УДК 519.21

С. А. Солнцев

Об осцилляции сумм независимых случайных величин

В настоящей статье с помощью сильного принципа инвариантности [1] изучаются сильные предельные теоремы типа усиленного закона больших чисел и закона повторного логарифма. Единым методом удается получить теоремы типа интегрального критерия Феллера [2] и изучить осцилляционные свойства взвешенных сумм.

Пусть $\{X_n, n \geqslant 1\}$ — последовательность независимых случайных величин с общей функцией распределения $F(x)$, $\mathrm{M}\,X_n = 0$, $\mathrm{D}\,X_n = 1$; $\{a_n, n \geqslant 1\}$ — последовательность ненулевых действительных чисел, $|a_n| \underset{n\to\infty}{\to} \infty$.

Введем для ограниченного массива действительных чисел $\{\alpha_{n,k}\} = \{\alpha_{n,k} : 1 \leqslant k \leqslant i_n,\ n = 1, 2, \ldots\}$, $i_n \uparrow \infty$ условия: а) $\{\alpha_{n,k}\}$ монотонна по k при всех достаточно больших n; б) знак величины $\alpha_{n,k} - \alpha_{n,p}$ при $i_n \geqslant \max(k, p)$ не зависит от n. (Знак нуля полагаем произвольным.) Теорема 1 и ее следствия дополняют результаты работы [3].

Пусть $\{\lambda_n, n \geqslant 1\}$ — последовательность ненулевых действительных чисел. Рассмотрим ряд

$$I(t, \{\lambda_n\}) = \sum_n \exp\{-t^2/2\lambda_n^2\}.$$

Положим $\pi\{\lambda_n\} = \inf\{t > 0 : I(t, \{\lambda_n\}) < \infty\}$ ($\pi\{\lambda_n\} = \infty$, если $I(t, \{\lambda_n\}) = \infty$ для всех $t > 0$).

Обозначим $D_n^2 = \sum_{k=1}^{i_n} \alpha_{n,k}^2$, $A_n^2 = \sum_{k=1}^{i_n} \sigma_k^2 \alpha_{n,k}^2$, $C_{l,n} = \sum_{k=1}^{i_l} \sigma_k^2 \alpha_{l,k} \alpha_{n,k}$ при $l < n$,

где

$$\sigma_k^2 = \int_{-\sqrt{k}}^{\sqrt{k}} x^2 dF(x) - \left(\int_{-\sqrt{k}}^{\sqrt{k}} x dF(x)\right)^2. \tag{1}$$

Теорема 1. *Пусть ограниченный массив* $\{\alpha_{n,k}\}$ *удовлетворяет условию* а) *или* б). *Тогда*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{i_n} \alpha_{n,k} X_k}{\sqrt{i_n}\, a_n} \leqslant \pi\left\{\frac{D_n}{\sqrt{i_n}\, a_n}\right\} \text{ п. н.} \tag{2}$$

Если дополнительно $\gamma < 1$, *то*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{i_n} \alpha_{n,k} X_k}{\sqrt{i_n}\, a_n} \geqslant \sqrt{1-\gamma}\, \pi\left\{\frac{A_n}{\sqrt{i_n}\, a_n}\right\} \text{ п. н.}, \tag{3}$$

где $\gamma = \lim_{T\to\infty} \sup_{n > l \geqslant T} C_{l,n}/\sqrt{A_l A_n}$. (*Запись «п. н.» означает «почти наверное».*)

Следствие 1. *Пусть ограниченный массив* $\{\alpha_{n,k}\}$ *удовлетворяет условию* а) *или* б). *Предположим* $\gamma < 1$. *Тогда для того чтобы* $\frac{\sum_{k=1}^{i_n} \alpha_{n,k} X_k}{\sqrt{i_n}\, a_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ *п. н. необходимо и достаточно, чтобы*

$$\sum_n \exp\{-\varepsilon i_n a_n^2 / A_n^2\} < \infty \tag{4}$$

для всех $\varepsilon > 0$.

Следствие 2. *Пусть выполнены условия следствия* 1. *Тогда для того чтобы* $\limsup_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{i_n} \alpha_{n,k} X_k}{\sqrt{i_n}\, a_n} < \infty$ *п. н., необходимо и достаточно, чтобы* (4) *имело место для некоторого* $\varepsilon > 0$.

Теорема 2. *Пусть ограниченный массив* $\{\alpha_{n,k}\}$ *удовлетворяет условию* а) *или* б). *Предположим*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{i_n} \alpha_{n,k} X_h}{\sqrt{i_n}\, a_n} < \infty \text{ п. н.} \tag{5}$$

Тогда найдется такое неслучайное число $\beta \in [0, \infty)$, *что*

$$\mathrm{P}\left\{L\left\{\frac{\sum\limits_{k=1}^{i_n} \alpha_{n,k} X_k}{\sqrt{i_n}\, a_n}\right\} = [-\beta, \beta]\right\} = 1,$$

где $L\{\chi_n\}$ — *множество предельных точек вещественной последовательности* $\{\chi_n,\ n = 1,\ 2, \ldots\}$.

В случае $\alpha_{n,k} \equiv 1$ можно получить более полную информацию об осцилляционных свойствах сумм случайных величин. Теоремы 3—5 являются в некотором смысле уточнениями классических результатов Феллера [2]. Из теоремы 4 следует классический закон повторного логарифма Хартмана и Винтнера.

Теорема 3. *Положим* $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$. *Для того чтобы* $\frac{S_n}{a_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ *п. н., необходимо, чтобы для каждого* $c > 1$ *и достаточно, чтобы для некоторого* $c > 1$

$$\sum_k \exp\{-\varepsilon \min_{c^k \leqslant i < c^{k+1}} a_i^2/c^k\} < \infty \tag{6}$$

для любого $\varepsilon > 0$.

Теорема 4. *Для того чтобы* $\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{S_n}{a_n} < \infty$ *п. н., необходимо, чтобы для каждого* $c > 1$ *и достаточно, чтобы для некоторого* $c > 1$ *нашлось такое* $\varepsilon > 0$, *что* (6) *имело бы место.*

Теорема 5. *Для того чтобы* $\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{S_n}{a_n} = \beta$ *п. н.,* $\beta \neq 0$, $\beta \neq \infty$, *необходимо и достаточно, чтобы для любого* $\varepsilon > 0$ *нашлось* $c > 1$ *такое, что одновременно имеют место соотношения*

$$\begin{gathered}\sum_k \exp\{-(\beta+\varepsilon)^2 \min_{c^k \leqslant i < c^{k+1}} a_i^2/2c^k\} < \infty,\\ \sum_k \exp\{-(\beta-\varepsilon)^2 \min_{c^k \leqslant i < c^{k+1}} a_i^2/2c^k\} = \infty.\end{gathered} \tag{7}$$

Теорема 6. *Пусть* $\{a_n,\ n \geqslant 1\}$, — *как и раньше, последовательность ненулевых действительных чисел,* $|a_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$. *Тогда найдется такая неслучайная константа* $\beta \in [0, \infty]$, *что* $\mathrm{P}\left\{L\left\{\frac{S_n}{\sqrt{n}\, a_n}\right\} = [-\beta, \beta]\right\} = 1$.

Пусть $\{\xi_n,\ n \geqslant 1\}$ — совместно гауссовская последовательность (г. п.), $\mathrm{M}\xi_n = 0$. В дальнейшем $r_{l,n}$ будем использовать для обозначения коэффициента корреляции гауссовских случайных величин ξ_l и ξ_n, т. е. $r_{l,n} = \mathrm{M}\xi_l\xi_n/\sqrt{\mathrm{D}\xi_l \mathrm{D}\xi_n}$.

Определение 1. *Г. п.* $\{\xi_n,\ n \geqslant 1\}$ *называется слабозависимой, если* $\limsup\limits_{T\to\infty, n > l \geqslant T} r_{l,n} < 1$.

Доказательству теорем предпошлем лемму, представляющую и самостоятельный интерес.

Лемма. *Пусть* $\{\xi_n,\ n \geqslant 1\}$ — *гауссовская марковская последовательность (г. м. п.),* $\mathrm{M}\xi_n = 0$, $\mathrm{D}\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. *Предположим, что найдется подпоследовательность* $\{\xi_{n_k},\ k \geqslant 1\}$ *такая, что* 1) $\{\xi_{n_k},\ k \geqslant 1\}$ — *слабозависимая г. м. п.;* 2) $\liminf\limits_{k\to\infty} |r_{n_k, n_{k+1}}| \geqslant \Lambda > 0$. *Тогда* $\pi\{\beta_k\} \leqslant \limsup\limits_{n\to\infty} \xi_n \leqslant \Lambda^{-1}\pi\{\beta_k\}$ *п. н., где* $\beta_k^2 = \max\limits_{n_k \leqslant i < n_{k+1}} \mathrm{D}\xi_i$.

Доказательство леммы. Известно [5], что корреляционная матрица г. м. п. удовлетворяет равенству

$$r_{i,j} = r_{i,m} r_{m,j} \tag{8}$$

для любых $i \leqslant m \leqslant j$. Пусть $i(k)$ — наименьший индекс, удовлетворяющий соотношениям $n_k \leqslant i(k) < n_{k+1}$, $D\xi_{i(k)} = \beta_k^2$. Из (8) и условия 1) следует, что каждая из последовательностей $\{\xi_{i(k)},\ k=1, 3, 5, \ldots\}$, $\{\xi_{i(k)},\ k=2, 4, 6, \ldots\}$ — слабозависимая г. м. п. Тогда в силу теоремы 6 из [6] имеем

$$\limsup_{n\to\infty} \xi_n \geqslant \limsup_{k\to\infty} \xi_{i(k)} = \pi\{\beta_k\} \text{ п. н.} \tag{9}$$

Если $\pi\{\beta_k\} = \infty$, то лемма доказана. Пусть $\pi\{\beta_k\} < \infty$. По лемме 1 из [7] имеем $P\{\max\limits_{n_k \leqslant i < n_{k+1}} \xi_i > t\} \leqslant 8 \exp\{-t^2 r^2_{n_k, n_{k+1}} / 2\beta_k^2\} \leqslant 8 \exp\{-t^2 \times$ $\times (\Lambda - \delta)^2 / 2\beta_k^2\}$ для любого δ, $0 < \delta < \Lambda$, и всех достаточно больших k. Возьмем $t = (\pi\{\beta_k\} + \varepsilon)/(\Lambda - \delta)$, ε — произвольное положительное число. Тогда лемма Бореля — Кантелли и определение функционала $\pi\{\cdot\}$ приводят к неравенству $\limsup\limits_{n\to\infty} \xi_n \leqslant (\Lambda - \delta)^{-1} \pi\{\beta_k\}$ п. н. Устремляя δ к нулю и принимая во внимание (9), получаем утверждение леммы.

Д о к а з а т е л ь с т в а т е о р е м. В статье [1] показано, что можно построить последовательность $\{X_n,\ n \geqslant 1\}$ независимых случайных величин с общей функцией распределения $F(x)$, $MX_n = 0$, $DX_n = 1$ и последовательность независимых гауссовских случайных величин $\{Y_n,\ n \geqslant 1\}$, $MY_n = 0$, $DY_n = \sigma_n^2$ так, что

$$|S_n - T_n| = o(\sqrt{n}) \text{ п. н.,} \tag{10}$$

где $T_n = \sum\limits_{k=1}^{n} Y_k$, σ_n^2 определено равенством (1). Для доказательства сильной аппроксимации взвешенных сумм $\sum\limits_{k=1}^{i_n} \alpha_{n,k} X_k$ гауссовской последовательностью $\sum\limits_{k=1}^{i_n} \alpha_{n,k} Y_k$ достаточно ограничиться случаем $i_n = n$. Переход к общему случаю осуществляется выбором соответствующей подпоследовательности. Положим $Z_k = X_k - Y_k$, $U_n = \sum\limits_{k=1}^{n} Z_k$. Пусть выполнено условие а). Тогда

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \alpha_{n,k} X_k - \sum_{k=1}^{n} \alpha_{n,k} Y_k\right| = \left|\sum_{k=1}^{n-1} (\alpha_{n,k} - \alpha_{n,k+1}) U_k + \alpha_{nn} U_n\right| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{1\leqslant k\leqslant n} |U_k| \left(\sum_{k=1}^{n-1} |\alpha_{n,k} - \alpha_{n,k+1}| + |\alpha_{n,n}|\right) \leqslant$$

$$\leqslant \max_{1\leqslant k\leqslant n} |U_k| (3 \max_{1\leqslant k\leqslant n} |\alpha_{n,k}|) = o(\sqrt{n} a_n) \text{ п. н.} \tag{11}$$

Заметим, что

$$\pi\left\{\frac{A_n}{\sqrt{i_n} a_n}\right\} \leqslant \pi\left\{\frac{D_n}{\sqrt{i_n} a_n}\right\}. \tag{12}$$

Из неравенства (12), леммы Бореля — Кантелли и (11) следует (2). Если $\gamma < 1$, то г. п. $\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{i_n} \alpha_{n,k} Y_k}{\sqrt{i_n}\, a_n}$ будет слабозависимой. Воспользовавшись теоремой 5 из [6], убеждаемся в справедливости (3). Пусть выполнено условие (3). Следуя [3], последовательность перестановок $\{\tau^n_\cdot,\ n \geqslant 1\}$, в которой $\tau^n_\cdot$ — перестановка первых n натуральных чисел, называется последовательностью, сохраняющей порядок, если при $n \geqslant 2$ порядок появления чисел $1, 2, \ldots, n-1$ в цепочке $\{\tau_1^{n-1}, \ldots, \tau_{n-1}^{n-1}\}$ тот же, что и в цепочке $\{\tau_1^n, \ldots$ $\ldots, \tau_n^n\}$. Тогда можно определить перестановку, сохраняющую порядок так, что $\alpha_{n,\tau_1^n} \leqslant \alpha_{n,\tau_2^n} \leqslant \ldots \leqslant \alpha_{n,\tau_n^n}$ для каждого натурального n.

Отсюда

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\alpha_{n,k}Z_k\right| = \left|\sum_{k=1}^{n}\alpha_{n,\tau_k^n}Z_{\tau_k^n}\right| = \left|\sum_{k=1}^{n-1}(\alpha_{n,\tau_k^n}-\alpha_{n,\tau_{k+1}^n})U_{n,k}+\alpha_{n,\tau_n^n}U_{n,n}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{1\leqslant k\leqslant n}|U_{n,k}|(3\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\alpha_{n,k}|), \tag{13}$$

где $U_{n,k}=\sum_{i=1}^{k}Z_{\tau_i^n}$. Докажем, что

$$\max_{1\leqslant k\leqslant n}|U_{n,k}| = o(\sqrt{n}a_n) \text{ п. н.} \tag{14}$$

Из неравенства Чебышева имеем

$$\frac{|\mu U_n|}{\sqrt{n}} \leqslant \sqrt{\frac{2\mathrm{D}\,U_n}{n}} \leqslant 2. \tag{15}$$

где μX — медиана случайной величины X. Отсюда и из (10) следует $\limsup_{n\to\infty}\frac{|U_n-\mu U_n|}{\sqrt{n}}<\infty$ п. н. По теореме 5 из [8] получаем

$$\sum_n \mathrm{P}\{|U_{2^n}-U_{2^{n-1}}-\mu(U_{2^n}-U_{2^{n-1}})|>\sqrt{2^n}\varepsilon\}<\infty$$

для некоторого $\varepsilon>0$. Лемма Бореля — Кантелли и (15) влечет

$$\limsup_{n\to\infty}|U_{2^n}-U_{2^{n-1}}|\cdot 2^{-n/2}<\infty \text{ п. н.} \tag{16}$$

Из неравенства Леви и (15) имеем

$$\mathrm{P}\{W_m>2^{m/2}t\}\leqslant 2\mathrm{P}\{|U_{2^m}-U_{2^{m-1}}|>2^{m/2}t-(2\mathrm{D}(U_{2^m}-U_{2^{m-1}}))^{1/2}\}\leqslant$$

$$\leqslant 2\mathrm{P}\{|U_{2^m}-U_{2^{m-1}}|>2^{m/2}t-2^{m/2}\},$$

где $W_m=\max_{2^{m-1}<j\leqslant 2^m}|U_{2^m,j}-U_{2^{m-1}}|$. Вместе с (16) это дает

$$\limsup_{m\to\infty}|W_m|2^{-m/2}<\infty \text{ п. н.} \tag{17}$$

Если $2^{m-1}<n\leqslant 2^m$, то $\max_{1\leqslant k\leqslant n}|U_{n,k}|\leqslant\sum_{j=1}^{m}W_j$. Отсюда и из леммы 3 [9] выводим

$$\limsup_{n\to\infty}\max_{1\leqslant k\leqslant n}|U_{n,k}|2^{-n/2}\leqslant(\sqrt{2}+2)\limsup_{n\to\infty}|W_n|2^{-n/2} \text{ п. н.}$$

Тогда справедливость (14) следует из (17). Соотношения (12)—(14) и лемма Бореля—Кантелли доказывают (2). Теорема 5 из [6] и определение 1 приводят к выполнению (3). Теорема 1 доказана. Следствия 1 и 2 получаются из (12) и определения $\pi\{\cdot\}$.

Пусть имеет место (5). Тогда $\limsup_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{i_n}\alpha_{n,k}Y_k}{\sqrt{i_n}\,a_n}<\infty$ п. н. В этих условиях в [4] показано, что найдется $\beta\in[0,\infty)$ такое, что

$$\mathrm{P}\left\{L\left\{\frac{\sum_{k=1}^{i_n}\alpha_{n,k}Y_k}{\sqrt{i_n}\,a_n}\right\}=[-\beta,\beta]\right\}=1.$$

Теперь утверждение теоремы 2 очевидно.

Отметим, что при доказательстве теоремы 2 нельзя непосредственно воспользоваться идеями работы [4], поскольку неизвестно однозначно ли определяется величина, стоящая в левой части неравенства (2), ковариационной матрицей соответствующих взвешенных сумм. Поэтому применение сильной аппроксимации здесь принципиально.

Приступим к доказательству теорем 3—5. Предположим, что $\delta = \liminf_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{\sqrt{n}} < \infty$. Тогда из центральной предельной теоремы следует $\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{a_n} = \infty$ п. н. При этом $\sum_k \exp\{-\varepsilon \min_{c^k \leqslant i < c^{k+1}} a_i^2/2c^k\} = \infty$ для всех $\varepsilon > 0$, так как $\liminf_{k\to\infty} \min_{c^k \leqslant i < c^{k+1}} \frac{a_i^2}{2c^k} \leqslant \frac{c}{2} \liminf_{k\to\infty} \min_{c^k \leqslant i < c^{k+1}} \frac{a_i^2}{i} = \frac{c\delta}{2}$. Следовательно, для того чтобы $\limsup_{n\to\infty} S_n/a_n < \infty$ п. н., необходимо, чтобы $\delta = \infty$. Это же необходимо для выполнения соотношений (6) и (7). Итак, $\delta = \infty$. Обозначим $\xi_n = T_n/a_n$. Замечаем, что $\{\xi_n, n \geqslant 1\}$ — г. м. п. и $D\xi_n \to 0$. Выбираем подпоследовательность $\{\xi_{n_k}, k \geqslant 1\}$ по правилу $n_k = c^k$. Так как $\sigma_n^2 \underset{n\to\infty}{\to} 1$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется N такое, что для всех $n > N$ выполнено $1 - \varepsilon < \sigma_n^2 \leqslant 1$. Отсюда,

$$\sqrt{1-\varepsilon}\, c^{-1/2} \leqslant \liminf_{k\to\infty} |r_{n_k, n_{k+1}}| \leqslant \limsup_{k\to\infty} |r_{n_k, n_{k+1}}| \leqslant (1-\varepsilon)^{-1/2} c^{-1/2}.$$

Произвольность $\varepsilon > 0$ влечет

$$\lim_{k\to\infty} |r_{n_k, n_{k+1}}| = c^{-1/2}. \tag{18}$$

Очевидно неравенство

$$c^k [\min_{c^k \leqslant i < c^{k+1}} a_i^2]^{-1} \leqslant \beta_k^2 = \max_{c^k \leqslant i < c^{k+1}} \frac{i^2}{a_i^2} \leqslant c^{k+1} [\min_{c^k \leqslant i < c^{k+1}} a_i^2]^{-1}.$$

Соотношение (18) и лемма дают неравенство

$$\pi\left\{\frac{\sqrt{c^k}}{\min\limits_{c^k \leqslant i < c^{k+1}} |a_i|}\right\} \leqslant \pi\{\beta_k\} \leqslant \limsup_{n\to\infty} \xi_n \leqslant \sqrt{c}\pi\{\beta_k\} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{c}\pi\left\{\frac{\sqrt{c^{k+1}}}{\min\limits_{c^k \leqslant i < c^{k+1}} |a_i|}\right\} = c\pi\left\{\frac{\sqrt{c^k}}{\min\limits_{c^k \leqslant i < c^{k+1}} |a_i|}\right\} \text{ п. н.}$$

Вспоминая определение $\pi\{\cdot\}$ и возвращаясь к (10), завершаем доказательство теорем 3—5.

Если $\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{n}\, a_n} < \infty$ п. н., утверждение теоремы 6 следует из теоремы 2. Если $\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{n}\, a_n} = \infty$ п. н., то и $\limsup_{n\to\infty} \frac{T_n}{\sqrt{n} a_n} = \infty$ п. н., $D(T_n n^{-1/2} a_n^{-1}) \underset{n\to\infty}{\to} 0$. В заметке [10] показано, что тогда $L\left\{\frac{T_n}{\sqrt{n}\, a_n}\right\} = [-\infty, \infty]$ п. н. Теорема 6 доказана.

1. *Major P.* An improvement of Strassen's invariance principle.— Ann. Probab., 1979, 7, N 1, p. 55—61.
2. *Feller W.* The Law of the iterated logarithm for identically distributed random variables.— Ann. Math., 1946, 47, N 4, p. 631—638.
3. *Мартикайнен А. И.* О законе повторного логарифма для возмущенных и взвешенных сумм.— Теория вероятностей и ее применения, 1978, 23, № 2, с. 380—383.
4. *Булдыгин В. В., Солнцев С. А.* Об осцилляции реализаций ограниченных почти наверное гауссовских последовательностей.— Укр. мат. журн., 1985, 37, № 1, с. 110—111.

5. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения : В 2-х т.— М. : Мир, 1967.— Т. 2. 752 с.
6. *Булдыгин В. В.*, *Солнцев С. А.* Осцилляционные свойства гауссовских последовательностей.— В кн.: Вероятностный бесконечномерный анализ. Киев : Ин-т математики АН УССР, 1981, с. 15—29.
7. *Булдыгин В. В.*, *Солнцев С. А.* Об асимптотическом поведении гауссовской марковской последовательности.— В кн.: Некоторые вопросы теории случайных процессов. Киев : Ин-т математики АН УССР, 1982, с. 24—33.
8. *Мартикайнен А. И.* О необходимых и достаточных условиях для усиленного закона больших чисел.— Теория вероятностей и ее применения, 1979, 24, № 4, с. 814—820.
9. *Мартикайнен А. И.*, *Петров В. В.* О необходимых и достаточных условиях для закона повторного логарифма.— Там же, 1977, 22, № 1, с. 18—26.
10. *Солнцев С. А.* О плотной осцилляции гауссовской марковской последовательности.— Теория вероятностей и мат. статистика, 1983, вып. 28, с. 131—132.

Киев. ун-т

Получено 10.01.84,
после доработки — 05.03.85