УДК 517.54

А. К. Бахтин

О коэффициентах однолистных функций класса Гельфера

1. Введение. Множество всех голоморфных в круге $K_1 = \{z : |z| < 1\}$ функций вида $g(z) = 1 + a_1 z + \dots$ и таких, что для всех точек z_1, z_2 из круга K_1 выполняется соотношение $g(z_1) + g(z_2) \neq 0$, назовем классом Гельфера (класс G). Подкласс класса G, образованный только однолистными функциями обозначим через $\tilde{G}$. Класс G ввел С. А. Гельфер в 1946 г. и получил точную оценку $|a_1| \leqslant 2 \forall g \in G$, где знак равенства имеет место только для функций $g_\alpha(z) = \dfrac{1 + e^{i\alpha} z}{1 - e^{i\alpha} z}$, $\operatorname{Im} \alpha = 0$. (см. [1]). Хаммель [2] построил вариационную формулу в классе $\tilde{G}$ и получил точную оценку модуля коэффициента a_2 функций $g \in \tilde{G}$.

В настоящей статье некоторые результаты, полученные в работах [3—5], перенесены на класс $\tilde{G}$. Кроме того, вариационная формула Хаммеля построена с помощью метода Г. М. Голузина [6, с. 99]. Получено дифференциальное уравнение для функций, реализующих максимум модуля коэффициента $a_n(g)$, $g \in \tilde{G}$.

Пусть $\tilde{G}(n)$ — совокупность всех функций $g \in \tilde{G}$, таких, что

$$|a_n(g)| = \max_{\varphi \in \tilde{G}} |a_n(\varphi)|, \qquad n = 1, 2, \dots$$

В классе $\tilde{G}$ введем метрику

$$\rho(g_1, g_2) = \max_{|z| = 1/2} |g_1(z) - g_2(z)|.$$

Для каждого $\varepsilon > 0$ ε-окрестностью $M_\varepsilon(g_0)$ функции g_0 назовем множество всех функций $g \in \tilde{G}$, для которых выполняется неравенство $\rho(g_0, g) < \varepsilon$.

Будем говорить, что функция $g_0 \in \tilde{G}$ реализует локальный максимум функционала $\mathcal{I}(g)$, если существует такое $\varepsilon > 0$, что $\mathcal{I}(g_0) \geqslant \mathcal{I}(g)$ $\forall g \in M_\varepsilon(g_0)$.

Множество всех функций $g \in \tilde{G}$, реализующих локальный максимум функционала $|a_n(g)|$ обозначим через $\tilde{G}_{\text{loc}}(n)$. Введем в рассмотрение классы

$$\tilde{G}(n, m) \stackrel{\text{df}}{=} \tilde{G}(n) \cap \tilde{G}(m), \ 1 \leqslant n < m, \ \tilde{G}_{\text{loc}}(n, m) \stackrel{\text{df}}{=} \tilde{G}(n) \cap \tilde{G}_{\text{loc}}(m), \qquad n \neq m.$$

Обозначим через P множество всех функций вида $g_\theta = \dfrac{1 + e^{i\theta} z}{1 - e^{i\theta} z}$, $\operatorname{Im} \theta = 0$.

2. Основные результаты. Из результатов Гельфера [1] и Хаммеля [2] следует, что множество $\tilde{G}(1) \cap \tilde{G}(2) = \varnothing$.

Для соседних коэффициентов функций $g \in \tilde{G}$ справедлив следующий результат.

Теорема 1. *Для каждой пары натуральных чисел* $(n, n+1)$ *имеет место только одно из двух утверждений:* 1) $\tilde{G}_{\text{loc}}(n, n+1) = P$; 2) $\tilde{G}_{\text{loc}}(n, n+1) = \varnothing$.

Отсюда получаем следующие утверждения.

Следствие 1. *Если* $\tilde{G}_{\text{loc}}(n, n+1) \neq \varnothing$, *то* $\tilde{G}_{\text{loc}}(n, n+1) = P$.

Следствие 2. *Если* $\tilde{G}_{\text{loc}}(n, n+1) \neq \varnothing$, *то* $|a_n(g)| \leqslant 2 \quad \forall g \in \tilde{G}$, *знак равенства достигается для функций* $g \in P$.

Следствие 3. *Если* $\tilde{G}(n, n+1) \neq \varnothing$, *то* $|a_n| \leqslant 2$, $|a_m| \leqslant 2 \ \forall g \in \tilde{G}$, *знак равенства достигается для функций* $g \in P$.

3. Вариационная формула. Ясно, что функция

$$f(z) = g^2(z) - 1, \quad g \in \tilde{G}, \tag{1}$$

голоморфна и однолистна в круге K_1.

Таким образом, преобразование (1) переводит класс $\tilde{G}$ в класс F (см. [7]) функций f, голоморфных и однолистных в круге K_1 и таких, что $f(0) = 0$, $f(z) \neq -1 \ \forall z \in K_1$.

Итак, чтобы построить вариационную формулу в классе $\tilde{G}$, необходимо построить ее в классе F [7].

Для построения вариационной формулы в классе F применим теорему Г. М. Голузина (см. [6, с. 99]).

Легко видеть, что функция $w^* = w(w) = w + \varepsilon\beta \dfrac{4w(w+1)}{w - w_0}$ регулярна и однолистна в области $|w - w_0| > \rho \ \forall \rho > 0$ и сохраняет неподвижными точки $w = 0, -1, \infty$, где $0 < \varepsilon < \varepsilon_0(\rho)$, $\varepsilon_0(\rho)$ — достаточно мало, $|\beta| = 1$, $w_0 \neq 0$, $w_0 \neq -1, \infty$. Тогда функция $w^*(f(z)) = f(z) + \varepsilon\beta \dfrac{4f(z)(f(z)+1)}{f(z) - f(z_0)}$, $z_0 \in K_1$, $z_0 \neq 0$, удовлетворяет условиям теоремы Г. М. Голузина [6, с. 99]. Применяя эту теорему к функции $w^*(f(z)) = f(z) + \varepsilon\beta \dfrac{4f(z)(f(z)+1)}{f(z) - f(z_0)}$, получаем вариационную формулу в классе F (ср. с [7]):

$$f^*(z) = f(z) + \varepsilon\beta \frac{4f(z)(f(z)+1)}{f(z) - f(z_0)} - \varepsilon\beta \frac{4f(z_0)(f(z_0)+1)}{z_0 f'(z_0)^2} \frac{zf'(z)}{z - z_0} + \varepsilon\bar{\beta} \overline{\left(\frac{4f(z_0)(f(z_0)+1)}{z_0 f'(z_0)^2}\right)} \frac{z^2 f'(z)}{1 - z\bar{z}_0} + O(\varepsilon^2),$$

где $1/\varepsilon^2 O(\varepsilon^2)$ — равномерно ограничена на любом компакте из K_1, параметры ε, β определены ранее, $z_0 \in K_1$, $z_0 \neq 0$.

Используя (1), находим

$$g^*(z)^2 - 1 = g^2(z) - 1 + 4\varepsilon\beta \frac{(g^2(z) - 1) g^2(z)}{(g^2(z) - 1) - (g^2(z_0) - 1)} - 2\varepsilon\beta \frac{(g(z_0)^2 - 1) g(z_0)^2}{z_0 g(z_0)^2 g'(z_0)^2} \frac{z g(z) g'(z)}{z - z_0} + 2\varepsilon\bar{\beta} \overline{\left(\frac{(g(z_0)^2 - 1) g(z_0)^2}{z_0 g(z_0)^2 g'(z_0)^2}\right)} \frac{z^2 g(z) g'(z)}{1 - z\bar{z}_0} + O(\varepsilon^2). \tag{2}$$

Из выражения (2) следует

$$g^*(z)^2 = g(z)^2 \left[1 + 4\varepsilon\beta \frac{g^2(z) - 1}{g^2(z) - g(z_0)^2} - 2\varepsilon\beta \frac{g(z_0)^2 - 1}{z_0 g'(z_0)^2} \frac{z g'(z)}{g(z)(z - z_0)} + 2\varepsilon\bar{\beta} \overline{\left(\frac{g(z_0)^2 - 1}{z_0 g'(z_0)^2}\right)} \frac{z^2 g'(z)}{g(z)(1 - z\bar{z}_0)} + O(\varepsilon^2)\right]. \tag{3}$$

Извлекая квадратный корень из обеих частей равенства (3), имеем

$$g^*(z) = g(z) + 2\varepsilon\beta \frac{g(z)(g^2(z) - 1)}{g^2(z) - g^2(z_0)} - \varepsilon\beta \frac{g^2(z_0) - 1}{z_0^2 g'(z_0)^2} \frac{z_0 z g'(z)}{z - z_0} + \varepsilon\bar{\beta} \overline{\left(\frac{g(z_0)^2 - 1}{z_0^2 g'(z_0)^2}\right)} \frac{\bar{z}_0 z^2 g'(z)}{1 - z\bar{z}_0} + O(\varepsilon^2), \tag{4}$$

где выбирается та регулярная в области ветвь корня, для которой выполняется соотношение $\sqrt{r} > 0$ при $r > 0$. Ранее методом Шиффера вариационная формула (4) получена в работе [2].

4. Дифференциальное уравнение для функций $g \in \in \tilde{G}_{\text{loc}}(n)$. Пусть $g \in \tilde{G}$, тогда

$$g(z) = 1 + a_1(g)z + a_2(g)z^2 + \ldots + a_n(g)z^n + \ldots, \; a_n(g) = = \frac{1}{n!}\left[\frac{d^n}{dz^n}\, g(z)\right]\Bigg|_{z=0}.$$

Функционал $a_n(g)$ является линейным и непрерывным относительно равномерной сходимости на компактах. Имеем

$$a_n(g^*) = c_n(g) + 2\varepsilon\beta a_n\left[\frac{g(z)(g^2(z)-1)}{g^2(z)-g^2(z_0)}\right] - \varepsilon\beta\,\frac{g(z_0)^2-1}{z_0^2 g'(z_0)^2}\, a_n\left[\frac{z_0 z g'(z)}{z-z_0}\right] + $$

$$+ \varepsilon\bar{\beta}\,\overline{\left(\frac{g^2(z_0)-1}{z_0^2 g'(z_0)^2}\right)}\, a_n\left[\frac{\bar{z}_0 z^2 g'(z)}{1-z\bar{z}_0}\right] + O(\varepsilon^2).$$

Вычисления показывают, что

$$a_n\left[\frac{g(z)(g^2(z)-1)}{(g^2(z)-1)-(g^2(z_0)-1)}\right] =$$

$$= -a_n\left[\frac{g(z)(g^2(z)-1)}{g^2(z_0)-1}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{g^2(z)-1}{g^2(z_0)-1}\right)^k\right] = -\sum_{k=0}^{(n-1)}\frac{a_n^{k+1}}{(g^2(z_0)-1)^{k+1}},$$

$$a_n^{k+1} = a_n\left[g(z)(g^2(z)-1)^{k+1}\right],$$

$$a_n\left[\frac{z_0 z g'(z)}{z-z_0}\right] = -a_n\left[(a_1 z + 2a_2 z^2 + \ldots + n a_n z^n + \ldots)\left(1 + \left(\frac{z}{z_0}\right) + \ldots\right.\right.$$

$$\left.\left.\ldots + \left(\frac{z}{z_0}\right)^{n-1} + \ldots\right)\right] = -\left[n a_n + \frac{(n-1)a_{n-1}}{z_0} + \ldots + \frac{2a_2}{z_0^{n-2}} + \frac{a_1}{z^{n-1}}\right],$$

$$a_n\left[\frac{\bar{z}_0 z^2 g'(z)}{1-z\bar{z}_0}\right] = \bar{z}_0 a_n\left[(a_1 z^2 + 2a_2 z^3 + \ldots + n a_n z^{n+1} + \ldots)\left(1 + \left(\frac{z}{z_0}\right) + \ldots\right.\right.$$

$$\left.\left.\ldots + \left(\frac{z}{z_0}\right)^{n-1} + \ldots\right)\right] = [(n-1)a_{n-1}\bar{z}_0 + (n-2)a_{n-2}\bar{z}_0^2 + \ldots$$

$$\ldots + 2a_2\bar{z}_0^{n-2} + a_1\bar{z}_0^{n-1}].$$

Отсюда получаем (используем обозначения $w_0 = g_0 = g(z_0)$, $w = g(z)$, $a_k(g) = a_k$)

$$a_n(g^*) = a_n(g) - 2\varepsilon\beta\sum_{k=0}^{n-1}\frac{a_n^{k+1}}{(w_0^2-1)^{k+1}} + \varepsilon\beta\,\frac{w_0^2-1}{z_0^2 g'(z_0)^2}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\nu a_\nu}{z_0^{n-\nu}} +$$

$$+ \varepsilon\beta\,\overline{\left(\frac{w_0^2-1}{z_0^2 g'(z_0)^2}\right)}\sum_{\nu=1}^{n-1}\nu a_\nu \bar{z}_0^{n-\nu} + O(\varepsilon^2). \qquad (5)$$

Исходя из соотношения (5) находим дифференциально-функциональное уравнение для функций из класса $\tilde{G}_{\text{loc}}(n)$. Легко видеть, что

$$|a_n(g^*)| = |a_n(g)|\left\{1 - \varepsilon\,\mathrm{Re}\left[\beta\left(2\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\frac{a_n^{k+1}}{a_n}}{(w_0^2-1)^{k+1}}\right) - \right.\right.$$

$$-\varepsilon\beta\,\frac{w_0^2-1}{z_0^2 g'(z_0)^2}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\nu a_\nu}{a_n}\,\frac{1}{z_0^{n-\nu}}-\varepsilon\bar\beta\overline{\left(\frac{w_0^2-1}{z_0^2 g'(z_0)^2}\right)}\sum_{\nu=1}^{n-1}\frac{\nu a_\nu}{a_n}\,\bar z_0^{n-\nu}+O(\varepsilon^2)\Bigg]\Bigg\}. \qquad (6)$$

Заменив в равенстве (6) под знаком вещественной части соответствующие члены на сопряженные и использовав соотношение $|a_n(g^*)|\leqslant|a_n(g)|$, получим

$$\mathrm{Re}\,\beta\left\{\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2\,\dfrac{a_n^{k+1}}{a_n}}{(w_0^2-1)^{k+1}}-\frac{w_0^2-1}{z_0^2 g'(z_0)^2}\left[\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\nu a_\nu}{a_n}\,\frac{1}{z_0^{n-\nu}}+\sum_{\nu=1}^{n-1}\overline{\left(\frac{\nu a_\nu}{a_n}\right)}\bar z_0^{n-\nu}\right]\right\}\leqslant 0.$$

Параметр β имеет произвольный аргумент, поэтому

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2\,\dfrac{a_n^{k+1}}{a_n}}{(w_0^2-1)^{k+1}}=\frac{w_0^2-1}{z_0^2 g'(z_0)^2}\left[\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\nu a_\nu}{a_n}\,\frac{1}{z_0^{n-\nu}}+\sum_{\nu=1}^{n-1}\overline{\left(\frac{\nu a_\nu}{a_n}\right)}z_0^{n-\nu}\right] \qquad (7)$$

или (так как равенство (7) выполняется для всех $z_0\in K_1,\ z_0\neq 0$)

$$(zg'(z))^2\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2\,\dfrac{a_n^{k+1}}{a_n}}{(w^2-1)^{k+2}}=\sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{\nu a_\nu}{a_n}\right)\frac{1}{z^{n-\nu}}+\sum_{\nu=1}^{n-1}\overline{\left(\frac{\nu a_\nu}{a_n}\right)}z^{n-\nu}, \qquad (8)$$

где $a_n^{k+1}=a_n\,[g(z)\,(g(z)^2-1)^{k+1}]$.

Итак, формула (8) дает искомое уравнение для функций $g\in\tilde G_{\mathrm{loc}}(n)$. Рассмотрим частные случаи. Пусть $n=1$, тогда

$$(zg'(z))^2\,\frac{4}{(w^2-1)^2}=1.$$

Это уравнение в терминах квадратичных дифференциалов (см. [8]) примет вид

$$\frac{4dw^2}{(w^2-1)^2}=\left(\frac{dz}{z}\right)^2. \qquad (9)$$

Уравнение (9) получено ранее в [2]. Исследуя структуру траекторий уравнения (9), получаем $|a_1|\leqslant 2$ (см. [1]).

При $n=2$ имеем (см. [2])

$$\frac{1}{a_2}\,\frac{2\,[(2a_2+3a_1^2)\,w^2+(a_1^2-2a_2)]}{(w^2-1)^3}\,dw^2=\frac{\left[\left(\dfrac{a_1}{a_2}\right)+2z+\overline{\left(\dfrac{a_1}{a_2}\right)}z^2\right]dz^2}{z^3}.$$

5. Доказательство теоремы 1. Для доказательства теоремы достаточно показать, что из условия $\tilde G_{\mathrm{loc}}(n,n+1)\neq\varnothing$ следует соотношение $\tilde G_{\mathrm{loc}}(n,n+1)=P$. Итак, допустим, что $g\in\tilde G_{\mathrm{loc}}(n,n+1)$ (для удобства будем считать, что $a_1(g)>0$). Тогда функция $w=g(z)$ удовлетворяет системе двух дифференциальных уравнений вида (8):

$$\begin{aligned}(zg'(z))^2\sum_{k=0}^{n-1}\frac{a_n^{k+1}}{a_n}\,\frac{2}{(w^2-1)^{k+1}}&=\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\nu a_\nu}{a_n}\,\frac{1}{z^{n-\nu}}+\sum_{\nu=1}^{n-1}\overline{\left(\frac{\nu a_\nu}{a_n}\right)}z^{n-\nu},\\ (zg'(z))^2\sum_{k=0}^{n}\frac{a_{n+1}^{k+1}}{a_{n+1}}\,\frac{2}{(w^2-1)^{k+1}}&=\sum_{\nu=1}^{n+1}\frac{\nu a_\nu}{a_{n+1}}\,\frac{1}{z^{n+1-\nu}}+\sum_{\nu=1}^{n}\overline{\left(\frac{\nu a_\nu}{a_{n+1}}\right)}z^{n+1-\nu}.\end{aligned} \qquad (10)$$

Разделив первое уравнение системы (10) на второе, получим, что $w = g(z)$ является алгебраической функцией, удовлетворяющей соотношению

$$(w^2-1)\frac{\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{a_n^{k+1}}{a_n}(w^2-1)^{n-(k+1)}}{\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{a_{n+1}^{k+1}}{a_{n+1}}(w^2-1)^{n-k}} = z\frac{\sum\limits_{\nu=1}^{n}\left(\frac{\nu a_\nu}{a_n}\right)z^{\nu-1}+\sum\limits_{\nu=1}^{n-1}\overline{\left(\frac{\nu a_\nu}{a_n}\right)}z^{n+\nu-1}}{\sum\limits_{\nu=1}^{n+1}\left(\frac{\nu a_\nu}{a_{n+1}}\right)z^{\nu-1}+\sum\limits_{\nu=1}^{n}\overline{\left(\frac{\nu a_\nu}{a_n}\right)}z^{n+\nu}}. \tag{11}$$

Следует отметить, что левая часть равенства (11) является рациональной функцией переменного (w^2-1). Производя замену переменных в (11) и полагая $(w^2-1)=t$, получаем

$$t\frac{\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{a_n^{k+1}}{a_n}t^{n-(k+1)}}{\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{a_{n+1}^{k+1}}{a_{n+1}}t^{n-k}} = z\frac{\sum\limits_{\nu=1}^{n}\left(\frac{\nu a_\nu}{a_n}\right)z^{\nu-1}+\sum\limits_{\nu=1}^{n-1}\overline{\left(\frac{\nu a_\nu}{a_n}\right)}z^{n+\nu-1}}{\sum\limits_{\nu=1}^{n+1}\left(\frac{\nu a_\nu}{a_{n+1}}\right)z^{\nu-1}+\sum\limits_{\nu=1}^{n}\overline{\left(\frac{\nu a_\nu}{a_{n+1}}\right)}z^{n+\nu}}. \tag{12}$$

Функция $t = t(z)$ является алгебраической функцией переменного z. Кроме того, по теореме о неявных функциях [9, с 476] существует единственная ветвь этой функции вида

$$t = \alpha_1 z + \alpha_2 z + \ldots \tag{13}$$

Имеет место утверждение, аналогичное соответствующим результатам работ [3—5, 10, с. 260].

Лемма. *Алгебраическая функция $t = t(z)$, удовлетворяющая уравнению (12), обладает следующими свойствами:*

а) *каждая ветвь $t_l(z)$ регулярна в точке $z = 0$ и имеет следующий вид в некоторой ее окрестности*

$$t_\iota(z) = \alpha_1^l z + \ldots,\ (\alpha_1^l)^{n-1} = (2a_1)^{n-1};$$

б) *каждая ветвь $t_l(z)$ регулярна в точке $z=\infty$ и имеет следующий вид в некоторой окрестности:*

$$t_l(z) = \gamma_1^l/z + \ldots,\ |\gamma_1^l| = 2a_1;$$

в) *если $0<|z|<\infty$, то $t(z)\neq 0$.*

Доказательство проводится аналогично доказательству леммы из работы [10, с. 260—262]. Поэтому приведем необходимые рассуждения только для п. а).

После замены переменной $t = (w^2-1)$ первое из уравнений системы (10) принимает вид

$$\frac{z^2t'(z)^2}{4(t+1)}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2\frac{a_n^{k+1}}{a_n}}{t^{k+2}} = \sum_{\nu=1}^{n}\frac{\nu a_\nu}{a_n}\frac{1}{z^{n-\nu}}+\sum_{\nu=1}^{n-1}\overline{\left(\frac{\nu a_\nu}{a_n}\right)}z^{n-\nu}. \tag{14}$$

Функция $t(z)$ при z достаточно малых имеет вид: 1) $t(z)=Az^{-\beta}+\ldots$, $\beta>0$, либо 2) $t(z)=A_0+A_1z^\gamma+\ldots,\ \gamma>0$.

Тогда в первом случае получаем

$$\frac{(zt'(z))^2}{4(t+1)} = \frac{z^2(-\beta)Az^{-2(\beta+1)}(1+\ldots)}{4z^{-\beta}(1+\ldots)} = -\frac{\beta A}{4}\frac{1}{z^\beta}+\ldots,$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_n^{k+1}}{a_n} \frac{2}{t^{k+2}} = \frac{a_n^n}{a_n} \frac{2}{A^{n+1} z^{-(n+1)\beta}} + \dots,$$

$$\frac{(zt'(z))^2}{4(t+1)} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_n^{k+1}}{a_n} \frac{2}{t^{k+2}} = O(z^{n\beta}),$$

а это противоречит уравнению (14).

Рассмотрим второй случай. Имеем

$$\frac{(zt'(z))^2}{4(t+1)} = \frac{\gamma^2 A_1^2 z^{2\gamma} + \dots}{1 + A_0 + A_1 z^\gamma + \dots} = \begin{cases} O(z^{2\gamma}), & A_0 \neq -1; \\ O(z^\gamma), & A_0 = -1, \end{cases}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_n^{k+1}}{a_n} \frac{2}{t^{k+2}} = \begin{cases} O(1), & A_0 \neq 0; \\ \dfrac{a_n^n}{a_n} \dfrac{2}{A_1^{n+1} z^{(n+1)\gamma}} + \dots, & A_0 = 0, \end{cases}$$

$$\frac{(zt'(z))^2}{4(t+1)} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_n^{k+1}}{a_n} \frac{2}{t^{k+2}} = \begin{cases} O(z^\gamma), & A_0 \neq 0; \\ \dfrac{\gamma^2 a_n^n}{2a_n} \dfrac{1}{A_1^{n-1}} \dfrac{1}{z^{(n+1)\gamma-2}} + \dots, & A_0 = 0. \end{cases}$$

Из уравнения (14) находим $A_0 = 0$, $\gamma = 1$, $A_1^{n-1}(2a_1)^{-(n-1)} = 1$. Отсюда $A_1^{n-1} = (2a_1)^{n-1}$.

Остальные утверждения леммы легко получить аналогично [3—5, 10, с. 260—262].

Из леммы и единственности выражения (13) следует, что функция $t = t(z)$ рациональна и имеет вид $t(z) = 2a_1 \dfrac{z}{1 + b_1 z + b_2 z^2}$, $|b_2| = 1$. Из однолистности $t(z)$ в круге K_1 имеем $t(z) = \dfrac{2a_1 z}{(1 - e^{i\alpha} z)(1 - e^{i\beta} z)}$, $\operatorname{Im} \alpha = \operatorname{Im} \beta = 0$. Характер отображения $t = t(z)$ можно установить из равенства

$$t = e^{-i\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)} 2a_1 \left[(e^{i\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)} z)^{-1} + 2\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}} z \right]^{-1},$$

которое показывает, что точка $t = -1$ принадлежит границе образа круга K_1 тогда и только тогда, когда $\exp i\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right) = 1$.

С другой стороны функции $w = g(z)$ и $t = t(z)$ связаны соотношением $w^2 = t(z) + 1$. Отсюда и из однолистности $w = g(z)$ в круге K_1 следует, что функция $t(z)$ не принимает значение $t = -1$ внутри круга K_1, откуда вытекает $\exp i\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right) = 1$.

Таким образом, $w = g(z)$ принадлежит классу Каратеодори, а из этого следует, что $g(z) \in P$. Итак, имеет место импликация $g \in \tilde{G}_{\mathrm{loc}}(n, n+1) \Rightarrow g \in P$. Следовательно, $\tilde{G}_{\mathrm{loc}}(n, n+1) \subset P$, но тогда имеет место утверждение $\tilde{G}_{\mathrm{loc}}(n, n+1) = P$. Теорема доказана. Следствия 1 — 3 легко следуют из теоремы 1.

1. *Гельфер С. А.* О классе регулярных функций, не принимающих ни одной пары значений w, $-w$.— Мат. сб., 1946, **19**, № 1, с. 33—46.
2. *Hammel I. A.* Variational method for Gel'fer functions.— J. Anal. Math., 1976, **30**, p. 272—280.
3. *Бахтин А. К.* О коэффициентах однолистных функций.— Докл. АН СССР, 1980, **254**, № 5, с. 1033—1035.

4. *Бахтин А. К.* Об экстремумах коэффициентов однолистных фуикций.— Киев, 1980.— 19 с.— (Препринт/АН УССР, Ин-т математики; 80.30).
5. *Бахтин А. К.* О функциях класса Гельфера.— В кн.: О некоторых задачах в теории однолистных функций.— Киев, 1980, с. 3—10.— (Препринт/АН УССР, Ин-т математики; 80.31).
6. *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного.— М.: Наука, 1966.— 626 с.
7. *Lewandowski Z., Libera R., Zlotkiewich E.* Values assumed by Gel'fer function.— Ann. UMCS A, 1979, **31**, p. 75—84.
8. *Дженкинс Дж.* Однолистные функции и конформные отображения.— М.: Изд-во иностр. лит., 1961.— 265 с.
7. *Маркушевич А. И.* Теория аналитических функций : В 2-х т.— М.: Наука, 1967. Т. 1. 486 с.
10. *Бабенко К. И.* К теории экстремальных задач для однолистных функций класса *S*.— М.: Наука, 1972.— 319 с.

Ин-т математики АН УССР, Киев
Получено 25.12.80