейная оценка $A_N\xi$ при заданных $(f(\lambda),g(\lambda))\in F\times G$. Тогда*

$$\sup_{F\times G}\inf_{\hat{A}_N}\rho(\hat{A}_N\xi)=\inf_{\hat{A}_N}\sup_{F\times G}\rho(\hat{A}_N\xi)=\max_k\nu_{kN}^2R^2.$$

Следствие 1. *Величина ошибки* $\rho(\hat{A}_N\xi)$ *линейной оценки значения преобразования* $A_N\xi$ *случайной последовательности* $\xi(n)$ *по наблюдениям последовательности* $\xi(n)+\eta(n)$ *при* $n=-1,-2,\dots$, *не превышает величины* $\max_k \nu_{kN}^2 R^2$ *для всех стационарных случайных последовательностей* $\xi(n)$, $\eta(n)$ *со спектральными плотностями* $(f(\lambda), g(\lambda)) \in F\times G$.

*Если же* $(f(\lambda), g(\lambda)) \in F\times G_1$, *то*

$$\rho(\hat{A}_N\xi) \leqslant \max_k [\nu_{kN}^2 R_1^2 + \mu_{kN}^2 (R^2 - R_1^2)]$$

*и*

$$\rho(\hat{A}_N\xi) \leqslant \max_k \left[\nu_{kN}^2 \frac{R^2R_2^2}{R^2+R_2^2} + \mu_{kN}^2 \frac{R^4}{R^2+R_2^2}\right]$$

*для всех пар спектральных плотностей* $(f(\lambda), g(\lambda)) \in F\times G_2$.

Рассмотрим теперь задачу для преобразования $A\xi$. Учитывая, что [4] $\lim_{N\to\infty} \mu_{kN}^2 = \lim_{N\to\infty} \nu_{kN}^2 = \max_\lambda |A_k(e^{i\lambda})|^2$, где $A_k(e^{i\lambda}) = \sum_{j=0}^{\infty} a_k(j) e^{ij\lambda}$ и, с другой стороны, [6] $\lim_{N\to\infty} \mu_{kN}^2 = \mu_k^2$, $\mu_k^2$ — наибольшее собственное значение вполне непрерывного оператора $Q_k = A_k\bar{A}_k$ в пространстве $l_2$, где $A_k$ — оператор, заданный матрицей с элементами $a_k(p,q) = a_k(p+q)$, $p,q=0,1,\dots$, получаем такой результат.

Теорема 4. *Пусть* $\hat{A}\xi$ — *линейная оценка значения* $A\xi$ *по наблюдениям* $\xi(n)+\eta(n)$, $n=-1,-2,\dots$, *при заданных* $(f(\lambda), g(\lambda)) \in F\times G$. *Тогда*

$$\sup_{F\times G} \inf_{\hat{A}} \rho(\hat{A}\xi) = \inf_{\hat{A}} \sup_{F\times G} \rho(\hat{A}\xi) = \max_k \mu_k^2 R^2,$$

*где* $\mu_k^2$ — *наибольшее собственное значение оператора* $Q_k = A_k\bar{A}_k$ *в пространстве* $l_2$, *заданного матрицей*

$$Q_k(p,q) = \sum_{n=0}^{\infty} a_k(p+u)\overline{a_k(q+u)}, \qquad p,q = 0,1,\dots$$

Результат не изменится при замене множества $F\times G$ на множество пар спектральных плотностей $F\times G_1$ или $F\times G_2$.

Следствие 2. *Величина ошибки* $\rho(\hat{A}\xi)$ *линейной оценки* $\hat{A}\xi$ *преобразования* $A\xi = \sum_{j=0}^{\infty} \langle \xi(j), a(i)\rangle$ *случайной последовательности* $\xi(n)$ *по наблюдениям последовательности* $\xi(n)+\eta(n)$ *при* $n=-1,-2,\dots$, *не превышает величины* $\max_k \mu_k^2 R^2$ *для всех стационарных случайных последовательностей* $\xi(n)$, $\eta(n)$ *со спектральными плотностями* $(f(\lambda), g(\lambda)) \in F\times G$.


1. *Розанов Ю. А.* Теория обновляющих процессов.— М.: Наука, 1974.— 128 с.
2. *Kallianpur G., Mandrecar V.* Multiplicity and representation theory of purely non-deterministic stochastic processes.— Теория вероятностей и ее применения, 1965, 10, вып. 4, с. 614—644.
3. *Ширяев А. Н.* Вероятность.— М.: Наука, 1980.— 576 с.
4. *Гренандер У., Сеге Г.* Теплицевы формы и их применения.— М.: Изд-во иностр. лит., 1961.— 308 с.
5. *Мак-Кинси Дж.* Введение в теорию игр.— М.: Физматгиз, 1960.— 420 с.
6. *Данфорд Н., Шварц Дж.* Линейные операторы.— М.: Изд-во иностр. лит. 1962.— 896 с.



Киев. ун-т



Получено 28.04.84,
после доработки — 15.05.85