УДК 517.94

Р. В. Бобрик

О бескумулянтном замыкании моментных уравнений для решения системы линейных дифференциальных уравнений со случайно возмущенными коэффициентами

Рассматривается система линейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$du_{i_1}(t)/dt = \sum_{i_2=1}^{N} \alpha_{i_1 i_2}(t)\, u_{i_2}(t) + \sum_{i_2=1}^{N} \xi_{i_1 i_2}(t)\, u_{i_2}(t),\quad t > 0, \tag{1}$$

$$u_{i_1}(0) = u_{i_1 0},\quad i_1 = \overline{1, N}. \tag{2}$$

Здесь t принадлежит конечному интервалу I, а гауссовские случайные процессы $\xi_{i_1 i_2}(t)$, $i_1, i_2 = \overline{1, N}$, имеют нулевое среднее значение и корреляционные функции $B_{i_1, i_2, i_3, i_4}(t_1, t_2) = M[\xi_{i_1 i_2}(t_1)\, \xi_{i_3 i_4}(t_2)]$, $i_1, \ldots, i_4 = \overline{1, N}$, которые удовлетворяют условию

$$\max_{i_1, i_2 = \overline{1, N}} \sum_{i_3, i_4 = 1}^{N} |B_{i_1, i_2, i_3, i_4}(t_1, t_2)| \leqslant \beta \exp\{-\alpha |t_1 - t_2|\} \tag{3}$$

для всех значений $t_1, t_2 \in I$ и некоторых значений $\alpha > 0$ и $\beta \geqslant 0$. Предполагается, что неслучайные коэффициенты $a_{i_1 i_2}(t)$, $i_1, i_2 = \overline{1, N}$, непрерывны на I, начальные условия неслучайны.

Рассмотрим соответствующую системе (1), (2) систему интегральных уравнений

$$u_{i_1}(t) = \sum_{i_2=1}^{N} \int_0^t a_{i_1 i_2}(t_1) u_{i_2}(t_1)\, dt_1 +$$

$$+ \sum_{i_2=1}^{N} \int_0^t \xi_{i_1 i_2}(t_1) u_{i_2}(t_1)\, dt_1 + u_{i_1 0}, \ t \in I, \ i_1 = \overline{1, N}. \tag{4}$$

Выполнение условия (3) обеспечивает с вероятностью единица интегрируемость в квадрате на конечном интервале выборочных функций случайных коэффициентов, а отсюда следует существование и единственность с вероятностью 1 решения системы (1), (2), во всяком случае, тогда, когда под ним понимать решение системы (4) [1, с. 26], что в дальнейшем имеется в виду.

Из [1, с. 26] следует, что

$$\sum_{i_1=1}^{N} |u_{i_1}(t) - u_{i_1 0}|^2 \leqslant \exp\left\{2 \int_0^t \left(\sum_{i_1, i_2=1}^{N} (\xi_{i_1 i_2}(t_1) + a_{i_1 i_2}(t_1))^2 \right)^{1/2} dt_1 \right\} \leqslant$$

$$\leqslant e^{t/\varepsilon} \exp\left\{2\varepsilon \sum_{i_1, i_2=1}^{N} \int_0^t (\xi_{i_1 i_2}^2(t_1) + a_{i_1 i_2}^2(t_1))\, dt_1 \right\}, \ \varepsilon > 0.$$

Выбором ε всегда можно добиться [2], чтобы $M \exp\left\{2\varepsilon \sum_{i_1, i_2=1}^{N} \int_0^t \xi_{i_1 i_2}^2(t_1) dt_1 \right\} < < \infty$, а значит, у компонент решения системы (1), (2) существуют моменты произвольного порядка.

Из системы (4) непосредственно получаем для среднего значения ее решения бесконечную цепочку систем интегральных уравнений

$$Mu_{i_1}(t) = \sum_{i_2=1}^{N} \int_0^t a_{i_1 i_2}(t_1) Mu_{i_2}(t_1)\, dt_1 +$$

$$+ \sum_{i_2=1}^{N} \int_0^t M[\xi_{i_1 i_2}(t_1) u_{i_2}(t_1)]\, dt_1 + u_{i_1 0}, \ i_1 = \overline{1, N},$$

$$M[\xi_{i_1 i_2}(\tau_1) \ldots \xi_{i_k i_{k+1}}(\tau_k) u_{i_{k+1}}(t_k)] = \sum_{i_{k+2}=1}^{N} \int_0^{t_k} a_{i_{k+1} i_{k+2}}(t_{k+1}) \times \tag{5}$$

$$\times M[\xi_{i_1 i_2}(\tau_1) \ldots \xi_{i_k i_{k+1}}(\tau_k) u_{i_{k+2}}(t_{k+1})]\, dt_{k+1} +$$

$$+ \sum_{i_{k+2}=1}^{N} \int_0^{t_k} M[\xi_{i_1 i_2}(\tau_1) \ldots \xi_{i_k i_{k+1}}(\tau_k) \xi_{i_{k+1} i_{k+2}}(t_{k+1}) u_{i_{k+2}}(t_{k+1})]\, dt_{k+1} +$$

$$+ u_{i_{k+1} 0} M[\xi_{i_1 i_2}(\tau_1) \ldots \xi_{i_k i_{k+1}}(\tau_k)], \ t, \tau_1, \ldots, \tau_k \in I, \ k = 1, 2, 3, \ldots.$$

Чтобы для среднего значения решения системы (1), (2) можно было получать количественные результаты, нужно уметь проводить редукцию (замыкание) бесконечной цепочки (5) к конечной системе уравнений. Известно несколько методов замыкания (см. обзоры в [3, 4]), и одним из основных является метод, который, следуя работе [5], будем называть бескумулянтным.

Его сущность состоит в том, что для получения замкнутой системы уравнений для среднего значения решения системы (1), (2) в n-й системе цепочки (5) приравниваются нулю кумулянтные функции (семиинварианты) $\varkappa_{1,\ldots,1}(\xi_{i_1 i_2}(\tau_1), \ldots, \xi_{i_{n-1} i_n}(\tau_{n-1}), \xi_{i_n i_{n+1}}(t_n), u_{i_{n+1}}(t_n))$, $i_1, \ldots, i_{n+1} = \overline{1, N}$, что позволяет моментные функции $M[\xi_{i_1 i_2}(\tau_1) \ldots$

$\ldots \xi_{i_{n-1} i_n}(\tau_{n-1}) \xi_{i_n i_{n+1}}(t_n) u_{i_{n+1}}(t_n)]$, $i_1, \ldots, i_{n+1} = \overline{1, N}$, выразить через моментные функции низшего порядка. Соответствующее приближение для среднего значения решения системы (1), (2) будем называть n-м бескумулянтным приближением.

Цель настоящей работы — исследование сходимости и получение оценок погрешности бескумулянтных приближений.

Отметим, что в приложениях наиболее часто применяются второе и третье приближения, называемые соответственно приближением Бурре [6, с. 154] и эксцессным приближением [7]. Первое бескумулянтное приближение совпадает со средним значением решения системы линейных стохастических дифференциальных уравнений со стохастическими интегралами в смысле Ито [1, с. 245].

Бескумулянтные приближения можно получить и для моментов произвольного порядка решения системы (1), (2), так как из этой системы следует, что процессы $u_{i_1}(t) \ldots u_{i_m}(t)$, $i_1, \ldots, i_m = \overline{1, N}$, также удовлетворяют системе линейных дифференциальных уравнений с гауссовскими коэффициентами. Поэтому дальнейшие исследования будем проводить только для среднего значения решения системы (1), (2).

Пусть $X(t, \tau) = (x_{i_1 i_2}(t, \tau);\ i_1, i_2 = \overline{1, N})$ — матрица Коши детерминированной ($\xi_{i_1 i_2}(t) \equiv 0$; $i_1, i_2 = \overline{1, N}$) системы (1) и предположим, что существуют такие постоянные $b \geqslant 0$, a, что

$$\| X(t, \tau) \| = \sum_{i_1, i_2 = 1}^{N} | x_{i_1 i_2}(t, \tau) | \leqslant b \exp\{-a(t - \tau)\}. \tag{6}$$

Обозначим через $g_{i_1 n}(t)$, $i_1 = \overline{1, N}$, n-е бескумулянтное приближение для среднего значения системы (1), (2), а через $D_j^{(k)}(\sigma)$, $j \leqslant k$, $j, k = 0, 1, 2, \ldots$, — цепные дроби

$$D_j^{(k)}(\sigma) = 1 - \cfrac{d_j(\sigma)}{1 - \cfrac{d_{j+1}(\sigma)}{1 - \cfrac{}{\ddots - d_k(\sigma)}}}, \quad d_m(\sigma) = \frac{mb^2\beta}{(\sigma + a + (m-1)\alpha)(\sigma + a + m\alpha)},$$

$$m = \overline{j, k},$$

где σ — действительный параметр.

Теорема. *Предположим, что выполняются условия* (3), (6), *а* σ *удовлетворяет неравенствам*

$$\sigma > -a, \quad \max_{j=1,2,3,\ldots} d_j(\sigma) = c, \quad c \in [0, 1/4]. \tag{7}$$

Тогда

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{t \in I} \sum_{i_1 = 1}^{N} e^{-\sigma t} | Mu_{i_1}(t) - g_{i_1 n}(t) | = 0$$

и имеет место оценка

$$\sup_{t \in I} \sum_{i_1=1}^{N} | Mu_{i_1}(t) - g_{i_1 n}(t) | e^{-\sigma t} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{n!\,(2b)^{n+1}(b\beta)^n \sum_{i_1=1}^{N} | u_{i_1 0} |}{(1 + \sqrt{1 - 4c})^{n+1} \prod_{j=1}^{n} (\sigma + a + (j-1)\alpha)(\sigma + a + j\alpha) \prod_{j=0}^{n-1} D_j^{(n-1)}(\sigma)}. \tag{8}$$

Покажем сначала справедливость соотношения

$$\varkappa_{1,\ldots,1}(\xi_{i_1 i_2}(\tau_1), \ldots, \xi_{i_n i_{n+1}}(\tau_n), u_{i_{n+1}}(t_n)) =$$

$$= \int_0^{t_n} \ldots \int_0^{t_n} \prod_{k=1}^{n} \sum_{j_k, m_k=1}^{N} B_{i_k, i_{k+1}, j_k, m_k}(\tau_k, s_k)\, M \left[\frac{\delta^n u_{i_{n+1}}(t_n)}{\delta\xi_{j_1 m_1}(s_1) \ldots \delta\xi_{j_n m_n}(s_n)} \right] ds_1 \ldots ds_n, \quad (9)$$

где $\dfrac{\delta^n u_{i_{n+1}}(t_n)}{\delta\xi_{j_1 m_1}(s_1) \ldots \delta\xi_{j_n m_n}(s_n)}$ — вариационная производная n-го порядка компоненты $u_{i_{n+1}}(t_n)$ решения системы (1), (2).

Пусть

$$\psi_{i_{n+1}}(t_n, z; v_{j_1 j_2}(\tau);\ j_1, j_2 = \overline{1, N}) = M \exp \Bigg\{ iz u_{i_{n+1}}(t_n) +$$

$$+ \sum_{j_1, j_2=1}^{N} \int_0^T \xi_{j_1 j_2}(\tau)\, v_{j_1 j_2}(\tau)\, d\tau \Bigg\},\ [0, T] \subset I,\ i_{n+1} = \overline{1, N}.$$

Из теоремы Гренандера об абсолютной сходимости гауссовых мер при сдвиге в гильбертовом пространстве [8, с. 40] следует, что

$$\exp \Bigg\{ \sum_{j_1, j_2=1}^{N} \int_0^T y_{j_1 j_2}(\tau)\, v_{j_1 j_2}(\tau)\, d\tau - \frac{1}{2} \sum_{j_1, j_2, k_1, k_2=1}^{N} \int_0^T \int_0^T B_{j_1, j_2, k_1, k_2}(\tau_1, \tau_2) \times$$

$$\times v_{j_1 j_2}(\tau_1)\, v_{k_1 k_2}(\tau_2)\, d\tau_1 d\tau_2 \Bigg\} \quad (10)$$

есть плотность гауссовой меры, заданной в пространстве $L_2^{N^2}[0, T] = L_2[0, T] \times \overset{(N^2)}{\ldots} \times L_2[0, T]$ и соответствующей матрице $(\xi_{j_1 j_2}(\tau);\ j_1, j_2 = \overline{1, N})$ при сдвиге на матрицу $\left(\sum_{k_1, k_2=1}^{N} \int_0^T B_{j_1, j_2, k_1, k_2}(\tau, \tau_1)\, v_{k_1 k_2}(\tau_1)\, d\tau_1;\ j_1, j_2 = \overline{1, N} \right)$. Так как компоненты $u_{i_{n+1}}(t_n;\ \xi_{j_1 j_2}(\tau);\ j_1, j_2 = \overline{1, N})$ решения системы (1), (2) являются почти наверное аналитическими функционалами от коэффициентов, что следует из почти наверное сходимости метода последовательных приближений для решения системы (4), то существуют вариационные производные в правой части формулы (9).

Из системы (4) следует также, что эти производные удовлетворяют системе уравнений с гауссовскими коэффициентами. Отсюда следует существование средних значений в правой части формулы (9), что можно доказать таким же образом, как доказывалось существование моментов решения системы (1), (2).

Из (10) следует

$$\psi_{i_{n+1}}(t_n, z; v_{j_1 j_2}(\tau);\ j_1, j_2 = \overline{1, N}) = \exp \Bigg\{ \frac{1}{2} \sum_{j_1, j_2, k_1, k_2=1}^{N} \int_0^T \int_0^T B_{j_1, j_2, k_1, k_2}(\tau_1, \tau_2) \times$$

$$\times v_{j_1 j_2}(\tau_1)\, v_{k_1 k_2}(\tau_2)\, d\tau_1 d\tau_2 \Bigg\} M \exp \Bigg\{ iz u_{i_{n+1}} \Bigg(t_n;\ \xi_{j_1 j_2}(\tau) +$$

$$+ \sum_{k_1, k_2=1}^{N} \int_0^T B_{j_1, j_2, k_1, k_2}(\tau, \tau_1)\, v_{k_1 k_2}(\tau_1)\, d\tau_1 \Bigg) \Bigg\},$$

а отсюда, учитывая определение кумулянтных функций, получаем

$$\varkappa_{1,\dots 1}(\xi_{i_1 i_2}(\tau_1), \dots , \xi_{i_n i_{n+1}}(\tau_n), u_{i_{n+1}}(t_n)) =$$

$$= \frac{1}{i} \frac{\partial \delta^n \ln \psi_{i_{n+1}}(t_n, z, v_{i_1 i_2}(\tau); j_1 j_2 = \overline{1, N})}{\partial z \delta v_{i_1 i_2}(\tau_1) \dots \delta v_{i_n i_{n+1}}(\tau_n)} \Bigg|_{z=0, v_{j_1 j_2}=0, j_1, j_2 = \overline{1,N}} =$$

$$= M \left[\frac{\delta^n u_{i_{n+1}}\left(t_n; \xi_{j_1 j_2}(\tau) + \sum_{k_1, k_2 = 1}^{N} \int_0^T B_{j_1, j_2 k_1, k_2}(\tau, \tau_1) \times v_{k_1 k_2}(\tau_1)\, d\tau_1;\ j_1, j_2 = \overline{1, N}\right)}{\delta v_{i_1 i_2}(\tau_1) \dots \delta v_{i_n i_{n+1}}(\tau_n)} \right] \Bigg|_{v=0} =$$

$$= \int_0^{t_n} \dots \int_0^{t_n} \prod_{k=1}^{n} \sum_{j_k, m_k = 1}^{N} B_{i_k, i_{k+1}, j_k, m_k}(\tau_k, s_k)\, M \left[\frac{\delta^n u_{i_{n+1}}(t_n)}{\delta \xi_{j_1 m_1}(s_1) \dots \delta \xi_{j_n m_n}(s_n)} \right] ds_1 \dots ds_n.$$

Отметим, что при $N = 1$ формула (9) приведена в [6, с. 55].

Переходя к доказательству теоремы, преобразуем цепочку (5) в более удобный для дальнейшего анализа вид. Пусть $\varphi_j^{(0)}(t) = Mu_j(t)$, $\varphi_j^{(m-1)}(t, j_1, j_2, s_1, \dots , j_{m-1}, j_m, s_{m-1}) = M \left[\frac{\delta^{m-1} u_j(t)}{\delta \xi_{j_1 j_2}(s_1) \dots \delta \xi_{j_{m-1} j_m}(s_{m-1})} \right]$, $j_1, \dots , j_m = \overline{1, N}$.

Из системы (4), представляя средние $M[\xi_{i_1 i_2}(t_1)\, u_{i_2}(t_1)]$, $i_1, i_2 = \overline{1, N}$, по формуле (9) при $n = 1$, получаем для среднего значения ее решения незамкнутую систему уравнений, в которую в качестве новых неизвестных будут входить средние значения вариационных производных первого порядка от компонент решения системы (1), (2). Применяя операцию вариационного дифференцирования к систем (4), для этих производных получаем систему линейных интегральных уравнений. Заметим, что представление (9) имеет место и тогда, когда вместо $u_{i_{n+1}}(t_n)$ в формулу (9) подставить $\frac{\delta^m u_{i_{n+1}}}{\delta \xi_{k_1 n_1}(z_1) \dots \delta \xi_{k_m n_m}(z_m)}$, $m = 1, 2, 3, \dots$, $k_1, n_1, \dots , k_m, n_m = \overline{1, N}$.

Поэтому в уравнения для средних значений вариационных производных первого порядка от компонент решения системы (1), (2) будут входить в качестве новых неизвестных средние значения вариационных производных второго порядка от компонент решения системы (1), (2). Продолжая этот процесс, получаем бесконечную цепочку систем уравнений для среднего значения решения системы (1), (2):

$$Mu_{i_1}(t) = u_{i_1 0} + \sum_{i_1=1}^{N} \int_0^t a_{i_1 i_2}(t_1)\, Mu_{i_2}(t_1)\, dt_1 +$$
$$+ \sum_{i_2=1}^{N} \int_0^t \int_0^{t_1} \sum_{j_1, j_2 = 1}^{N} B_{i_1, i_2, j_1, j_2}(t_1, s_1)\, \varphi_{i_2}(t_1, j_1, j_2, s_1)\, ds_1 dt_1,\quad i_1 = \overline{1, N},$$
$$\varphi_{i_m}^{(m-1)}(t_{m-1}, j_1, j_2, s_1, \dots , j_{m-1}, j_m, s_{m-1}) = \tag{11}$$
$$= \sum_{i_{m+1}=1}^{N} \int_0^{t_{m-1}} a_{i_m i_{m+1}}(t_m)\, \varphi_{i_{m+1}}^{(m-1)}(t_m, j_1, j_2, s_1, \dots , j_{m-1}, j_m, s_{m-1})\, dt_m +$$
$$+ \sum_{i_{m+1}=1}^{N} \int_0^{t_{m-1}} \int_0^{t_m} \sum_{j_m, j_{m+1}=1}^{N} B_{i_m, i_{m+1}, j_m, j_{m+1}}(t_m, s_m)\, \varphi_{i_{m+1}}^{(m)}(t_m, j_1, j_2, s_1, \dots$$
$$\dots , j_m, j_{m+1}, s_m)\, ds_m dt_m + \sum_{k=1}^{m-1} \varphi_{i_{k+1}}^{(m-2)}(s_k, j_1, j_2, s_1, \dots , j_{k-1}, j_k, s_{k-1},$$
$$j_{k+1}, j_{k+2}, s_{k+1}, \dots , j_{m-1}, j_m, s_{m-1}),\ s_1 \leqslant t_{m-1}, \dots , s_{m-1} \leqslant t_{m-1},\quad m = 2, 3, \dots .$$

Цепочка уравнений (11) имеет то существенное преимущество по сравнению с цепочкой (5), что, как следует из формулы (9), замыкание цепочки (11) в n-й ее системе путем приравнивания нулю функций $\varphi^{(n)}_{i_{n+1}}(t_n, j_1, j_2, s_1, \ldots, j_n, j_{n+1}, s_n)$ эквивалентно приравниванию нулю кумулянтных функций $\varkappa_{1,\ldots,1}(\xi_{j_1 j_2}(t_1), \ldots, \xi_{j_n i_{n+1}}(t_n), u_{i_{n+1}}(t_n))$, $j_1, \ldots, j_{n+1}, i_{n+1} = \overline{1, N}$, т. е. бескумулянтному методу замыкания цепочки (5).

Отметим, что для линейного обыкновенного дифференциального уравнения высшего порядка с гауссовскими коэффициентами цепочка уравнений, аналогичная цепочке (11), получена в [9], но общая процедура получения такого рода цепочек впервые предложена в [10].

Пусть функции $\varphi^{(k-1)}_{i_k n}(t_{k-1}, j_1, j_2, s_1, \ldots, j_{k-1}, j_k, s_{k-1})$ совпадают с функциями $\varphi^{(k-1)}_{i_k}(t_{k-1}, j_1, j_2, s_1, \ldots, j_{k-1}, j_k, s_{k-1})$, которые определяются из цепочки (11) при условии, что для ее замыкания в n-й ее системе приравнены нулю функции $\varphi^{(n)}_{i_{n+1}}(t_n, j_1, i_2, s_1, \ldots, j_n, j_{n+1}, s_n)$, $j_1, \ldots, j_{n+1}, i_{n+1} = \overline{1, N}$, $k \leqslant n$.

Введем следующие обозначения:

$$\delta^{(0)}_{nm} = \sup_{t \in I} \sum_{i_1=1}^{N} e^{-\sigma t} |g_{i_1 n}(t) - g_{i_1 m}(t)|, \quad \gamma^{(0)}_m = \sup_{t \in I} \sum_{i_1=1}^{N} e^{-\sigma t} |g_{i_1 m}(t)|,$$

$$\delta^{(k)}_{nm} = \sup_{t_k \in I} \max_{j_1, \ldots, j_{k+1} = \overline{1,N}} \exp\{-t_k(\sigma + k\alpha)\} \int_0^{t_k} \ldots \int_0^{t_k} \exp\{\alpha s_1 + \ldots + \alpha s_k\} \times$$

$$\times \sum_{i_{k+1}=1}^{N} |\varphi^{(k)}_{i_{k+1} n}(t_k, j_1, j_2, s_1, \ldots, j_k, j_{k+1}, s_k) - \varphi^{(k)}_{i_{k+1} m}(t_k, j_1, j_2, s_1, \ldots$$

$$\ldots, j_k, j_{k+1}, s_k)| \, ds_1 \ldots ds_k, \quad \gamma^{(k)}_m = \sup_{t_k \in I} \max_{j_1, \ldots, j_{k+1} = \overline{1,N}} \exp\{-t_k(\sigma + k\alpha)\} \times$$

$$\times \int_0^{t_k} \ldots \int_0^{t_k} \exp\{\alpha s_1 + \ldots + \alpha s_k\} \sum_{i_{k+1}=1}^{N} |\varphi^{(k)}_{i_{k+1} m}(t_k, j_1, j_2, s_1, \ldots$$

$$\ldots, j_k, j_{k+1}, s_k)| \, ds_1 \ldots ds_k, \quad k = \overline{1, m-1}, \quad n < m,$$

где σ — действительный параметр.

Из системы (11), учитывая условия теоремы, получаем неравенства

$$\delta^{(0)}_{nm} \leqslant \frac{b\beta}{a + \sigma} \delta^{(1)}_{nm}, \quad \delta^{(j)}_{am} \leqslant \frac{b\beta}{a + \sigma + j\alpha} \delta^{(j+1)}_{nm} + \frac{jb}{a + \sigma + j\alpha} \delta^{(j-1)}_{nm}, \quad j = \overline{1, n-2},$$

$$\delta^{(n-1)}_{nm} \leqslant \frac{b\beta}{a + \sigma + (n-1)\alpha} \gamma^{(n)}_m + \frac{(n-1)b}{a + \sigma + (n-1)\alpha} \delta^{(n-2)}_{nm},$$

$$\gamma^{(0)}_m \leqslant \frac{b\beta}{a + \sigma} \gamma^{(1)}_m + b \sum_{i_1=1}^{N} |u_{i_1 0}|, \tag{12}$$

$$\gamma^{(j)}_m \leqslant \frac{b\beta}{a + \sigma + j\alpha} \gamma^{(j+1)}_m + \frac{jb}{a + \sigma + j\alpha} \gamma^{(j-1)}_m, \quad j = \overline{1, m-2},$$

$$\gamma^{(m-1)}_m \leqslant \frac{b(m-1)}{a + \sigma + (m-1)\alpha} \gamma^{(m-2)}_m.$$

Если выполняется условие (7), то из теоремы Ворпитского по аналитической теории цепных дробей [11, с. 42; 12] следует, что $D_j^{(k)}(\sigma) > 0$, $i \leqslant k$, $j, k = 0, 1, 2, 3, \ldots$. С учетом этого из неравенств (12) получаем

$$\delta_{nm}^{(j)} \leqslant \frac{(b\beta)^{n-j}\gamma_m^{(n)}}{\prod_{k=1}^{n-1}(a+\sigma+k\alpha)\prod_{k=j+1}^{n-1}D_k^{(n-1)}(\sigma)} + \frac{jb\delta_{nm}^{(j-1)}}{(a+\sigma+j\alpha)D_{j+1}^{(n-1)}(\sigma)},$$

$$j = \overline{1, n-2}, \tag{13}$$

$$\delta_{nm}^{(0)} \leqslant \frac{(b\beta)^n\gamma_m^{(n)}}{\prod_{j=0}^{n-1}(a+\sigma+j\alpha)D_j^{(n-1)}(\sigma)}, \tag{14}$$

$$\gamma_m^{(n)} \leqslant \frac{n!\,b^{n+1}\sum_{i_1=1}^{N}|u_{i_10}|}{\prod_{j=1}^{n}(a+\sigma+j\alpha)\prod_{j=1}^{n+1}D_j^{(m-1)}(\sigma)}. \tag{15}$$

Из теоремы Ворпитского следует $|D_j^{(k)}(\sigma)| \geqslant \frac{1}{2}(1+\sqrt{1-4c})$, $j \leqslant k$. Поэтому из неравенств (13) — (15) следует, что существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} g_{i_1n}(t)$, $i_1 = \overline{1, N}$, $t \in I$, удовлетворяющей цепочке (11) и оценке (8).

Для доказательства единственности решения цепочки (11) введем банахово пространство Y_σ, элементами которого являются последовательности функций $\varphi_j^{(m-1)}(t, i_1, i_2, s_1, \ldots, i_{m-1}, i_m, s_{m-1})$, $i_1, \ldots, i_m$, $j = \overline{1, N}$, с нормой

$$\|\varphi\|_\sigma = \sup_{t\in I}\sup_{m=1,2,3,\ldots}\max_{j_1,\ldots,j_m=\overline{1,N}}\sum_{j=1}^{N}\exp\{-t(\sigma+(m-1)\alpha)\}\times$$

$$\times\int_0^t\ldots\int_0^t\exp\{\alpha s_1+\ldots+\alpha s_{m-1}\}|\varphi_j^{(m-1)}(t, j_1, j_2, s_1, \ldots$$

$$\ldots, j_{m-1}, j_m, s_{m-1})|\,ds_1\ldots ds_{m-1}.$$

Цепочку уравнений (11) запишем как линейное уравнение в этом пространстве $\varphi = F\varphi + g$, $g = (u_{10}, \ldots, u_{N0}, 0, \ldots)$. Учитывая условия теоремы, непосредственной проверкой убеждаемся, что $\|F^2\|_\sigma < 1$, а значит, в силу принципа сжимающих отображений цепочка (11) имеет единственное решение.

1. *Хасьминский Р. З.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров.— М. : Наука, 1969 — 365 с.
2. *Fernique X.* Intégrabilité des vecteurs gaussiens.— C. r. Acad. sci. A, 1970, **270**, N 7, p. 1698—1699.
3. *Кореневский Д. Г.* Моментные уравнения и проблема их замыкания для дифференциальных уравнений со случайными коэффициентами. I. Случай стационарных процессов с дробно-рациональной спектральной плотностью — Киев, 1973.— 38 с.— (Препринт/АН УССР, Ин-т математики; № 73.4).
4. *Richardson J. M.* Application of truncated hierarchy techniues.— Proc. Symp. Appl. Math., 1964, **16**, p. 290—302.
5. *Крейчнан Р. Х.* Проблема замыкания в теории турбулентности.—В кн.: Гидродинамическая неустойчивость. М. : Изд-во иностр. лит., 1964, с. 231—264.
6. *Кляцкин В. И.* Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах.— М. : Наука, 1980.— 336 с.
7. *Малахов А. Н., Музычук О. В.* О высших приближениях уравнения Дайсона для среднего поля.— Изв. вузов. Радиофизика, 1976, **19**, № 2, с. 202—213.
8. *Янович Л. А.* Приближенное вычисление континуальных интегралов по гауссовым мерам.— Минск : Наука и техника, 1976.— 384 с.

9. *Музычук О. В.* К построению точного решения уравнения Дайсона для средней функции Грина.— Теорет.и мат. физика, 1976, 28, № 3, с. 371—380.
10. *Кляцкин В. И., Татарский В. И.* Приближение диффузионного случайного процесса в некоторых нестационарных статистических задачах физики.— Успехи физ. наук, 1973, **110**, № 4, с. 499—536.
11. *Wall H. S.* Analytic theory of continued fraction.— New. York, 1948.— 433 p.
12. *Боднар Д. И.* Аналог признака сходимости Ворпитского для ветвящихся цепных дробей.— В кн.: Математический сборник. Киев : Наук. думка, 1976, с. 40—43.

Ин-т прикл. пробл. механики и математики
АН УССР, Львов

Получено 16.11.84