УДК 517.968

*М. В. Хай*

# Обращение некоторых двумерных интегральных уравнений

Ряд прикладных задач теплопроводности, термоупругости для тел с трещинами, контактных задач теории упругости и ползучести сводятся к решению двумерного интегрального уравнения вида

$$\iint\limits_S \frac{\gamma(\xi)}{|x-\xi|^{1+\nu}}\, d_\xi S = g(x), \quad x \in S, \quad 0 \leqslant \nu \leqslant 2, \quad \nu \neq 1, \tag{1}$$

где $\gamma(\xi)$ — неизвестная, подлежащая определению функция; $g(x)$ — заданная функция класса $L_2$; $S$ — плоская область, ограниченная гладким контуром $L$; $x$ и $\xi$ — точки с координатами $(x_1, x_2)$ и $(\xi_1, \xi_2)$.

Решение интегрального уравнения (1) существенно зависит от показателя $\nu$. Для некоторых значений $\nu$ это уравнение не имеет единственного решения или же имеет единственное решение при дополнительных условиях на функцию $\gamma(\xi)$ на контуре области $S$.

Для значений $-1 < \nu \leqslant 0$ и области $S$, имеющей вид полуплоскости, уравнение (1) рассматривалось в [1]. Для $\nu = 0$ и круговой области $S$ решение уравнения (1) получено в [2]. При $0 \leqslant \nu < 1$ и круговой области $S$, а также полиномиальной функции $g(x)$ способ построения решения (1) указан в [3]. В случае $\nu = 0$, эллиптической области $S$ и полиномиальной функции $g(x)$ решение уравнения (1) можно получить путем использования теоремы Дайсона [4]. При $\nu = 2$ решение (1) получено в квадратурах лишь для круговой области $S$ или же когда $S$ — полуплоскость [5]. При этом необходимым условием существования единственного решения уравнения (1) является обращение в нуль функции $\gamma(\xi)$ на контуре области $S$.

В настоящей работе в квадратурах получено решение уравнения (1) для значений $0 \leqslant \nu < 1$ и $1 < \nu \leqslant 2$. При этом рассмотрен случай, когда $S$ — полуплоскость или круг радиуса $a$. Указаны классы для функций $\gamma(\xi)$ и $g(x)$, в которых решение уравнения (1) единственно.

Для обращения интегрального уравнения (1) первоначально ограничимся случаем, когда $S$ — полуплоскость, соответствующая значениям $x_1 \leqslant 0$. Эту область обозначим через $S_-$.

Интегральное уравнение (1) принадлежит к интегральным уравнениям типа свертки, поэтому для его решения удобно воспользоваться приемами интегральных преобразований. При этом воспользуемся методикой [6] решения одномерных интегральных уравнений типа свертки и введем в рассмотрение функции

$$\gamma_-(\xi) = \begin{cases} \gamma(\xi), & \xi \in S_- \\ 0, & \xi \in S_+, \end{cases} \quad g_-(x) = \begin{cases} g(x), & x \in S_- \\ 0, & x \in S_+, \end{cases} \tag{2}$$

$f_+(x) = 0$, $x \in S_-$, $f_+(x)$ неизвестная для $x \in S_+$, где $S_+$ — область, дополняющая $S_-$ до полной плоскости.

С учетом введенных доопределений соответствующих функций уравнение (1) преобразуем к виду

$$\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\gamma_-(\xi)}{|x-\xi|^{1+\nu}} d\xi_1 d\xi_2 = g_-(x) + f_+(x), \quad x \in S_- \cup S_+. \tag{3}$$

Применяя к (3) двумерное преобразование Фурье и используя теорему о свертках, имеем

$$2\pi K(\eta) F^-(\eta) = G^-(\eta) + F^+(\eta), \tag{4}$$

где $F^\pm(\eta)$ и $G^-(\eta)$ — изображение Фурье соответственно от функций $f_+(x)$, $\gamma_-(x)$ и $g_-(x)$,

$$K(\eta) = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i(x_1\eta + x_2\eta_2)}}{(x_1^2 + x_2^2)^{(1+\nu)/2}} dx_1 dx_2.$$

Вычисляя соответствующие интегралы, находим

$$K(\eta) = \frac{A_\nu}{(\eta_1^2 + \eta_2^2)^{(1-\nu)/2}}, \quad A_\nu = \frac{1}{2^\nu} \frac{\Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+\nu}{2}\right)}, \quad 0 \leqslant \nu < 1,$$

$$K(\eta) = B_\nu (\eta_1^2 + \eta_2^2)^{(\nu-1)/2}, \quad B_\nu = -\frac{2^{2-\nu}}{(1-\nu)^2} \frac{\Gamma\left(\frac{3-\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu-1}{2}\right)}, \quad 1 < \nu \leqslant 2, \tag{5}$$

где $\Gamma(p)$ — гамма-функция.

Задача (4) для определения $F^\pm(\eta)$ является параметрической задачей Римана на прямой, так как $F^\pm(\eta)$ — граничные значения аналитических функций $F^\pm(w, \eta_2)$ комплексного переменного $w = \eta_1 + i\tau$ соответственно в верхней $\tau > 0$ и нижней $\tau < 0$ полуплоскостях.

Задача (4) решается в замкнутом виде методом факторизации

$$K(\eta) = K^+(\eta) K^-(\eta). \tag{6}$$

Здесь $K^\pm(\eta)$ — граничные значения аналитических функций $K^\pm(w, \eta_2)$ комплексного переменного $w = \eta_1 + i\tau$ при $\tau \to \pm 0$.

С учетом (6) решение задачи (4) представим в виде

$$F^-(\eta) = \frac{1}{2\pi K^-(\eta)} P^-\left[\frac{G^-(\eta)}{K^+(\eta)}\right], \quad F^+(\eta) = -K^+(\eta) P^+\left[\frac{G^-(\eta)}{K^+(\eta)}\right], \tag{7}$$

где $P^\pm[Z(\eta)]$ — проекционные операторы [6],

$$P^\pm[Z(\eta)] = \frac{Z(\eta)}{2} \pm \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{Z(t, \eta_2)}{t - \eta_1} dt. \tag{8}$$

Поскольку для значений $0 \leqslant \nu < 1$

$$K^-(\eta) = \frac{A_\nu}{C_\nu X_\nu^-(\eta)}, \quad K^+(\eta) = \frac{1}{X_\nu^+(\eta)}, \quad C_\nu = e^{-i\pi(\nu-1)},$$

$$X_\nu^\pm(\eta) = (\eta_1 \pm i|\eta_2|)^{(1-\nu)/2}, \tag{9}$$

а для значений $1<\nu\leqslant 2$

$$K^{-}(\eta)=B_\nu D_\nu X_\nu^{-}(\eta),\quad K^{+}(\eta)=X_\nu^{+}(\eta),\quad D_\nu=e^{-i\pi(\nu-1)},$$
$$X_\nu^{\pm}(\eta)=(\eta_1\pm i\,|\,\eta_2\,|)^{(\nu-1)/2},\tag{10}$$

решение задачи (4) единственно в классе функций

$$\frac{F^{-}(\eta)}{(\eta_1-i\,|\,\eta_2\,|)^{(1-\nu)/2}}\in L_2^{-},\quad F^{+}(\eta)(\eta_1+i\,|\,\eta_2\,|)^{(1-\nu)/2}\in L_2^{+},\quad 0\leqslant\nu<1,$$
$$F^{-}(\eta)(\eta_1-i\,|\,\eta_2\,|)^{(\nu-1)/2}\in L_2^{-},\quad \frac{F^{+}(\eta)}{(\eta_1+i\,|\,\eta_2\,|)^{(\nu-1)/2}}\in L_2^{+},\quad 1<\nu\leqslant 2,\tag{11}$$

где $L_2^{\pm}$ — классы функций, определенные в [6], с той лишь разницей, что предполагается существование интегралов

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int|F^{+}(\eta_1+i\tau,\ \eta_2)|^2\,d\eta_1 d\eta_2<C=\text{const}.$$

В (9) и (10) для корней $\Gamma_\sigma^{\pm}(x)$ выбраны ветви

$$\Gamma_\sigma^{\pm}(x)=[x^\sigma]^{\pm},\quad [x^\sigma]^{+}=\begin{cases}|\,x^\sigma\,|, & x>0,\\ |\,x^\sigma\,|\,e^{i\pi\sigma}, & x<0,\end{cases}\qquad [x^\sigma]^{-}=\begin{cases}|\,x^\sigma\,|\,e^{i2\pi\sigma}, & x>0,\\ |\,x^\sigma\,|\,e^{i\pi\sigma}, & x<0.\end{cases}$$

Таким образом, решение уравнения (1), когда $S$ — полуплоскость, сведено к вычислению обратного преобразования Фурье от функций $F^{\pm}(\eta)$, что является сложной и громоздкой задачей. Если воспользоваться значениями интегралов

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{itu}dt}{(t-\xi)(t+i\,|\,\eta\,|)^{(1+\nu)/2}}=-\frac{\pi i^{(1-\nu)/2}e^{i\xi u}}{\Gamma\left(\dfrac{1+\nu}{2}\right)}\times$$
$$\times\left[\frac{\Gamma\left(\dfrac{1+\nu}{2}\right)}{(|\,\eta\,|-i\xi)^{(1-\nu)/2}}-2\int_{-\infty}^{u}\frac{e^{s(|\eta|-i\xi)}}{(-s)^{(1-\nu)/2}}\,ds\right],\qquad 0\leqslant\nu<1,$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{itu}dt}{(t-\xi)(t+i\,|\,\eta\,|)^{(\nu-1)/2}}=-\frac{\pi e^{i\xi u}}{i^{(\nu-3)/2}\Gamma\left(\dfrac{\nu-1}{2}\right)}\times$$
$$\times\left[2\int_{u}^{0}\frac{e^{s(|\eta|-i\xi)}}{(-s)^{(3-\nu)/2}}\,ds-\frac{\Gamma\left(\dfrac{\nu-1}{2}\right)}{(|\,\eta\,|-i\xi)^{(\nu-1)/2}}\right],\qquad 1<\nu\leqslant 2,$$

то вычисление обратного преобразования Фурье от функций $F^{\pm}(\eta)$ значительно упрощается. В частности,

$$\gamma(x)=-\frac{\Delta_x}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int\frac{g_{-}(\xi)+f_{+}(\xi)}{|\,x-\xi\,|^{1-\nu}}\,d\xi_1 d\xi_2,\qquad 0\leqslant\nu<1,\tag{12}$$

$$f_{+}(x)=\begin{cases}0, & x\in S_{-},\\ \dfrac{1}{\pi\Gamma\left(\dfrac{1+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{1-\nu}{2}\right)}\displaystyle\iint_{S_{-}}\left(-\frac{x_1}{u_1}\right)^{(1-\nu)/2}\frac{g_{-}(u)}{|\,u-x\,|^2}\,d_uS, & x\in S_{+},\end{cases}$$

где $g_-(\xi)$ определяются через $g(\xi)$ соотношениями (2), $\Delta_x$ — двумерный оператор Лапласа переменных $x_1$ и $x_2$.

Для значений $1 < \nu \leqslant 2$ решение интегрального уравнения (1) определяется формулами

$$\gamma(x) = -\frac{(1-\nu)^2}{4\pi^2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int \frac{g_-(\xi) + f_+(\xi)}{|x-\xi|^{3-\nu}} d_\xi S, \tag{13}$$

$$f_+(x) = \begin{cases} 0, & x \in S_-, \\ -\dfrac{1}{\pi\Gamma\left(\dfrac{\nu-1}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{3-\nu}{2}\right)} \displaystyle\iint\limits_{S_-} \left(-\frac{u_1}{x_1}\right)^{(\nu-1)/2} \frac{g_-(u)}{|x-u|^2} d_u S, & x \in S_+. \end{cases}$$

Первую из формул (13) можно преобразовать к более удобному для использования виду

$$\gamma(x) = \frac{1}{4\pi^2 B_\nu}\left[\frac{1}{\Gamma\left(\dfrac{\nu-1}{2}\right)}\right]^2 \iint\limits_{S_-} g_-(u)\, T(u, x)\, d_u S, \qquad 1 < \nu \leqslant 2,$$

$$T(u, x) = \frac{1}{\nu-1} \int\limits_0^{(x_1u_1)^{(\nu-1)/2}} \frac{dt}{t^{2/(\nu-1)} + |u-x|^2/4}. \tag{14}$$

Из (11), а аналогично из (13) или (14) следует, что единственное решение уравнения (1) при $1 < \nu \leqslant 2$ существует лишь в классе функций, обращающихся в нуль на контуре области $S$.

При $\nu = 2$ решение в форме (14) может быть преобразовано к виду

$$\gamma(x) = -\frac{1}{2\pi^3} \iint\limits_{S_-} g_-(u) \frac{1}{|x-u|} \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{x_1u_1}}{|x-u|} d_u S. \tag{15}$$

Для получения формул обращения интегрального уравнения (1) в случае круговой области $S$ радиуса $a$ воспользуемся приемом конформного преобразования круга на левую полуплоскость. С этой целью рассмотрим функцию

$$x_1 + ix_2 = f(y) = -a\frac{w+1}{w-1}, \qquad w = y_1 + iy_2, \quad i = \sqrt{-1}. \tag{16}$$

Учитывая (16), легко убедиться в том, что при таком преобразовании $|x - \xi|$ соответствует функция $2a\,|y-\eta|/(|y-1|\,|\eta-1|)$, где $y$ и $\eta$ — точки с координатами $(y_1, y_2)$ и $(\eta_1, \eta_2)$.

С учетом (16) интегральное уравнение (1) с круговой областью $S$ можно преобразовать к виду

$$\iint\limits_{S_-} \frac{\gamma_*(\eta)}{|y-\eta|^{1+\nu}} d_\eta S = g_*(y), \quad y \in S_-, \tag{17}$$

где

$$\gamma_*(\eta) = \frac{(2a)^{1-\nu}}{|\eta-1|^{3-\nu}} \gamma(\xi)\Big|_{\xi=f(\eta)}, \quad g_*(y) = \frac{g(x)}{|y-1|^{1+\nu}}\Big|_{x=f(y)}.$$

Располагая решением уравнения (17), определяем $\gamma_*(\eta)$, а затем, возвращаясь к переменным $x$ и $\xi$, — и функцию $\gamma(x)$. Опуская все промежуточные вычисления, имеем

$$\gamma(x) = -\frac{\Delta_x}{4\pi^2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int \frac{g_-(\xi) + f_+(\xi)}{|x-\xi|^{1-\nu}} d\xi_1 d\xi_2, \quad 0 \leqslant \nu < 1,$$

$$g_-(x)=\begin{cases} g(x), & x\in S,\\ 0, & x\in S_*,\end{cases} \tag{18}$$

$$f_+(x)=\begin{cases} 0, & x\in S,\\ \dfrac{1}{\pi\Gamma\left(\dfrac{1+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{1-\nu}{2}\right)}\displaystyle\iint_S\left(\frac{x_1^2+x_2^2-a^2}{a^2-u_1^2-u_2^2}\right)^{(1-\nu)/2}\frac{g_-(u)}{|x-u|^2}d_uS, & x\in S_*,\end{cases}$$

$$\gamma(x)=-\frac{(1-\nu)^2}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int\frac{g_-(\xi)+f_+(\xi)}{|x-\xi|^{3-\nu}}d\xi_1d\xi_2,\quad 1<\nu\leqslant 2, \tag{19}$$

$$f_+(x)=\begin{cases} 0, & x\in S,\\ -\dfrac{1}{\pi\Gamma\left(\dfrac{\nu-1}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{3-\nu}{2}\right)}\displaystyle\iint_S\left(\frac{a^2-u_1^2-u_2^2}{x_1^2+x_2^2-a^2}\right)^{(\nu-1)/2}\frac{g_-(u)}{|x-u|^2}d_uS, & x\in S_*,\end{cases}$$

где $S_*$ — область, дополняющая $S$ до полной плоскости, или

$$\gamma(x)=-\frac{1}{\pi^2}\frac{a^{1-\nu}}{2^{1-\nu}}\frac{\nu-1}{\Gamma\left(\dfrac{3-\nu}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{\nu-1}{2}\right)}\iint_S g_-(u)\,T(u,x)\,d_uS,$$

$$1<\nu\leqslant 2, \tag{20}$$

$$T(u,x)=\int\limits_0^{[(a^2-x_1^2-x_2^2)(a^2-u_1^2-u_2^2)]^{(\nu-1)/2}}\frac{dz}{z^{2/(\nu-1)}+a^2|x-u|^2}.$$

Для значений $\nu=2$ формулы (20) упрощаются:

$$\gamma(x)=-\frac{1}{2\pi^3}\iint_S\frac{g(u)}{|x-u|}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{(a^2-x_1^2-x_2^2)(a^2-u_1^2-u_2^2)}}{a|x-u|}d_uS. \tag{21}$$

Формулы (18)—(21) — решение уравнения (1), когда $S$ — круговая область. В одних случаях удобно пользоваться решением в виде (19), а в других — в виде (20).

С помощью формул (18)—(21) легко получить формулы обращения уравнения (1), когда $S$ — внешность круговой области радиуса $a$. Для этого необходимо применить предварительно инверсию, преобразующую внешность круга на его внутренность.


1. *Мхитарян С. М.* О двух спектральных соотношениях для интегральных операторов на полубесконечном интервале и их приложении к смешанным задачам.— Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1983, № 1, с. 63—72.
2. *Леонов М. Я.* Решение одного интегрального уравнения теории ньютоновского потенциала.— Укр. мат. журн., 1953, 5, № 1, с. 50—56.
3. *Ростовцев Н. А.* Об одном интегральном уравнении, встречающемся в задачах о давлении жесткого штампа на однородный грунт.— Прикл. математика и механика, 1961, 25, № 1, с. 164—168.
4. *Черепанов Г. П.* Механика хрупкого разрушения.— М. : Наука, 1974.— 640 с.
5. *Кит Г. С., Хай М. В.* Интегральные уравнения пространственных задач теплопроводности для тел с трещинами.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1975, № 8, с. 704—707.
6. *Гахов Ф. Д., Черский Ю. И.* Уравнения типа свертки.— М. : Наука, 1978.— 296 с.



Ин-т прикл. пробл. механики и математики, Львов



Получено 03.04.84, после доработки — 04.09.84