УДК 517.94

А. Н. Кочубей

К теории обобщенных решений операторно-дифференциальных уравнений

Пусть D, X — комплексные банаховы пространства, $L(D, X)$ — банахово пространство линейных непрерывных операторов из D в X. В работах [1—3] получены теоремы существования и регулярности решений уравнений вида

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)u \equiv \sum_{k=0}^{m} A_k \frac{d^k u}{dt^k} = f, \tag{1}$$

где $A_k \in L(D, X)$, в различных пространствах векторнозначных обобщенных функций. В настоящей статье приведены некоторые результаты в этом направлении, а также приложения к уравнениям с частными производными, что является продолжением работ [1—3]; при этом используются обозначения и терминология, принятые в [1 — 3].

1. Пусть $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^1, X)$ и $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^1, D)$ — обобщенное решение уравнения (1). В [1] найдены условия для коэффициентов A_k, достаточные для гипоэллиптичности уравнения (1), т. е. для того чтобы из $f \in C^\infty((\alpha, \beta), X)$ следовало $u \in C^\infty((\alpha, \beta), D)$, где u — обобщенное решение (1) на (α, β), а также условия, обеспечивающие жевреевскую регулярность решения u на $(\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}^1$, если соответствующей регулярностью обладает f. Оказывается, что если ограничиться случаем $(\alpha, \beta) = \mathbb{R}^1$, условия из [1] можно ослабить.

Теорема 1. *Пусть для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $N_0(\varepsilon) > 0$, что $[P(i\lambda)]^{-1} \in L(X, D)$ существует на множестве $|\operatorname{Im}\lambda| \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\ln|\operatorname{Re}\lambda|$, $|\lambda| \geqslant N_0(\varepsilon)$, и удовлетворяет там неравенству*

$$\|[P(i\lambda)]^{-1}\|_{L(X,D)} \leqslant C(\varepsilon)(1 + |\lambda|)^N e^{a|\operatorname{Im}\lambda|},$$

где $N \geqslant 0$, $a \geqslant 0$ не зависят от ε. Тогда из $f \in C^\infty(\mathbb{R}^1, X)$ следует, что $u \in C^\infty(\mathbb{R}^1, D)$.

Доказательство. Назовем параметриксом уравнения (1) операторнозначную обобщенную функцию $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^1, L(X, D))$, удовлетворяющую условию

$$\sum_{k=0}^{m} A_k E^{(k)} = \delta \otimes I_X + \Phi, \quad \sum_{k=0}^{m} E^{(k)} A_k = \delta \otimes I_D + \Psi, \tag{2}$$

где $\Phi \in C^\infty(\mathbb{R}^1, L(X, X))$, $\Psi \in C^\infty(\mathbb{R}^1, L(D, D))$.

Повторяя рассуждения из [1, 4], с использованием во всех интегралах разомкнутых контуров нетрудно убедиться, что условия теоремы являются необходимыми и достаточными для существования параметрикса $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}', L(X, D)) \cap C^\infty(\mathbb{R}^1 \setminus [-a, a], L(X, D))$.

Пусть теперь $f \in C^\infty(\mathbb{R}^1, X)$. Зафиксируем произвольный конечный интервал (α, β). Пусть $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$, $\varphi(t) \equiv 1$ в окрестности отрезка $[-a, a]$. Выберем конечный интервал (α', β') так, чтобы $(\alpha', \beta') \supset (\alpha, \beta) - \operatorname{supp}\varphi$ (если $G, H \subset \mathbb{R}^1$, то $G - H = \{g - h \mid g \in G, h \in H\}$). Пусть $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$, $\psi(t) = 1$ при $t \in [\alpha', \beta']$. Обозначим $P = \sum_{k=0}^{m} A_k \otimes \delta^{(k)}$. Тогда

$$\psi u = (E*P)*(\psi u) - \Psi*(\psi u) = (\varphi E)*P*(\psi u) + \{[(1-\varphi)E]*P\}*(\psi u) - \Psi*(\psi u). \tag{3}$$

Значения свертки $(\varphi E) * P * (\psi u)$ на (α, β) определяются сужением обобщенной функции $P * (\psi u)$ на произвольную окрестность множества $(\alpha, \beta) - \operatorname{supp}\varphi$, которое, в свою очередь, зависит от значений ψu на той же окрестности (α, β) — supp φ (по определению P). Но $\psi(t) = 1$ на более широком множестве (α', β'), так что

$$(\varphi E)*P*(\psi u)\big|_{(\alpha,\beta)} = (\varphi E)*P*u\big|_{(\alpha,\beta)} = (\varphi E)*f\big|_{(\alpha,\beta)},$$

и из (3) получаем

$$u\big|_{(\alpha,\beta)} = [(\varphi E)*f]\big|_{(\alpha,\beta)} + \{\{[(1-\varphi)E]*P\}*(\psi u)\}\big|_{(\alpha,\beta)} - [\Psi*(\psi u)]_{(\alpha,\beta)}. \quad (4)$$

Из (4) видно, что $u \in C^\infty((\alpha, \beta), D)$ и в силу произвольности интервала (α, β) $u \in C^\infty(\mathbb{R}^1, D)$. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть для любого* $\varepsilon > 0$ *существуют такие числа* $\gamma(\varepsilon)$, $N_0(\varepsilon) > 0$, *что* $[P(i\lambda)]^{-1} \in L(X, D)$ *существует на множестве* $|\mathrm{Im}\,\lambda| \leqslant \gamma(\varepsilon)|\mathrm{Re}\,\lambda|^{1/d}$, $|\lambda| \geqslant N_0(\varepsilon)$, $d \geqslant 1$, *и удовлетворяет там неравенству*

$$\|[P(i\lambda)^{-1}\|_{L(X,D)} \leqslant C(\varepsilon)(1 + |\lambda|)^N e^{(a+\varepsilon)|\mathrm{Im}\lambda|},$$

где $N \geqslant 0$, $a \geqslant 0$ *не зависят от* ε. *Тогда из* $f \in G^d(\mathbb{R}^1, X)$ *следует, что* $u \in G^d(\mathbb{R}^1, D)$.

Доказательство. Повторяя рассуждения из доказательства теоремы 5 [1], убеждаемся, что условия теоремы необходимы и достаточны для существования параметрикса

$$E \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^1, L(X, D)) \cap G^d(\mathbb{R}^1 \setminus [-a, a], L(X, D)),$$

такого, что в (2) $\Phi \in G^d(\mathbb{R}^1, L(X, X))$, $\Psi \in G^d(\mathbb{R}^1, L(D, D))$. Если теперь $f \in G^d(\mathbb{R}^1, X)$, $d > 1$, запишем для решения формулу (4) с $\varphi \in G^d(\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^1)$. Из (4) следует, что $u \in G^d((\alpha, \beta), D)$, т. е. $u \in G^d(\mathbb{R}^1, D)$. Если $d = 1$, то f принадлежит на $\mathbb{R}^1$ любому неквазианалитическому классу функций со значениями в X, а E — любому неквазианалитическому классу оператор-функций на $\mathbb{R}^1 \setminus [-a, a]$ со значениями в $L(X, D)$. Аналогично предыдущему из (4) следует, что u принадлежит на $\mathbb{R}^1$ любому неквазианалитическому классу функций со значениями в D, инвариантному относительно дифференцирования. Отсюда следует* (см. [5]), что u аналитична на $\mathbb{R}^1$, т. е. $u \in G^1(\mathbb{R}^1, D)$. Теорема доказана.

2. В п. 1., как и в [1, 2], рассматривались решения уравнения (1), являющиеся обобщенными функциями «по переменной t». Дальнейшее расширение понятия решения естественно ввести в случае, когда D плотно вложено в X. Операторы A_k можно тогда рассматривать как плотно заданные, вообще говоря, неограниченные операторы в банаховом пространстве X, $D(A_k) = D$. Рассмотрим в X^* множество $D_0^* = \bigcap_{k=0}^{m} D(A_k^*)$ (определение и свойства сопряженного оператора для данного случая см., например, в [6]).

Обобщенная функция $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^1, X)$ называется слабым обобщенным решением уравнения (1) с $f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^1, X)$, если для любых $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^1)$, $a \in D_0^*$

$$\sum_{k=0}^{m} (-1)^k (\langle u, \varphi^{(k)} \rangle, A_k^* a) = (\langle f, \varphi \rangle, a),$$

где $(\cdot, \cdot)$ — спаривание между X и X^*.

Удобное средство для построения слабых обобщенных решений — слабое фундаментальное решение, т. е. операторнозначная обобщенная функция $E \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^1, L(X, X))$ такая, что для всех $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^1)$, $x \in X$, $a \in D_0^*$

$$\sum_{k=0}^{m} (-1)^k (\langle E, \varphi^{(k)} \rangle x, A_k^* a) = \varphi(0)(x, a).$$

* В [5] рассматриваются скалярные функции, однако доказательство из [5] применимо и в случае вектор-функций.

Аналогично можно определить слабое обобщенное решение и слабое фундаментальное решение из пространств ультрараспределений Берлинга и Румье (см. [2]).

Нетрудно убедиться, что методика работ [1, 2] применима (практически без изменений) в случае слабых обобщенных решений. Заменяя в условиях теорем 1—3 из [1] и теорем 1—6 из [2] $L(X, D)$ на $L(X, X)$, получаем условия локальной и глобальной слабой обобщенной разрешимости уравнения (1) в пространствах $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^1, X)$, $\mathcal{D}'_B(d, X)$, $\mathcal{D}'_R(d, X)$.

Для случая, когда $m = 1$, $A_1 = I$, X — гильбертово пространство, одно достаточное условие существования слабого обобщенного решения (имеющее несколько иной характер) получено Маликом [7]. Ряд результатов, касающихся гладкости слабых обобщенных решений, имеется в [8—11].

3. Пусть $X = L_p(G)$, G — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с гладкой границей, $1 < p < \infty$. Рассмотрим уравнение

$$P(d/dt)\, u \equiv a\partial^m u/\partial t^m + Bu = f, \tag{5}$$

где a — комплексное число, $m \geqslant 1$, B — оператор в X, порожденный регулярной эллиптической краевой задачей, т. е. правильно эллиптическим дифференциальным выражением β порядка l с гладкими коэффициентами и нормальной системой граничных условий, накрывающих дифференциальное выражение β (см., например, [12]). Будем предполагать также,что главные части выражения β и граничных дифференциальных выражений образуют формально самосопряженную систему.

Известно [12, 13], что спектр оператора B дискретен, в любом секторе $0 < \varepsilon \leqslant |\arg\lambda| \leqslant \pi - \varepsilon$ имеется лишь конечное число собственных значений и при достаточно большом $|\lambda|$ справедлива оценка резольвенты $R(\lambda)$ оператора B

$$\| R(\lambda) \|_{L(X,X)} \leqslant C_\varepsilon |\lambda|^{-1}. \tag{6}$$

Вводя в $D = D(B)$ норму графика, получаем из (6) для указанных значений λ также оценку $\| R(\lambda) \|_{L(X,D)} \leqslant C'_\varepsilon$. При этом (см. [12]) $D = H^l_{p,\text{гр}}(G)$.

Пусть в (5) m четное, a мнимое, или m нечетное, a вещественное. Тогда

$$P(i\lambda) = ai^m\lambda^m I + B = ib\lambda^m I + B, \quad b \in \mathbb{R}^1. \tag{7}$$

Из описанных выше свойств оператора B следует, что в этом случае уравнение (5) удовлетворяет условиям теорем 4,5 [1] и теоремы 5 [3]. Таким образом, если $f(t, x)$ — аналитическая (жевреевская, бесконечно дифференцируемая) вектор-функция по t со значениями в $L_p(G)$, то обобщенное решение уравнения (5) в смысле гиперфункций (соответственно обобщенных функций) по t со значениями в D является фактически обычной вектор-функцией той же гладкости, что f. Те же выводы можно сделать в случае, когда m четное, a вещественное и $(-1)^{\frac{m}{2}} a > 0$, $p = 2$, оператор B самосопряжен и положительно определен; если B только неотрицателен, то применим ослабленный вариант теорем регулярности (теоремы 1, 2 настоящей статьи).

Пусть $p = 2$, $B = B_1 + B_2$, где B_1 — неотрицательный самосопряженный оператор порядка l, B_2 — максимальный оператор, порожденный дифференциальным выражением порядка $l_2 < l$ с ограниченными измеримыми коэффициентами.

Если $l_2 = 0$, то спектр оператора B лежит в полосе $|\operatorname{Im}\lambda| \leqslant \leqslant \| B_2 \|_{L(X,X)} + 1$, вне которой справедливы неравенства

$$\| R(\lambda) \|_{L(X,X)} \leqslant C |\operatorname{Im}\lambda|^{-1}, \tag{8}$$

$$\| R(\lambda) \|_{L(X,D)} \leqslant C |\lambda|. \tag{9}$$

Пусть $l_2 > 0$. Пользуясь неравенством [14]

$$\| B_2 f \|_X \leqslant C_1 \| f \|_X^{1-l_2/l} \| B_1 f \|_X^{l_2/l}, \quad f \in D(B_1),$$

нетрудно показать, что любая точка $\lambda \in \mathbb{C}^1$, для которой

$$|\operatorname{Im}\lambda| > \rho(\operatorname{Re}\lambda)^{\gamma}, \quad |\operatorname{Im}\lambda| > N, \quad \operatorname{Re}\lambda \geqslant 0,$$

где $\rho > 0$ — произвольное число, $N = N(\rho)$, $l_2/l < \gamma < 1$, принадлежит резольвентному множеству оператора B и выполнены неравенства (8), (9). При $\operatorname{Re}\lambda < 0$, $|\lambda| > N'$ точка λ принадлежит резольвентному множеству оператора B, причем

$$\| R(\lambda)\|_{L(X,X)} \leqslant C_2 |\lambda|^{-1}, \quad R(\lambda)\|_{L(X,D)} \leqslant C_2.$$

Возвратимся к уравнению (5) с рассматриваемым оператором B. Пусть $m = 1$, a — мнимое число, т. е. $P(i\lambda) = b\lambda I + B$, $b \in \mathbb{R}^1$. Если $l_2 = 0$, то для уравнения (5) выполнены условия теорем о глобальной разрешимости (теорема 2 [1], теоремы 5, 6 [2], теорема 3 [3]): если f — произвольная обобщенная функция (ультрараспределение, гиперфункция) по t со значениями в $L_2(G)$, то уравнение (5) разрешимо в таком же классе распределений со значениями в $H^l_{2,\text{гр}}(G)$. Если $l_2 > 0$, из [2, 3] получаем разрешимость в пространствах ультрараспределений $\mathcal{D}'_B(d, H^l_{2,\text{гр}}(G))$, $\mathcal{D}'_R(d, H^l_{2,\text{гр}}(G))$ с $1 < d < l/l_2$, а также в классе гиперфункций.

Все указанные теоремы о глобальной разрешимости применимы и в случае, когда в (5) $m = 2$, $a > 0$ (т. е. $P(i\lambda) = B - a\lambda^2 I$), $2l_2 < l$. Это следует из того, что функция $\lambda \mapsto \lambda^2$ отображает внешность полосы $|\operatorname{Im}\lambda| \leqslant r$ на внешность параболы $(\operatorname{Im}\lambda^2) = 4r^2(\operatorname{Re}\lambda + r^2)$ (см. [15]), внутри которой (т. е. в области, содержащей ее фокус) лежит, если r достаточно велико, весь спектр оператора B.

4. Рассмотрим еще раз уравнение (5) с самосопряженным положительно определенным оператором B в гильбертовом пространстве X. Пусть m — четное, $\operatorname{Re} a = 0$, либо m нечетное, $\operatorname{Im} a = 0$. Тогда справедливо соотношение (7). Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ — значения корня степени m из числа $b^{-1}i$. Очевидно, все числа α_j невещественны. Справедливо тождество

$$\frac{1}{ib\lambda^m + \mu} = \frac{1}{ibm} \sum_{j=1}^{m} \frac{\alpha_j^{1-m}\mu^{-(m-1)/m}}{\lambda - \alpha_j \mu^{1/m}}, \quad \mu > 0,$$

вытекающее, например, из интерполяционной формулы Лагранжа. Отсюда

$$[P(i\lambda)]^{-1} = \frac{1}{ibm} \sum_{j=1}^{m} \alpha_j^{1-m} B^{-(m-1)/m} (\lambda I - \alpha_j B^{1/m})^{-1}, \quad \lambda \in \mathbb{R}^1.$$

Ясно, что

$$\| [P(i\lambda)]^{-1} \|_{L(X,X)} \leqslant C_3 \max_{1 \leqslant j \leqslant m} [\operatorname{dist}(\lambda\alpha_j^{-1}, [\mu_0, \infty))]^{-1} \leqslant C_4 (1 + |\lambda|)^{-1}, \quad \lambda \in \mathbb{R}^1 \tag{10}$$

(μ_0 — точная нижняя грань спектра оператора B).

Пусть $Q(\lambda) = [P(i\lambda)]^{-1}$, $\lambda \in \mathbb{R}^1$. Согласно (10) $Q \in L_2(\mathbb{R}^1, L(X, X))$. Вычисляя преобразование Фурье $\hat{Q}$ с помощью формул 3.2.3. и 3.2.4 из [16], находим

$$\hat{Q}(t) = \frac{2\pi}{bm} \sum_{j=1}^{m} \alpha_j^{1-m} B^{-(m-1)/m} Q_j(t),$$

где

$$Q_j(t) = \begin{cases} 0, \ t \geqslant 0; \\ \exp(-i\alpha_j B^{1/m} t), \quad t < 0, \end{cases} \quad \text{если } \operatorname{Im}\alpha_j > 0,$$

$$Q_j(t) = \begin{cases} \exp(-i\alpha_j B^{1/m} t), \quad t > 0; \\ 0, \ t \leqslant 0, \end{cases} \quad \text{если } \operatorname{Im}\alpha_j < 0.$$

Таким образом, $\| \hat{Q}(t) \|_{L(X,X)}$ экспоненциально убывает при $|t| \to \infty$.

Из доказанного выше и результатов работы [17] получаем следующую теорему существования почти периодического решения уравнения (5) (при указанных выше условиях на a, m, B). Если f — почти периодическая функция Степанова со значениями в X, то уравнение (5) имеет почти периодическое по Бору слабое обобщенное решение. Аналогичное утверждение справедливо для случая, когда в (5) m четное, a вещественное и $(-1)^{m/2}a > 0$.

Отметим в заключение, что среди уравнений вида (5), рассмотренных выше, имеются как эллиптические, гиперболические и параболические уравнения, так и уравнения, не принадлежащие ни одному из классических типов.

1. *Кочубей А. Н.* Фундаментальные решения дифференциально-операторных уравнений.— Дифференц. уравнения, 1977, **13**, № 9, с. 1588—1597.
2. *Кочубей А. Н.* Дифференциально-операторные уравнения в пространствах ультрараспределений.— Там же, 1980, **16**, № 3, с. 405—413.
3. *Кочубей А. Н.* Гиперфункции — решения дифференциально-операторных уравнений.— Сиб. мат. журн., 1979, **20**, № **4**, с. 778—791.
4. *Malik M. A.* Regularity of elementary solutions of abstract differential equations.— Boll. Unione Mat. Ital., 1971, 4, N 1, p. 78—84.
5. *Boman J.* On the intersection of classes of infinitely differentiable functions.— Ark. mat., 1965, **5**, N 4, p. 301—309.
6. *Крейн С. Г.* Линейные уравнения в банаховом пространстве.— М.: Наука, 1971.— 104 с.
7. *Malik M. A.* Weak generalized solutions of abstract differential equations.— J. Math. Anal. and Appl., 1972, **40**, N 3, p. 763—768.
8. *Горбачук В. И., Горбачук М. Л.* Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений.— Киев : Наук. думка, 1984.— 284 с.
9. *Barbu V.* On the regularity of the weak solutions of abstract differential equations.— Osaka J. Math., 1969, **6**, N 1, p. 45—56.
10. *Zaidman S.* Remarks on weak solutions of differential equations in Banach spaces.— Boll. Unione mat. ital., 1974, **9**, N 3, p. 638—643.
11. *Zaidman S.* Some remarks concerning regularity of solutions for abstract differential equations.— Rend. Semin. mat. Univ. Padova, 1980, **62**, p. 47—64.
12. *Функциональный* анализ./ Под ред С. Г. Крейна.— М.: Наука, 1972.— 544 с.
13. *Agmon S.* On the eigenfunctions and on the eigenvalues of general elliptic boundary value problems.— Communs Pure and Appl. Math., 1962, **15**, N 2, p. 119—147.
14. *Интегральные* операторы в пространствах суммируемых функций / М. А. Красносельский, П. П. Забрейко, Е. И. Пустыльник, П. Е. Соболевский.— М.: Наука, 1966.— 500 с.
15. *Лаврик В. И., Савенков В. Н.* Справочник по конформным отображениям.— Киев : Наук. думка, 1977.— 252 с.
16. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Таблицы интегральных преобразований : В 2-х т.— М.: Наука, 1969.— Т. 1. 344 с.
17. *Кочубей А. Н.* О почти-периодических решениях дифференциально-операторных уравнений.— Сиб. мат. журн., 1983, **24**, № 3, с. 102—111.

Киев. отд-ние комплекс. проектирования
ВГПИ и НИИ «Энергосетьпроект»

Получено 07.09.84