УДК 519.41/47

С. Н. Черников

Факторизационный критерий локальной разрешимости локально конечных групп с условием минимальности для примарных подгрупп

Факторизационный критерий разрешимости конечных групп дает теорема Ф. Холла — Чунихина: Конечная группа тогда и только тогда разрешима, когда в ней дополняемы все ее силовские подгруппы.

С помощью этой теоремы ниже устанавливается, что локально конечная группа с конечными силовскими подгруппами тогда и только тогда локально разрешима, когда в ней дополняемы все ее силовские подгруппы (теорема 1). Затем с помощью этого результата получен аналогичный более общий результат для локально конечных групп, все силовские подгруппы которых удовлетворяют условию минимальности (теорема 2).

Под силовской подгруппой произвольной группы понимается, как обычно, максимальная примарная подгруппа последней.

1. Теорема 1. *Локально конечная группа $\mathfrak{G}$, все силовские подгруппы которой конечны, тогда и только тогда локально разрешима, когда каждая из них дополняема в $\mathfrak{G}$.*

Доказательство. Достаточность. Пусть в локально конечной группе $\mathfrak{G}$, все силовские подгруппы которой конечны, каждая из них дополняема. Пусть $\mathfrak{P}$ — какая-нибудь силовская подгруппа группы $\mathfrak{G}$ (обозначим через p соответствующее ей простое число) и $\mathfrak{D}$ — дополнение подгруппы $\mathfrak{P}$ в $\mathfrak{G}$. Нетрудно убедиться, что подгруппа $\mathfrak{D}$ не содержит элементов порядка p. В самом деле, пусть $\mathcal{P}$ — элемент порядка p из $\mathfrak{D}$ и $\langle \mathfrak{P}, \mathcal{P} \rangle$ — конечная подгруппа, порожденная элементами подгруппы $\mathfrak{P}$ и элементом $\mathcal{P}$. Подгруппа $\mathfrak{P}$ дополняема в $\mathfrak{G}$, а потому дополняема и в $\langle \mathfrak{P}, \mathcal{P} \rangle$, причем дополнением служит пересечение $\mathfrak{D}_1 = \langle \mathfrak{P}, \mathcal{P} \rangle \cap \mathfrak{D}$. Так как элемент $\mathcal{P}$ порядка p содержится в $\mathfrak{D}_1$, то порядок подгруппы $\mathfrak{D}_1$ делится на p. Но тогда порядок группы $\langle\mathfrak{P}, \mathcal{P}\rangle = \mathfrak{P}\mathfrak{D}_1$ делится на степень числа p, превышающую порядок подгруппы $\mathfrak{P}$. Однако это невозможно, так как по предположению $\mathfrak{P}$ — силовская подгруппа группы $\mathfrak{G}$, а значит, и силовская подгруппа группы $\langle\mathfrak{P}, \mathcal{P}\rangle$. Следовательно, подгруппа $\mathfrak{D}$ не содержит элементов порядка p.

Нетрудно убедиться также, что если q — какой-нибудь из простых делителей порядков элементов подгруппы $\mathfrak{D}$ (по доказанному $q \neq p$), то последняя содержит некоторую силовскую q-подгруппу из $\mathfrak{G}$. В самом деле, пусть $\mathfrak{Q}$ — силовская q-подгруппа группы $\mathfrak{G}$ и $\langle\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}\rangle$ — конечная подгруппа группы $\mathfrak{G}$, порожденная элементами подгрупп $\mathfrak{P}$ и $\mathfrak{Q}$. Дополнение $\langle\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}\rangle \cap \mathfrak{D}$ подгруппы $\mathfrak{P}$ в $\langle\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}\rangle$ имеет порядок, делящийся на порядок подгруппы $\mathfrak{Q}$. Поэтому подгруппа $\langle\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}\rangle \cap \mathfrak{D}$ группы $\mathfrak{D}$, а значит и группа $\mathfrak{D}$ содержит некоторую силовскую q-подгруппу группы $\mathfrak{G}$. Отсюда легко получается (ввиду сопряженности конечных силовских подгрупп локально конечной группы, соответствующих одному и тому же простому числу), что всякая силовская q-подгруппа группы $\mathfrak{D}$ является силовской подгруппой группы $\mathfrak{G}$. Таким образом, $\mathfrak{D}$ — холлова p'-подгруппа группы $\mathfrak{G}$.

Если $\mathfrak{N}$ — любой нормальный делитель из $\mathfrak{G}$, то подгруппа $\mathfrak{N}\mathfrak{D}/\mathfrak{N}$ будет холловой p'-подгруппой группы $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$. Это означает, в частности, что в любой конечной фактор-группе группы $\mathfrak{G}$ силовская p-подгруппа дополняема. Так как в качестве p можно взять любой из простых делителей порядков элементов группы $\mathfrak{G}$, то ввиду теоремы Ф. Холла—Чунихина отсюда следует разрешимость любой конечной фактор-группы группы $\mathfrak{G}$.

Пользуясь конечностью и дополняемостью силовских подгрупп группы $\mathfrak{G}$, установленным в самом начале доказательства свойством их дополнений, а также теоремой Пуанкаре о конечности индекса пересечения конечного числа подгрупп конечного индекса, можно показать, что для всякого отличного от единицы p-элемента группы $\mathfrak{G}$ найдется такой ее нормальный делитель конечного индекса, который не содержит отличных от единицы p-элементов. Отсюда вытекает, что для любой отличной от единицы конечной подгруппы $\mathfrak{F}$ группы $\mathfrak{G}$ найдется такой (не содержащий $\mathfrak{F}$) нормальный делитель $\mathfrak{K}$ группы $\mathfrak{G}$ конечного индекса в $\mathfrak{G}$, порядки всех элементов которого взаимно просты с порядком подгруппы $\mathfrak{F}$. Так как по доказанному фактор-группа $\mathfrak{G}/\mathfrak{K}$ разрешима, то разрешима и ее подгруппа $\mathfrak{K}\mathfrak{F}/\mathfrak{K}$, а значит, и изоморфная последней подгруппа $\mathfrak{F}$. Отсюда следует локальная разрешимость группы $\mathfrak{G}$.

Необходимость. Покажем, что в локально конечной локально разрешимой группе $\mathfrak{G}$ дополняема любая конечная силовская подгруппа. Пусть $\mathfrak{P}$ — конечная силовская p-подгруппа такой группы $\mathfrak{G}$. Обозначим через S систему всех конечных подгрупп $\mathfrak{G}_c$ группы $\mathfrak{G}$, содержащих подгруппу $\mathfrak{P}$. В подгруппе $\mathfrak{G}_\alpha$ выделим (конечную) систему S_α дополнений подгруппы $\mathfrak{P}$. Если $\mathfrak{G}_\beta \supset \mathfrak{G}_\alpha$ и $\mathfrak{D}_\beta$ — какое-нибудь дополнение подгруппы $\mathfrak{P}$ в $\mathfrak{G}_\beta$, то пересечение $\mathfrak{G}_\alpha \cap \mathfrak{D}_\beta$ совпадает с некоторым дополнением подгруппы $\mathfrak{P}$ в $\mathfrak{G}_\alpha$. На этой основе определяется отображение (проекция) конечного множества S_β в S_α. Пользуясь этими отображениями и связанным с ними методом проекций (см. [1]), легко убеждаемся в том, что подгруппа $\mathfrak{P}$ дополняема в $\mathfrak{G}$. Отсюда вытекает необходимость условия теоремы. Теорема 1 доказана.

Отметим следующее предложение, полученное во второй части ее доказательства.

Предложение 1. *В локально конечной локально разрешимой группе дополняема каждая конечная силовская подгруппа.*

2. С помощью предложения 1 получается следующее более общее предложение.

Предложение 2. *В локально конечной локально разрешимой группе $\mathfrak{G}$ дополняема каждая силовская подгруппа с условием минимальности, имеющая подгруппу конечного индекса, инвариантную в $\mathfrak{G}$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{P}$ — силовская p-подгруппа группы $\mathfrak{G}$, удовлетворяющая условиям доказываемого предложения, и $\mathfrak{R}$ — ее полная часть (т. е. максимальная полная абелева подгруппа). Из того, что подгруппа $\mathfrak{P}$ имеет подгруппу конечного индекса, инвариантную в $\mathfrak{G}$, следует, что подгруппа $\mathfrak{R}$ инвариантна в $\mathfrak{G}$. Очевидно, $\mathfrak{P}/\mathfrak{R}$ — конечная силовская подгруппа группы $\mathfrak{G}/\mathfrak{R}$. В силу предложения 1 подгруппа $\mathfrak{P}/\mathfrak{R}$ дополняема в $\mathfrak{G}/\mathfrak{R}$. Обозначая через $\mathfrak{D}/\mathfrak{R}$ ее дополнение, запишем соотношения

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{P}\mathfrak{D} \text{ и } \mathfrak{P} \cap \mathfrak{D} = \mathfrak{R},$$

выражающие ее дополняемость в $\mathfrak{G}/\mathfrak{R}$. Пользуясь дополняемостью силовской подгруппы $\mathfrak{P}/\mathfrak{R}$ группы $\mathfrak{G}/\mathfrak{R}$ в $\mathfrak{G}/\mathfrak{R}$, нетрудно убедиться, что $\mathfrak{R}$ является силовской p-подгруппой группы $\mathfrak{D}$. В самом деле, иначе в $\mathfrak{D}$ существует не входящий в $\mathfrak{R}$ p-элемент $\mathcal{F}$. Но тогда в конечной группе $\langle \mathfrak{P}/\mathfrak{R}, \mathcal{P}\mathfrak{R}/\mathfrak{R}\rangle$, порожденной в $\mathfrak{G}/\mathfrak{R}$ элементами подгруппы $\mathfrak{P}/\mathfrak{R}$ и элементом $\mathcal{P}\mathfrak{R}/\mathfrak{R}$, подгруппа $\mathfrak{P}/\mathfrak{R}$ будет иметь дополнение, содержащее нетривиальный p-элемент $\mathcal{P}\mathfrak{R}/\mathfrak{R}$; таким дополнением будет пересечение

$$\langle \mathfrak{P}/\mathfrak{R}, \mathcal{P}\mathfrak{R}/\mathfrak{R}\rangle \cap \mathfrak{D}/\mathfrak{R}.$$

Однако это невозможно, так как $\mathfrak{P}/\mathfrak{R}$ — силовская p-подгруппа группы $\mathfrak{G}/\mathfrak{R}$. Следовательно, $\mathfrak{R}$ — силовская p-подгруппа группы $\mathfrak{D}$.

Централизатор $\mathfrak{C}$ подгруппы $\mathfrak{R}$ в $\mathfrak{D}$ имеет в $\mathfrak{D}$ конечный индекс (см. [2], следствие 1. 15). Пусть $\mathfrak{H}$ — (конечная) подгруппа, порожденная элементами группы $\mathfrak{D}$, взятыми по одному в каждом смежном классе группы $\mathfrak{D}$ по подгруппе $\mathfrak{C}$. Тогда $\mathfrak{D} = \mathfrak{C}\mathfrak{H}$. В силу теоремы Шура инвариантное в $\mathfrak{H}$ пересечение $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{H}$ дополняемо в $\mathfrak{H}$. Если $\overline{\mathfrak{H}}$ — его дополнение в $\mathfrak{H}$ (оно не содержит элементов порядка p), то

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{C}\mathfrak{H} = \mathfrak{C}\overline{\mathfrak{H}}.$$

Покажем теперь, что подгруппа $\mathfrak{R}$ дополняема в $\mathfrak{C}$. Пусть $\mathfrak{C}_\alpha$ — любая содержащая $\mathfrak{R}$ подгруппа из $\mathfrak{C}$, в которой подгруппа $\mathfrak{R}$ имеет конечный индекс. Тогда $\mathfrak{C}_\alpha = \mathfrak{R} \times \overline{\mathfrak{C}}_\alpha$ и подгруппа $\overline{\mathfrak{C}}$, порожденная всеми $\overline{\mathfrak{C}}_\alpha$, будет дополнением подгруппы $\mathfrak{R}$ в $\mathfrak{C}$, причем $\mathfrak{C} = \mathfrak{R} \times \overline{\mathfrak{C}}$.

Подгруппа $\overline{\mathfrak{C}}$ является. очевидно, характеристической подгруппой инвариантной в $\mathfrak{D}$ подгруппы $\mathfrak{C}$ и потому инвариантна в $\mathfrak{D}$. Но тогда произведение $\overline{\mathfrak{C}}\overline{\mathfrak{H}}$ будет группой и из соотношения $\mathfrak{D} = \mathfrak{C}\overline{\mathfrak{H}}$ следует

$$\mathfrak{D} = (\mathfrak{R} \times \overline{\mathfrak{C}})\,\overline{\mathfrak{H}} = \mathfrak{R} \leftthreetimes (\overline{\mathfrak{C}}\overline{\mathfrak{H}}) = \mathfrak{R} \leftthreetimes \overline{\mathfrak{D}},$$

где через $\overline{\mathfrak{D}}$ обозначена группа $\overline{\mathfrak{C}}\overline{\mathfrak{H}}$. Следовательно, подгруппа $\mathfrak{R}$ дополняема в $\mathfrak{D}$. Но тогда из соотношений $\mathfrak{G} = \mathfrak{P}\mathfrak{D}$ и $\mathfrak{P} \cap \mathfrak{D}$ вытекает

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{P}(\mathfrak{R} \leftthreetimes \overline{\mathfrak{D}}) = (\mathfrak{P}\mathfrak{R})\,\overline{\mathfrak{D}} = \mathfrak{P}\overline{\mathfrak{D}}, \quad \mathfrak{P} \cap \overline{\mathfrak{D}} = 1.$$

Следовательно, подгруппа $\mathfrak{P}$ дополняема в $\mathfrak{G}$. Предложение 2 доказано.

3. Лемма. *Если некоторая силовская p-подгруппа локально конечной группы $\mathfrak{G}$ имеет подгруппу конечного индекса, инвариантную в $\mathfrak{G}$, то любые две силовские p-подгруппы группы $\mathfrak{G}$ сопряжены.*

Доказательство. Пусть силовская p-подгруппа $\mathfrak{P}$ группы $\mathfrak{G}$ имеет подгруппу $\mathfrak{H}$ конечного индекса, инвариантную в $\mathfrak{G}$. Тогда конечная группа $\mathfrak{P}/\mathfrak{H}$ является силовской p-подгруппой группы $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$. Ввиду локальной конечности группы $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ отсюда следует, что она не имеет бесконечных p-подгрупп и что любая ее силовская p-подгруппа сопряжена с подгруппой $\mathfrak{P}/\mathfrak{H}$. Поэтому для любых двух силовских p-подгрупп $\mathfrak{P}_1$ и $\mathfrak{P}_2$ группы $\mathfrak{G}$ (они, очевидно, содержат подгруппу $\mathfrak{H}$) силовские p-подгруппы $\mathfrak{P}_1/\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{P}_2/\mathfrak{H}$ группы $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ сопряжены в $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ и, значит, в $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ существует такой элемент $\mathfrak{H}X$, что

$$\mathfrak{H}X^{-1}\mathfrak{P}_2\mathfrak{H}X = \mathfrak{P}_1.$$

Так как $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{P}_2$, то отсюда следует соотношение

$$X^{-1}\mathfrak{P}_2X = \mathfrak{P}_1,$$

показывающее, что подгруппы $\mathfrak{P}_1$ и $\mathfrak{P}_2$ сопряжены в $\mathfrak{G}$. Лемма доказана.

Теорема 2. *Локально конечная группа, все силовские подгруппы которой удовлетворяют условию минимальности, тогда и только тогда локально разрешима, когда каждая ее силовская подгруппа дополняема в ней.*

Доказательство. Необходимость. Пусть локально конечная группа $\mathfrak{G}$, все силовские подгруппы которой удовлетворяют условию минимальности, локально разрешима. Тогда в силу соответствующего результата М. И. Каргаполова (см. [3], следствие 8.7) группа $\mathfrak{G}$ является расширением инвариантной в ней слойно-конечной полной абелевой подгруппы с помощью группы, все силовские подгруппы которой конечны. Ясно, что для каждой силовской подгруппы группы $\mathfrak{G}$ выполняются требования предложения 2 и поэтому каждая из них дополняема в $\mathfrak{G}$.

Достаточность. Отметим сначала, что локально конечная группа $\mathfrak{G}$, в которой все силовские подгруппы удовлетворяют условию минимальности, имеет локально разрешимый нормальный делитель конечного индекса (см. [4—6]). В силу указанного результата из [3] этот нормальный делитель является расширением инвариантной в нем слойно-конечной полной абелевой подгруппы $\mathfrak{H}$ с помощью группы, все силовские подгруппы которой конечны. Подгруппа $\mathfrak{H}$ является его характеристической подгруппой и поэтому инвариантна в $\mathfrak{G}$, причем все силовские подгруппы фактор-группы $\mathfrak{G}/\mathfrak{K}$, очевидно, конечны.

Будем предполагать, что все силовские подгруппы группы $\mathfrak{G}$ дополняемы в $\mathfrak{G}$. Пусть $\mathfrak{P}$ — произвольная силовская подгруппа группы $\mathfrak{G}$ и p — соответствующее ей простое число. По предположению подгруппа $\mathfrak{P}$ дополняема в $\mathfrak{G}$ и, значит, существует такая подгруппа $\mathfrak{D}$, что

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{P}\mathfrak{D}, \quad \mathfrak{P} \cap \mathfrak{D} = 1.$$

Нетрудно убедиться, что подгруппа $\mathfrak{D}$ не содержит отличных от единицы p-элементов. В самом деле, пусть $\mathcal{P}$ — p-элемент из $\mathfrak{D}$. Тогда ввиду сопряженности силовских p-подгрупп группы $\mathfrak{G}$ (см. лемму) силовская p-подгруппа группы $\mathfrak{G}$, содержащая элемент $\mathcal{P}$, сопряжена с подгруппой $\mathfrak{P}$. Поэтому для некоторого элемента H группы $\mathfrak{G}$ выполняется соотношение

$$H^{-1}\mathcal{P}H \in \mathfrak{P}.$$

Но $H = \mathcal{D}F$, где $F \in \mathfrak{P}$ и $\mathcal{D} \in \mathfrak{D}$. Поэтому предыдущее соотношение приводится к виду

$$F^{-1}\mathcal{D}^{-1}\mathcal{P}\mathcal{D}F \in \mathfrak{P}.$$

Отсюда получаем

$$\mathcal{D}^{-1}\mathcal{P}\mathcal{D} \in F\mathfrak{P}F^{-1} = \mathfrak{P}.$$

Так как $\mathcal{D}^{-1}\mathcal{P}\mathcal{D} \in \mathfrak{D}$, то имеем

$$\mathcal{D}^{-1}\mathcal{P}\mathcal{D} \in \mathfrak{P} \cap \mathfrak{D} = 1.$$

Следовательно, $\mathcal{P} = 1$.

Из того, что подгруппа $\mathfrak{D}$ не содержит элементов порядка p, вытекает, что элементов порядка p не содержит и фактор-группа $\mathfrak{D}\mathfrak{K}/\mathfrak{K}$. Но тогда ввиду очевидного соотношения

$$\mathfrak{G}/\mathfrak{K} = \mathfrak{P}\mathfrak{K}/\mathfrak{K} \cdot \mathfrak{D}\mathfrak{K}/\mathfrak{K}$$

подгруппа $\mathfrak{D}\mathfrak{K}/\mathfrak{K}$ будет дополнением p-подгруппы $\mathfrak{P}\mathfrak{K}/\mathfrak{K}$ в $\mathfrak{G}/\mathfrak{K}$. Из дополняемости подгруппы $\mathfrak{P}\mathfrak{K}/\mathfrak{K}$ в $\mathfrak{G}/\mathfrak{K}$ следует, что $\mathfrak{P}\mathfrak{K}/\mathfrak{K}$ — силовская p-подгруппа группы $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$. В самом деле, в противном случае в $\mathfrak{G}/\mathfrak{K}$ существует p-подгруппа $\mathfrak{S}/\mathfrak{K}$, содержащая подгруппу $\mathfrak{P}\mathfrak{K}/\mathfrak{K}$ и отличная от последней. Так как подгруппа $\mathfrak{P}\mathfrak{K}/\mathfrak{K}$ дополняема в $\mathfrak{G}/\mathfrak{K}$, то она дополняема и в содержащей ее подгруппе $\mathfrak{S}/\mathfrak{K}$, причем пересечение $\mathfrak{S}/\mathfrak{K} \cap \mathfrak{D}\mathfrak{K}/\mathfrak{K}$ будет ее дополнением. Однако это пересечение не может содержать элементов порядка p. Получается противоречие. Следовательно, $\mathfrak{P}\mathfrak{K}/\mathfrak{K}$ — силовская p-подгруппа группы $\mathfrak{G}/\mathfrak{K}$.

Таким образом, для каждого простого числа p в группе $\mathfrak{G}/\mathfrak{R}$ существует дополняемая силовская подгруппа. Так как любые две силовские p-подгруппы группы $\mathfrak{G}/\mathfrak{R}$ сопряжены в ней, то отсюда ввиду произвольности числа p вытекает, что в $\mathfrak{G}/\mathfrak{R}$ дополняемы все силовские подгруппы. Но тогда ввиду локальной конечности группы $\mathfrak{G}/\mathfrak{R}$ и конечности всех ее силовских подгрупп она локально разрешима (см. теорему 1). Так как $\mathfrak{R}$ — абелев нормальный делитель группы $\mathfrak{G}$, то отсюда вытекает локальная разрешимость группы $\mathfrak{G}$. Теорема доказана.

1. *Курош А. Г.* Теория групп.— М.: Наука, 1967.— 648 с.
2. *Черников С. Н.* Группы с заданными свойствами системы подгрупп.— М.: Наука, 1980.— 384 с.
3. *Черников С. Н.* Условия конечности в общей теории групп.— Успехи мат. наук, 1959, **14**, вып. 5 (89), с. 45—96.
4. *Павлюк И. И., Шунков В. П.* О локально конечных группах с условием min—p по всем p.— В кн.: VII Всесоюз. симпоз. по теории групп : Тез. докл. Красноярск : Изд-во Краснояр. ун-та, 1980, с. 84—85.
5. *Беляев В. В.* Локально конечные группы с черниковскими силовскими p-подгруппами.— Алгебра и логика, 1981, **20**, № 6, с. 605—619.
6. *Черников Н. С.* О бесконечных простых локально конечных группах.—Киев, 1982.— 20 с.— (Препринт / АН УССР, Ин-т математики; 82.37).

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 30.04.85