УДК 519.21

Н. С. Братийчук, Б. Пирлиев

О величине перескока уровня случайным блужданием на суперпозиции двух процессов восстановления

В настоящей статье продолжаются исследования, начатые в работах [1, 2]. Напомним кратко постановку задачи. Пусть заданы последовательности неотрицательных независимых в совокупности случайных величин: $\{\theta_n, n \geqslant 1\}$, $\{\eta_n, n \geqslant 1\}$, $\{\alpha_n, n \geqslant 1\}$ и $\{\varkappa_n, n \geqslant 1\}$, причем для $x \geqslant 0$ и всех $n \geqslant 1$

$$P\{\theta_n < x\} = P(x), \quad p(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dP(x),$$

$$P\{\eta_n < x\} = Q(x), \quad q(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dQ(x),$$

$$P\{\varkappa_n < x\} = G(x), \quad g(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dG(x),$$

$$P\{\alpha_n < x\} = 1 - e^{-ax}, \qquad a > 0.$$

Положим $S_n = \sum_{k=1}^n \theta_k$, $W_n = \sum_{k=1}^n \eta_k$, $\sigma_n = \sum_{k=1}^n \varkappa_k$, $\delta_n = \sum_{k=1}^n \alpha_k$ при $n \geqslant 1$ и $S_0 = W_0 = \sigma_0 = \delta_0 = 0$.

Определим процессы восстановления $\nu_t = \max\{k : \sigma_k \leqslant t\}$, $\mu_t = \max\{k : \delta_k \leqslant t\}$ и положим $\xi_t = \xi_0 + W_{\nu_t} - S_{\mu_t}$.

Пусть $\xi_0 = u > 0$ и $\tau_u = \min\{t; \xi_t < 0\}$, $\gamma_u = \xi_{\tau_u}$. Цель настоящей работы — изучение распределения случайной величины γ_u при $u \to \infty$. Будем исходить из формулы

$$\int_0^\infty e^{-su} Me^{-\lambda\tau_u - z\gamma_u} du = \varphi(s, \lambda) f_+(s, \lambda) P_+\{f_-(s, \lambda) P(s, \lambda, z)[\varphi^{-1}(s, \lambda) - 1]\},$$
$$\lambda > 0, \quad z > 0, \tag{1}$$

где $\varphi(s, \lambda) = g(a(1 - p(s)) + \lambda)$, $P(s, \lambda, z) = a(p(s) - p(z))((z - s)(a(1 - p(s))) + \lambda)^{-1}$, а функции $f_\pm(s, \lambda)$ определяются как компоненты факторизации функции $1 - q(-s)\varphi(s, \lambda)$, т. е.

$$1 - q(-s)\varphi(s, \lambda) = f_+^{-1}(s, \lambda) f_-^{-1}(s, \lambda) \tag{2}$$

и $f_{\pm}(\infty, \lambda) = 1$. Указанная факторизация единственна. Для абсолютно интегрируемой на всей оси функции $f(\cdot)$ и произвольной постоянной c проектор P_+ определяется равенством

$$P_+\Big[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-sx} f(x)\,dx + c\Big] = \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x)\,dx + c, \quad \operatorname{Re} s = 0.$$

Доказательство представления (1) незначительно отличается от доказательства основного результата в [2]. Формулу (1) можно значительно упростить в случае, когда положительные скачки процесса $\xi(t)$ имеют показательное распределение, т. е. $P\{\eta_n \leqslant x\} = 1 - \exp(-qx)$, $q > 0$. Тогда $q(s) = q/(s+q)$ и (2) можно представить в виде

$$(q(1 - \varphi(s,\lambda)) - s)/(q - s) = f_+^{-1}(s,\lambda)\, f_-^{-1}(s,\lambda). \tag{3}$$

Пусть далее $\lambda > 0$ фиксировано и $k(s,\lambda) = q(\varphi(s,\lambda) - 1) + s$. Так как $k(0,\lambda) < 0$, а $k(s,\lambda) \to \infty$ при $s \to \infty$ и $\operatorname{Im} s = 0$, то уравнение $k(s,\lambda) = 0$ всегда имеет решение $s_\lambda > 0$. Нетрудно показать, что s_λ — единственное решение указанного уравнения в полуплоскости $\operatorname{Re} s \geqslant 0$. Очевидно, равенство

$$q(1 - \varphi(s,\lambda) - s)/(q - s) = [(q(1 - \varphi(s,\lambda)) - s)/(s_\lambda - s)]\,(s_\lambda - s)/(q - s)$$

реализует другую факторизацию функции из левой части тождества (3) и, следовательно,

$$f_+(s,\lambda) = (s_\lambda - s)/(q(1 - \varphi(s,\lambda)) - s), \quad f_-(s,\lambda) = (q - s)/(s_\lambda - s). \tag{4}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} P_+\{f_-(s,\lambda)\,P(s,\lambda,z)(\varphi^{-1}(s,\lambda) - 1)\} &= P_+\{[(q - s)\,P(s,\lambda,z)(\varphi^{-1}(s,\lambda) - 1) - \\ &\quad - (q - s_\lambda)\,P(s_\lambda,\lambda,z)(\varphi^{-1}(s_\lambda,\lambda) - 1)]/(s_\lambda - s)\} + \\ &\quad + [(q - s_\lambda)\,P(s_\lambda,\lambda,z)(\varphi^{-1}(s,\lambda) - 1)]/(s_\lambda - s) = \\ &= [(q - s)\,P(s,\lambda,z)(\varphi^{-1}(s,\lambda) - 1) - (q - s_\lambda)\,P(s_\lambda,\lambda,z)\times \\ &\quad \times(\varphi^{-1}(s_\lambda,\lambda) - 1)]/(s_\lambda - s). \end{aligned} \tag{5}$$

Простыми алгебраическими преобразованиями с использованием (4), (5) и соотношения $\varphi(s_\lambda,\lambda) = 1 - s_\lambda/q$ приводим (1) к виду

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-su} M e^{-\lambda\tau_u - z\gamma_u}\,du &= P(s,\lambda,z) + \\ &+ (s_\lambda P(s_\lambda,\lambda,z) - sP(s,\lambda,z))\,\varphi(s,\lambda)\,k^{-1}(s,\lambda). \end{aligned} \tag{6}$$

Пусть $\rho = qabc$, где $b = M\varkappa_1$, $c = M\theta_1$ и $k(s) = k(s,0)$. В дальнейшем постоянно предполагается выполнение следующих условий:

A_1. Распределение $P(x)$ нерешетчатое и не сингулярное.

A_2. $s_- = \inf\{s : \operatorname{Im} s = 0,\ |p(s)| + |g(s)| < \infty\} < 0$, и если $\rho < 1$, то найдется такое $\mu \in]s_-, 0[$, что $k(\mu) = 0$, $k'(\mu) \neq 0$.

Из A_2 следует, что

$$1 - P(x) = O(e^{(s_- + \varepsilon)x}), \quad 1 - G(x) = O(e^{(s_- + \varepsilon)x}) \tag{7}$$

при $x \to \infty$ и произвольном фиксированном $\varepsilon > 0$. Из теоремы о неявной функции [3, с. 185] легко вытекает следующая лемма.

Лемма 1. *При* $\lambda \to 0$

$$s_\lambda = \begin{cases} c_1\lambda + o(\lambda), & \rho < 1; \\ c_2\lambda^{1/2} + o(\lambda^{1/2}), & \rho = 1; \\ s_0 + c_3\lambda + o(\lambda), & \rho > 1, \end{cases}$$

где $c_1 = qb/(1-\rho)$, $c_2 = (2b/(a(ag_2c^2 + bp_2))^{1/2}$, $g_2 = M\varkappa_1^2$, $p_2 = M\theta_1^2$, $c_3 = qg'(a(1-p(s_0)))/(1+qap'(s_0))\,g'(a(1-p(s_0)))$, s_0 — *единственное решение уравнения* $k(s) = 0$ *в полуплоскости* $\operatorname{Re} s > 0$.

Очевидно $k(s) = q(g(a(1-p(s))) + s$ — кумулянта некоторого обобщенного пуассоновского процесса с положительными скачками и отрицательным сносом. Поэтому в соответствии с [4, с. 33]

$$\int_0^\infty e^{-sx} R(x)\,dx = k^{-1}(s), \qquad \operatorname{Re} s > s_0.$$

Определим теперь функцию $G_a(x)$ равенством

$$g(a(1-p(s))) = \int_0^\infty e^{-sx} dG_a(x). \tag{8}$$

Легко заметить, что $G_a(x)$ — функция распределения случайной величины $\xi = \sum_{i=0}^{\mu_{\varkappa_1}} \alpha_i$ и в силу условия A_2

$$G_a(x) = O(e^{(s_- + \varepsilon)x}) \tag{9}$$

при $x \to \infty$ и произвольном фиксированном $\varepsilon > 0$.

Пусть $R_a(x) = \int_0^x R(x-y)\,dG_a(y)$. Тогда

$$g(a(1-p(s)))\,k^{-1}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} R_a(x)\,dx. \tag{10}$$

Из асимптотических свойств функции $R(x)$ (см. [4, с. 25]) и (9) легко следует такая лемма.

Лемма 2. *В условиях* A_2

$$R_a(x) = \begin{cases} (1-\rho)^{-1}(1 - R_\mu e^{\mu x} + h_\mu(x)), & \rho < 1; \\ \dfrac{2}{\sigma^2}(x - R_0 + h_0(x)), & \rho = 1; \\ (1-\rho)^{-1}(1 - R_{s_0} e^{s_0 x} + h_{s_0}(x)), & \rho > 1, \end{cases}$$

где $R_s = g(a(1-p(s)))/k'(s)$, $s \neq 0$, $\sigma^2 = k''(0)$, $R_0 = abc - k'''(0)/3\sigma^2$ *и* $h_\mu(x) = o(e^{(\mu-\varepsilon)x})$, $h_0(x) = o(e^{-\varepsilon x})$, $h_{s_0}(x) = o(e^{-\varepsilon x})$ *при* $x \to \infty$ *и некотором* $\varepsilon > 0$.

Прежде чем приступить к анализу формулы (6), установим некоторые вспомогательные результаты. Итак, пусть $H(x)$ — функция восстановления, соответствующая распределению $P(x)$. Тогда

$$(1-p(s))^{-1} = 1 + \int_{+0}^\infty e^{-sx} dH(x).$$

Положим $P_z(x) = \int_x^\infty \exp(-z(u-x))\,dP(u)$. Легко проверить, что

$$P(s,0,z) = \int_0^\infty e^{-sx} Q_z(x)\,dx \tag{11}$$

и

$$sP(s,0,z) = p(z) + \int_{+0}^\infty e^{-sx} dF_z(x). \tag{12}$$

Здесь

$$Q_z(x) = P_z(x) + \int_{+0}^x P_z(x-u)\,dH(u),$$

$$F_z(x) = z\int_0^x Q_z(u)\,du - (1-p(z))\,H(x).$$

Поскольку

$$F_z(x) = z\int_0^x P_z(u)\,du + \int_{+0}^x \Big[z\int_0^{x-y} P_z(u)\,du - (1-p(z))\Big]\,dH(y),$$

то из основной теоремы восстановления следует

$$F_z(\infty) = \lim_{x\to\infty} F_z(x) = z\int_0^\infty P_z(u)\,du + \frac{1}{c}\int_0^\infty \Big[z\int_0^y P_z(u)\,du - (1-p(z))\Big]\,dy =$$

$$= \frac{1-p(z)}{cz} - p(z). \tag{13}$$

Используя лемму 1, нетрудно установить соотношения

$$\lim_{\lambda\to 0} s_\lambda P(s_\lambda, \lambda, 0) = \begin{cases}\rho, & \rho < 1;\\ 1, & \rho \geqslant 1.\end{cases} \tag{14}$$

Проанализируем теперь формулу (6). Совершая в ней предельный переход сначала при $z \to 0$, а затем при $\lambda \to 0$, с учетом (14) получаем

$$\int_0^\infty e^{-su} P\{\tau_u < \infty\}\,du = \frac{1}{s} \tag{15}$$

при $\rho \geqslant 1$ и

$$\int_0^\infty e^{-su} P\{\tau_u < \infty\}\,du = \frac{1}{s} - (1-\rho)\,g(a(1-p(s)))\,k^{-1}(s) \tag{16}$$

при $\rho < 1$. Из (10), (15) и (16) следует такая лемма.

Лемма 3. 1. *При $\rho \geqslant 1$ распределение случайной величины τ_u собственное для всех $u > 0$.*

2. *При $\rho < 1$ указанное распределение несобственное, причем*

$$P\{\tau_u < \infty\} = 1 - (1-\rho)\,R_a(u).$$

Из (11), (12) и (6) при $\lambda \to 0$ следует

$$\int_0^\infty e^{-sx} M\{e^{-z\gamma_u}, \tau_u < \infty\}\,du = \int_0^\infty e^{-sx} Q_z(x)\,dx +$$

$$+ \Big(\rho(z) - \int_0^\infty e^{-sx}\,dF_z(x)\Big)\,g(a(1-p(s)))\,k^{-1}(s), \tag{17}$$

где $\rho(z) = \lim_{\lambda\to 0} s_\lambda P(s_\lambda, \lambda, z) - p(z)$. Нетрудно показать, что

$$\rho(z) = \begin{cases} \int_0^\infty e^{-s_0 x}\,dF_z(x), & \rho > 1;\\ F_z(\infty), & \rho = 1;\\ \rho(1-p(z))/cz - p(z), & \rho < 1. \end{cases} \tag{18}$$

После обращения в (17) по s получим

$$M\{e^{-z\gamma_u},\ \tau_u < \infty\} = Q_z(u) + R_a(u)\,\rho(z) - \int_0^u R_a(u-x)\,dF_z(x). \tag{19}$$

Теорема 1. *При $\rho > 1$*

$$\lim_{u\to\infty} Me^{-z\gamma_u} = c^{-1}\int_0^\infty e^{-zx}(1-P(x))\,dx + (1-\rho)^{-1}\int_0^\infty (e^{-s_0 x} - 1)\,dF_z(x).$$

2. *При* $\rho = 1$

$$\lim_{u\to\infty} Me^{-z\gamma_u} = c^{-1}\int_0^\infty e^{-zx}\,(1 - P(x))\,dx + 2\sigma^{-2}\int_0^\infty x dF_z(x).$$

3. *При* $\rho < 1$

$$\lim_{u\to\infty} M\,\{e^{-z\gamma_u}/\tau_u < \infty\} = c^{-1}\int_0^\infty e^{-zx}\,(1 - P(x))\,dx +$$

$$+ \int_0^\infty (e^{-\mu x} - 1)\,dF_z(x)\,(1-\rho)^{-1}.$$

Доказательство. 1. Пусть $\rho > 1$. Тогда $s_0 > 0$ и с учетом леммы 3 формула (19) преобразуется к виду

$$Me^{-s\gamma_u} = Q_z(u) + R_a(u)\int_u^\infty e^{-s_0x}dF_z(x) -$$

$$- \int_0^u [R_a(u-x) - e^{-s_0x}R_a(u)]\,dF_z(x). \tag{20}$$

По основной теореме восстановления

$$Q_z(u) = P_z(u) + \int_{+0}^u P_z(u-y)\,dH(y) \xrightarrow[u\to\infty]{} c^{-1}\int_0^\infty P_z(y)\,dy =$$

$$= c^{-1}\int_0^\infty e^{-zx}\,(1 - p(x))\,dx. \tag{21}$$

Из леммы 2 следует существование такого $A > 0$, что $|R_a(u)| < Ae^{s_0u}$, $u > 0$, поэтому

$$\left| R_a(u)\int_u^\infty e^{-s_0x}dF_z(x) \right| \leqslant A\,|F_z(u) - F_z(\infty)| \to 0$$

при $u\to\infty$. Поскольку

$$R_a(u-x) - e^{-s_0x}R_a(u) = (1-\rho)^{-1}\,((1 - e^{-s_0x}) + h_{s_0}(u-x) - e^{-s_0x}h_{s_0}(u))$$

и $h_{s_0}(u) = o(\exp(-(s_0 - \varepsilon)\,u))$, то последний интеграл в формуле (20) стремится при $u\to\infty$ к $(1-\rho)^{-1}\int_0^\infty (1 - e^{-s_0x})\,dF_z(x)$. Последнее замечание завершает доказательство теоремы в случае $\rho > 1$.

2. Пусть $\rho = 1$. Тогда $s_0 = 0$ и с учетом (18) и леммы 3 формула (19) примет вид

$$Me^{-z\gamma_u} = Q_z(u) + R_a(u)\,(F_z(\infty) - F_z(u)) -$$

$$- \int_0^u (R_a(u-x) - R_a(u))\,dF_z(x). \tag{22}$$

Воспользуемся следующим фактом (см., например, [5, с. 323]): в условиях A_1, A_2

$$H(x) = c^{-1}x + B + V(x), \tag{23}$$

причем

$$|V(x)| < Ce^{-\varepsilon x},\ \operatorname*{var}_{[x,\infty)} V(x) < Ce^{-\varepsilon x},$$

где $\varepsilon > 0$, C — постоянная и $B = (M\theta_1^2 + C^2)/2C^2$. Тогда после простых преобразований получим

$$F_z(\infty)-F_z(x)=c^{-1}\int_x^\infty B_z(y)\,dy+BB_z(x)-\int_0^x B_z(x-y)\,dV(y), \quad (24)$$

где $B_z(y)=P_z(y)-1+P(y)$. Из определения функции $P_z(y)$ и (7) следует, что $P_z(y)=o(\exp((s_-+\varepsilon)x))$ при $x\to\infty$. Поэтому (см. лемму 2 и формулу (24))

$$\lim_{u\to\infty} R_a(u)(F_z(\infty)-F_z(u))=0. \quad (25)$$

Поскольку $R_a(u-x)-R_a(u)=-2\sigma^{-2}x+h_0(u-x)+h_0(u)$ и $h_0(u)=o(\exp(-\varepsilon u))$ при $u\to\infty$, то аналогично предыдущему

$$\lim_{u\to\infty}\int_0^u (R_a(u-x)-R_a(u))\,dF_z(x)=-2\sigma^{-2}\int_0^\infty x\,dF_z(x). \quad (26)$$

Из (21), (22), (25) и (26) следует требуемое.

3. Пусть $\rho<1$. Тогда $P\{\tau_u<\infty\}<1$ и

$$M\{e^{-z\gamma_u},\tau_u<\infty\}=Q_z(u)+R_a(u)\rho(z)-\int_0^u R_a(u-y)\,dF_z(y).$$

С учетом леммы 2 имеем

$$M\{e^{-z\gamma_u}/\tau_u<\infty\}=M\{e^{-z\gamma_u},\ \tau_u<\infty\}/P\{\tau_u<\infty\}=$$

$$=\frac{Q_z(u)+R_a(u)\rho(z)-\int_0^u R_a(u-y)\,dF_z(y)}{1-(1-\rho)R_a(u)}=$$

$$=(1-\rho)^{-1}R_\mu^{-1}e^{-\mu u}(Q_z(u)(1-\rho)+\rho(z)-F_z(u))(1+o(1))^{-1}+$$

$$+\rho(z)(1-\rho)^{-1}+(1-\rho)^{-1}\int_0^u e^{-\mu x}dF_z(x)+$$

$$+(1-\rho)^{-1}(1+o(1))^{-1}\int_0^u h_\mu(u-y)\,dF_z(y)\,e^{-\mu u}. \quad (27)$$

Поскольку $Q_z(u)(1-\rho)+\rho(z)-F_z(u)=P_z(u)(1-\rho+(cz)^{-1})+(1-p(u))(\rho-1)(cz)^{-1}-F_z(\infty)+F_z(u)$, то из (24) и свойств функций $P_z(u)$, $1-P(u)$ следует, что первое слагаемое в правой части (27) стремится к нулю при $u\to\infty$. Очевидно, то же самое можно сказать и о последнем слагаемом. Поскольку

$$\int^\infty e^{-\mu x}dF_z(x)=\int_0^\infty (e^{-\mu x}-1)\,dF_z(x)+(1-p(z))/cz-p(z),$$

то теорема доказана.

Следствие 1. *При* $\rho>1$

$$\frac{d}{du}P\{\gamma_\infty<u\}=\rho c^{-1}(\rho-1)^{-1}(1-P(u))-$$

$$-s_0(\rho-1)^{-1}(1-p(s_0))^{-1}P_{s_0}(u),$$

где $\gamma_\infty=\lim_{u\to\infty}\gamma_u$.

2. *При* $\rho=0$

$$P\{\gamma_\infty<u\}=2\sigma^{-2}(1-c^{-1}\int_0^u(1-P(x))\,dx+$$

$$+(1-P(u))(c^{-1}-2p''(0)(\sigma c)^{-2}).$$

3. *При* $\rho < 1$

$$\frac{d}{du} P\{\gamma_\infty \leqslant u/\tau_\infty < \infty\} = \rho(\rho - 1)^{-1} c^{-1} (1 - P(u)) -$$

$$- \mu(\rho - 1)^{-1} (1 - p(\mu))^{-1} P_\mu(u),$$

где $\tau_\infty = \lim\limits_{u\to\infty} \tau_u$.

Доказательство. Из (12), (13) легко следует тождество

$$\int_0^\infty (e^{-s_0 x} - 1)\, dF_z(x) = s_0 (p(s_0) - p(z))/(z - s_0)(1 - p(s_0)) - (1 - p(z))/cz. \quad (28)$$

Кроме того, нетрудно показать, что

$$(1 - p(z))/z = \int_0^\infty e^{-zt} (1 - P(t))\, dt,$$

$$(p(s)) - p(z))/(1 - p(s_0)) = \int_0^\infty e^{-zt} P_{s_0}(t)\, dt. \quad (29)$$

Из теоремы для случая $\rho < 1$ и (28), (29) очевидным образом получаем п. 1 следствия. Остальные пункты доказываются аналогично с использованием тождеств

$$\int_0^\infty x dF_z(x) = z^{-1} - (1 - p(z))/z^2 c - (1 - p(z))/2zc^2 P''(0),$$

$$\int_0^\infty (e^{-\mu x} - 1)\, dF_z(x) = \mu(\rho(\mu) - p(z))/(z - \mu)(1 - p(\mu)) -$$

$$- (1 - p(z))/cz.$$

1. *Пирджанов Б.* Случайное блуждание со скачками в моменты, порожденные суперпозицией двух процессов восстановления.— Изв. АН ТССР. Сер. физ.-техн., хим. и геол. наук, 1983, № 3, с. 7—12.
2. *Королюк В. С., Пирлиев Б.* Случайное блуждание на полуоси на суперпозиции двух процессов восстановления.— Укр. мат. журн., 1984, **36**, № 4, с. 431—437.
3. *Евграфов М. А.* Аналитические функции.— М.: Наука, 1968.— 472 с.
4. *Королюк В. С.* Граничные задачи для сложных пуассоновских процессов.— Киев : Наук. думка, 1975.— 138 с.
5. *Боровков А. А.* Вероятностные процессы в теории массового обслуживания.— М.: Наука, 1972.— 368 с.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 22.02.83