УДК 517.929

В. И. Кузнецова

О разрешимости на оси и устойчивости уравнений нейтрального типа с убывающей памятью

Типичным примером уравнений, исследуемых в работе, является функционально-дифференциальное уравнение нейтрального типа вида

$$x'(t) - \sum_{i=1}^{\infty} a_i(t)\, x(t - \varepsilon h_i) - b_i(t)\, x'(t - \varepsilon h_i) = f(t)$$

с малым параметром ε. Подобные уравнения обычно (см., например, [1—7]) называют уравнениями с малым запаздыванием. В работе описываются условия, при которых свойства однозначной разрешимости в классе ограниченных функций, устойчивости и неустойчивости сохраняются при переходе от $\varepsilon = 0$ к малым ε. Заметим, что в отличие от работ [1—6] мы рассматриваем абсолютно непрерывные, а не непрерывно дифференцируемые решения, и не исключаем случай $h_i \to \infty$ при $i \to \infty$.

1. Обозначим через $\mathbb{R}^n$ n-мерное арифметическое пространство с нормой $|\cdot|$, через $L_\infty = W_\infty^{(0)}$ — пространство измеримых существенно ограниченных функций $x: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ с нормой $\|x\| = \operatorname{vrai\,sup} |x(t)|$, через $W_\infty^{(1)}$ — — пространство абсолютно непрерывных ограниченных функций $x: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, производная которых лежит в L_∞, с нормой $\|x\| = \|x\|_{L_\infty} + \|x'\|_{L_\infty}$; аналогично определим пространство $W_\infty^{(1)}(-\infty, t)$; через $[\![x]\!](t)$ обозначим величину $\lim\limits_{\delta \to +0} \operatorname{vrai\,sup}\limits_{s \in (t-\delta, t+\delta)} |x(s)|$.

Определение 1. *Линейный ограниченный оператор $\mathscr{L}: W_\infty^{(k)} \to W_\infty^{(m)}$, $(k, m = 0,1)$ называют вольтерровым, если для любого $x \in W_\infty^{(k)}$ из условия $x(s) = 0$, $s < t$, следует равенство $(\mathscr{L}x)(s) = 0$, $s < t$.*

Определение 2. *Вольтерров оператор $\mathscr{L}: W_\infty^{(k)} \to W_\infty^{(m)}$, $k, m = 0, 1$, называют B-обратимым, если он обратим и обратный к нему также вольтерров.*

Легко видеть, что справедливы следующие утверждения.

Предложение 1. *Суперпозиция двух вольтерровых (B-обратимых) операторов есть вольтерров (B-обратимый) оператор.*

Предложение 2. *Множество вольтерровых операторов замкнуто в пространстве линейных ограниченных операторов.*

Предложение 3. *Множество B-обратимых операторов открыто в пространстве вольтерровых операторов.*

Определение 3. *Будем говорить что $\mathscr{L}: W_\infty^{(k)} \to L_\infty$ — оператор с убывающей памятью, если найдется функция $\alpha: (0, \infty) \to [0, \infty)$ такая, что $\alpha(h) \to 0$ при $h \to \infty$ и для всех $t \in \mathbb{R}$, $h > 0$ и $x \in W_\infty^{(k)}$ из условия $x(s) = 0$ $(s > t - h)$ следует оценка $[\![\mathscr{L}x]\!](t) \leqslant \alpha(h)\|x\|$. В случае, когда $\alpha(h) = ce^{-\gamma h}$, $c, \gamma > 0$, будем говорить, что память оператора $\mathscr{L}$ убывает экспоненциально.*

Рассмотрим оператор $\mathscr{L}: W_\infty^{(1)} \to L_\infty$ вида

$$\mathscr{L}x = x' - Ax - Bx',$$

где $A, B: L_\infty \to L_\infty$ вольтерровы. Будем предполагать, что $\|B\| < 1$. Это требование обеспечивает локальную разрешимость для любых $t \in \mathbb{R}$, $f \in L_\infty$ и $\varphi \in W_\infty^{(1)}(-\infty, t)$ *задачи Коши* ([8])

$$(\mathscr{L}x)(s) = f(s), \quad s > t, \tag{1}$$

$$x(s) = \varphi(s), \quad s < t. \tag{2}$$

Определение 4. *Уравнение $\mathscr{L}x = 0$ будем называть устойчивым при постоянно действующих возмущениях, если существует такая константа $M > 0$, что для любых $t \in \mathbb{R}$, $f \in L_\infty$ и $\varphi \in W_\infty^{(1)}(-\infty, t)$ решение задачи Коши* (1), (2) *удовлетворяет оценке*

$$|x(\tau)| + [\![x']\!](\tau) \leqslant M[\|f\| + \|\varphi\|], \quad \tau \geqslant t.$$

Определение 5. *Уравнение $\mathscr{L}x = 0$ будем называть экспоненциально устойчивым, если существуют такие константы N и $\nu > 0$, что для любых $t \in \mathbb{R}$, $\varphi \in W_\infty^{(1)}(-\infty, t)$ решение задачи Коши* (1), (2) *с $f = 0$ удовлетворяет оценке*

$$|x(\tau)| + [\![x']\!](\tau) \leqslant Ne^{-\nu(\tau - t)}\|\varphi\|, \quad \tau \geqslant t.$$

Нам потребуются следующие утверждения (см. [9]).

Предложение 4. *Пусть оператор $\mathscr{L}$ имеет убывающую память. Тогда уравнение $\mathscr{L}x = 0$ устойчиво при постоянно действующих возмущениях в том и только в том случае, когда $\mathscr{L}$ B-обратим.*

Предложение 5. *Пусть оператор $\mathscr{L}$ имеет экспоненциально убывающую память. Тогда уравнение $\mathscr{L}x = 0$ экспоненциально устойчиво в том и только в том случае, когда оно устойчиво при постоянно действующих возмущениях.*

2. Рассмотрим семейство дифференциальных операторов $\mathscr{L}_\varepsilon : W_\infty^{(1)} \to L_\infty$ вида

$$\mathscr{L}_\varepsilon x = x' - A_\varepsilon x - B_\varepsilon x',$$

где $\varepsilon \in [0, 1]$, $A_\varepsilon, B_\varepsilon : L_\infty \to L_\infty$ — вольтерровы операторы. В дальнейшем будем предполагать, что выполнены следующие условия:

1) $\sup\limits_\varepsilon \| A_\varepsilon \| \leqslant K < \infty$, $\sup\limits_\varepsilon \| B_\varepsilon \| \leqslant k < 1$;

2) операторы A_ε и B_ε непрерывны по ε в точке $\varepsilon = 0$ на (конечномерном) пространстве функций-констант, т. е. существует функция $r : [0, 1] \to [0, \infty)$ такая, что $r(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ и для всех функций-констант x справедливы оценки $\| A_\varepsilon x - A_0 x \| \leqslant r(\varepsilon) \| x \|$, $\| B_\varepsilon x - B_0 x \| \leqslant r(\varepsilon) \| x \|$;

3) память семейств операторов $\{A_\varepsilon\}$ и $\{B_\varepsilon\}$ убывает на бесконечности и «мала» при малых $\varepsilon > 0$ в следующем смысле: функции α_ε, оценивающие скорость убывания памяти операторов A_ε и B_ε, поточечно сходятся к $\alpha_0(h) \equiv 0$ при $\varepsilon \to 0$;

4) операторы A_0 и B_0 имеют вид $(A_0 x)(t) = a(t) x(t)$, $(B_0 x)(t) = b(t) x(t)$, где матрицы-функции a и b равномерно непрерывны, т. е. существует такая функция $\omega : [0, \infty) \to [0, \infty)$, что $\omega(\gamma) \to 0$ при $\gamma \to 0$ и для всех $t, s \in \mathbb{R}$ из $|t - s| \leqslant \gamma$ следует $\|a(t) - a(s)\| \leqslant \omega(\gamma)$ и $\| b(t) - b(s) \| \leqslant \omega(\gamma)$.

Пример. Рассмотрим операторы $A_\varepsilon, B_\varepsilon : L_\infty \to L_\infty$, действующие по формулам

$$(A_\varepsilon x)(t) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i(t) x(t - \varepsilon h_i), \quad (B_\varepsilon x)(t) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i(t) x(t - \varepsilon h_i). \tag{3}$$

Здесь $h_i \geqslant 0$, функции a_i и b_i равномерно непрерывны и $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \sup\limits_t \| a_i(t) \| < \infty$, а $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \sup \| b_i(t) \| < 1$. Уравнения с такими операторами называют [1—7] уравнениями с малым запаздыванием.

Очевидно, условия 1, 2, 4 выполнены. Покажем, что выполнено и условие 3. Действительно, если $x(s) = 0$ при $s > t - H$, то

$$\left| \sum_{i=1}^{\infty} a_i(t) x(t - \varepsilon h_i) \right| \leqslant \sum_{\varepsilon h_i \geqslant H} \| a_i(t) \| \cdot | x(t - \varepsilon h_i) |,$$

где суммирование справа выполняется по тем i, для которых $\varepsilon h_i \geqslant H$. Ясно, что функция $\alpha_\varepsilon(H) = \sum\limits_{\varepsilon h_i \geqslant H} \sup\limits_t \| a_i(t) \|$ оценивает память оператора A_ε. Дальнейшие рассуждения понятны.

Замечание. Условия 1 — 4 не гарантируют близости операторов $\mathscr{L}_\varepsilon$ и $\mathscr{L}_0$ не только по норме, но даже в сильном смысле. Предполагается лишь близость на функциях-константах. Заметим, что уравнение $\mathscr{L}_0 x = f$ является обыкновенным дифференциальным (т. е. уравнением без запаздывания), в то время, как в уравнении $\mathscr{L}_\varepsilon x = f$ при любом $\varepsilon > 0$ оператор $\mathscr{L}_\varepsilon$ может иметь неограниченное запаздывание (правда, убывающее на бесконечности).

Нас интересует вопрос о сохранении свойств однозначной разрешимости уравнения $\mathscr{L}_\varepsilon x = f$ при любой $f \in L_\infty$ и устойчивости уравнения $\mathscr{L}_\varepsilon x = 0$ при переходе от $\varepsilon = 0$ к малому $\varepsilon > 0$.

3. Как отмечалось, операторы $\mathscr{L}_\varepsilon$ и $\mathscr{L}_0$ не являются близкими по норме. Эту трудность удается обойти путем разрешения уравнения $\mathscr{L}_\varepsilon x = f$ относительно производной. Отметим, что оператор $I - B_\varepsilon$ обратим, посколь-

ку $\|B_\varepsilon\| < 1$. Рассмотрим вспомогательные операторы $\Lambda_\varepsilon = (I - B_\varepsilon)^{-1}\mathcal{L}_\varepsilon$ и $\Lambda_0 = (I - B_0)^{-1}\mathcal{L}_0$.

Замечание. Оператор $(I - B_\varepsilon)^{-1}$ имеет, как правило, неограниченную (но убывающую на бесконечности) память, даже если у B_ε память конечна. Это одна из причин, по которой мы с самого начала рассматриваем уравнения с неограниченным запаздыванием.

Лемма. *Операторы Λ_ε сходятся к Λ_0 по норме при* $\varepsilon \to 0$.

Доказательство. Обозначим через $D : W_\infty^{(1)} \to L_\infty$ оператор дифференцирования. Легко видеть, что $\mathcal{L}_\varepsilon = D - A_\varepsilon - B_\varepsilon D$, а $\Lambda_\varepsilon = D - (I - B_\varepsilon)^{-1}A_\varepsilon$. Запишем разность $\Lambda_0 - \Lambda_\varepsilon$ в следующем виде:

$$\Lambda_0 - \Lambda_\varepsilon = (I - B_\varepsilon)^{-1}A_\varepsilon - (I - B_0)^{-1}A_0 = (I - B_\varepsilon)^{-1}(A_\varepsilon - A_0) + \\ + [(I - B_\varepsilon)^{-1} - (I - B_0)^{-1}]A_0.$$

Отсюда

$$\|\Lambda_0 - \Lambda_\varepsilon\| \leqslant \|(I - B_\varepsilon)^{-1}\|\,\|A_\varepsilon - A_0\| + \|[(I - B_\varepsilon)^{-1} - (I - B_0)^{-1}]A_0\|. \quad (4)$$

Покажем, что каждое слагаемое справа стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$.

Оценим первое слагаемое. Поскольку $\|B_\varepsilon\| \leqslant k < 1$, $\|(I - B_\varepsilon)^{-1}\| \leqslant 1/(1 - k)$. Далее заметим, что оператор $A_\varepsilon - A_0$ здесь рассматривается как действующий из $W_\infty^{(1)}$ в L_∞. Поэтому

$$\|A_\varepsilon - A_0\| = \sup\{|A_\varepsilon x - A_0 x|(t) : t \in \mathbb{R},\ x \in W_\infty^{(1)},\ \|x\| \leqslant 1\}.$$

Зафиксируем произвольные $t \in \mathbb{R}$, $x \in W_\infty^{(1)}$, $\|x\| \leqslant 1$ и оценим выражение $|A_\varepsilon x - A_0 x|(t)$. Обозначим через c функцию-константу, тождественно равную $x(t)$, а через $\chi_{(t-\gamma,t)}$ — характеристическую функцию интервала $(t - \gamma, t)$, где $\gamma > 0$ пока произвольно. Имеем

$$|A_\varepsilon x - A_0 x|(t) \leqslant |A_\varepsilon(x - c)|(t) + |A_\varepsilon c - A_0 x|(t).$$

Второе слагаемое здесь стремится к нулю в силу условий 2 и 4, а первое оценивается следующим образом:

$$|A_\varepsilon(x - c)|(t) \leqslant |A_\varepsilon(\chi_{(t-\gamma,t)}(x - c))|(t) + |A_\varepsilon((1 - \chi_{(t-\gamma,t)})(x - c))|(t). \quad (5)$$

Поскольку $\|x\|_{W_\infty^{(1)}} \leqslant 1$ и $c(s) \equiv x(t)$, имеем $\|\chi_{(t-\gamma,t)}(x - c)\| \leqslant \gamma$. Отсюда в силу условия 1 получаем, что первое слагаемое в (5) не превышает $K\gamma$. Второе слагаемое в (5) легко оценивается с помощью условия 3:

$$|A_\varepsilon((1 - \chi_{(t-\gamma,t)})(x - c))|(t) \leqslant \alpha_\varepsilon(\gamma)\,\|(1 - \chi_{(t-\gamma,t)})(x - c)\| \leqslant 2\alpha_\varepsilon(\gamma).$$

Таким образом,

$$|A_\varepsilon(x - c)|(t) \leqslant K\gamma + 2\alpha_\varepsilon(\gamma).$$

В силу произвольности γ и малости ε это выражение можно сделать сколь-угодно малым, поэтому $\|A_\varepsilon - A_0\| \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Перейдем к оценке второго слагаемого из правой части неравенства (4). Воспользуемся формулой

$$\|[(I - B_\varepsilon)^{-1} - (I - B_0)^{-1}]A_0\| = \left\|\left[\sum_{i=0}^{\infty} B_\varepsilon^i - \sum_{i=0}^{\infty} B_0^i\right]A_0\right\| \leqslant \\ \leqslant \sum_{i=1}^{\infty}\|(B_\varepsilon^i - B_0^i)A_0\|.$$

Если представить каждую разность $B_\varepsilon^i - B_0^i$ в виде суммы $\sum_{j=1}^{i}(B_\varepsilon^j B_0^{i-j} - B_\varepsilon^{j-1}B_0^{i-j+1})$ путем добавления и вычитания $B_\varepsilon^j B_0^{i-j}$, $j = 1, 2, \ldots, i - 1$, то получим следующую цепочку неравенств:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \| (B_\varepsilon^i - B_0^i) A_0 \| \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{i} \| (B_\varepsilon^j B_0^{i-j} - B_\varepsilon^{j-1} B_0^{i-j+1}) A_0 \| = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{i} \| B_\varepsilon^{j-1} (B_\varepsilon - B_0) B_0^{i-j} A_0 \| \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{i} k^{j-1} \| (B_\varepsilon - B_0) B_0^{i-j} A_0 \|.$$

Выражение $\| (B_\varepsilon - B_0) B_0^m A_0 \|$ оценивается аналогично выражению $\| A_\varepsilon - A_0 \|$ (см. выше). Окончательно имеем

$$\| (B_\varepsilon - B_0) B_0^m A_0 \| \leqslant mk^m \omega(\gamma) K + k^m (2K\alpha_\varepsilon(\gamma) + k\omega(\gamma) + kK\gamma + Kr(\varepsilon)),$$

где ω — функция, фигурирующая в определении равномерной непрерывности a и b, α_ε — функции, оценивающие скорость убывания памяти операторов A_ε и B_ε, r — функция, характеризующая скорость сходимости A_ε к A_0 и B_ε к B_0 на функциях-константах. В итоге получаем

$$\| [(I - B_\varepsilon)^{-1} - (I - B_0)^{-1}] A_0 \| \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{i} k^{i-1} [(i-j) k^{i-j} K\omega(\gamma) + k^{i-j} (2K\alpha_\varepsilon(\gamma) + k\omega(\gamma) + kK\gamma + Kr(\varepsilon))] = \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{i(i-1)}{2} Kk^{i-1} \omega(\gamma) + ik^{i-1} (2K\alpha_\varepsilon(\gamma) + k\omega(\gamma) + kK\gamma + Kr(\varepsilon)) \right].$$

Отметим, что $\sum_{i=1}^{\infty} ik^{i-1} = \frac{1}{(1-k)^2}$ и $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{i(i-1)}{2} k^{i-2} = \frac{1}{(1-k)^3}$. Эти формулы можно легко получить путем дифференцирования ряда $\sum_{i=0}^{\infty} k^i = \frac{1}{1-k}$ по k. Поэтому

$$\| [(I - B_\varepsilon)^{-1} - (I - B_0)^{-1}] A_0 \| \leqslant \frac{kK\omega(\gamma)}{(1-k)^3} + \frac{1}{(1-k)^2} (2K\alpha_\varepsilon(\gamma) + k\omega(\gamma) + kK\gamma + Kr(\varepsilon)).$$

Очевидно, что в силу произвольности γ, малости ε и свойств функций ω, α_ε, r эту сумму можно сделать сколь угодно малой. Следовательно, и второе слагаемое в правой части неравенства (4) стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$. Лемма доказана.

4. Перейдем к исследованию однозначной разрешимости в классе ограниченных на всей оси функций и устойчивости.

Теорема 1. *Пусть уравнение $\mathcal{L}_0 x = f$ имеет единственное решение $x \in W_\infty^{(1)}$ при всех $f \in L_\infty$. Тогда уравнение $\mathcal{L}_\varepsilon x = f$ при малых ε обладает тем же свойством.*

Доказательство. Очевидно, достаточно показать, что из обратимости оператора $\mathcal{L}_0$ следует обратимость оператора $\mathcal{L}_\varepsilon$ при малых ε. Если оператор $\mathcal{L}_0$ обратим, то $\Lambda_0 = (I - B_0)^{-1} \mathcal{L}_0$ также обратим. Поскольку множество обратимых операторов открыто, то при достаточно малых ε оператор Λ_ε обратим в силу близости Λ_ε к Λ_0 при малых ε по норме. Из обратимости Λ_ε следует обратимость оператора $\mathcal{L}_\varepsilon = (I - B_\varepsilon)\Lambda_\varepsilon$, что и требовалось доказать.

Теорема 2. *Пусть уравнение $\mathcal{L}_0 x = 0$ устойчиво при постоянно действующих возмущениях. Тогда уравнение $\mathcal{L}_\varepsilon x = 0$ при малых $\varepsilon > 0$ также является устойчивым при постоянно действующих возмущениях.*

Доказательство. Заметим, что операторы $\mathscr{L}_\varepsilon$ и Λ_ε В-обратимы одновременно; это обеспечивается равенством $\Lambda_\varepsilon = (I - B_\varepsilon)^{-1}\mathscr{L}_\varepsilon$ и вольтерровостью операторов $I - B_\varepsilon$ и $(I - B_\varepsilon)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} B_\varepsilon^i$. Из устойчивости при постоянно действующих возмущениях уравнения $\mathscr{L}_0 x = 0$ следует В-обратимость оператора $\mathscr{L}_0$ (предложение 4), а следовательно, и В-обратимость Λ_0. В силу сходимости операторов Λ_ε к Λ_0 по норме и открытости множества В-обратимых операторов, оператор Λ_ε В-обратим при достаточно малых $\varepsilon > 0$, и поэтому В-обратим и $\mathscr{L}_\varepsilon$. А из В-обратимости $\mathscr{L}_\varepsilon$ следует устойчивость при постоянно действующих возмущениях уравнения $\mathscr{L}_\varepsilon x = 0$. Теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть оператор $\mathscr{L}_0$ обратим, но уравнение $\mathscr{L}_0 x = 0$ не является устойчивым при постоянно действующих возмущениях. Тогда уравнение $\mathscr{L}_\varepsilon x = 0$ при малых $\varepsilon > 0$ также не является устойчивым при постоянно действующих возмущениях.*

Доказательство. Предположим противное, т. е. пусть существует такая последовательность индексов $\varepsilon_i \to 0$, что уравнения $\mathscr{L}_{\varepsilon_i} x = 0$ устойчивы при постоянно действующих возмущениях, несмотря на неустойчивость уравнения $\mathscr{L}_0 x = 0$. Тогда в силу предложения 4 операторы $\mathscr{L}_{\varepsilon_i}$ В-обратимы, а $\mathscr{L}_0$ не является В-обратимым. То же самое можно сказать и об операторах Λ_{ε_i} и Λ_0. Но из сходимости Λ_{ε_i} к Λ_0, а следовательно, и сходимости $\Lambda_{\varepsilon_i}^{-1}$ к Λ_0^{-1} и замкнутости множества вольтерровых операторов следует вольтерровость операторов Λ_0 и Λ_0^{-1}, а это и означает В-обратимость Λ_0. Полученное противоречие доказывает теорему.

В случае, когда память операторов A_ε и B_ε убывает экспоненциально, т. е. $\alpha_\varepsilon(h) = ce^{-\nu_\varepsilon h}$, c, $\nu_\varepsilon > 0$, теоремы 2 и 3 с учетом предложения 5 можно переформулировать следующим образом.

Следствие 1. *Пусть уравнение $\mathscr{L}_0 x = 0$ экспоненциально устойчиво. Тогда уравнение $\mathscr{L}_\varepsilon x = 0$ при малых $\varepsilon > 0$ также экспоненциально устойчиво.*

Следствие 2. *Пусть оператор $\mathscr{L}_0$ обратим, но уравнение $\mathscr{L}_0 x = 0$ не является экспоненциально устойчивым. Тогда уравнение $\mathscr{L}_\varepsilon x = 0$ при малых $\varepsilon > 0$ также не является экспоненциально устойчивым.*

1. *Васильева А. Б., Рожков В. И., Плотников А. А.* Пограничный слой и колебательные процессы для уравнений нейтрального типа с малым запаздыванием.— В кн.: Труды семинара по теории дифференц. уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Изд-во ун-та Дружбы народов им. П. Лумумбы, 1967, т. 5, с. 18—20.
2. *Васильева А. Б.* Явление пограничного слоя и колебательные процессы в уравнениях нейтрального типа с малым запаздыванием.— Abh. Dtsch. Acad. Wiss. Berlin. Kl. Math., Phys. und Techn., 1965, N 1, p. 201—205.
3. *Рожков В. И.* О периодических решениях автономных систем уравнений нейтрального типа с малым запаздыванием.— Дифференц. уравнения, 1971, 7, № 3, с. 446—452.
4. *Рожков В. И.* Уравнения нейтрального типа с малым запаздыванием на бесконечном промежутке.— В кн.: Труды семинара по теории дифференц. уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Изд-во ун-та Дружбы народов им. П. Лумумбы, 1965, т. 3, с. 186—203.
5. *Ахмеров Р. Р.* Почти периодические решения уравнений нейтрального типа с малым запаздыванием.— В кн.: Теоретические и прикладные вопросы дифференциальных уравнений и алгебра. Киев : Наук. думка, 1978, с. 3—4.
6. *Ахмеров Р. Р., Каменский М. И.* К вопросу об устойчивости состояния равновесия системы функционально-дифференциальных уравнений нейтрального типа с малым отклонением аргумента.— Успехи мат. наук, 1975, 30, № 2, с. 205—206.
7. *Теория* уравнений нейтрального типа / Р. Р. Ахмеров, М. И. Каменский, А. С. Потапов и др.— В кн.: Математический анализ. Итоги науки и техники. М.: ВИНИТИ, 1982, т. 19, с. 55—126.
8. *Родкина А. Е., Садовский Б. Н.* К принципу связности Красносельского — Перова.— Тр. мат. фак. Воронеж. ун-та, 1971, 4, с. 89—103.
9. *Курбатов В. Г.* Об устойчивости функционально-дифференциальных уравнений.— Дифференц. уравнения, 1981, 17, № 6, с. 963—972.

Воронеж. ун-т

Получено 10.03.83,
после доработки — 28.03.85