УДК 519.21

Н. С. Братийчук

Положение процесса с независимыми приращениями в момент выхода из интервала

Пусть $\xi(t)$, $t \geqslant 0$, $\xi(0)=0$, — однородный процесс с независимыми приращениями с характеристической функцией

$$Me^{-s\xi(t)} = e^{tk(s)},$$

где

$$k(s) = s^2 b/2 - as - \int_{-\infty}^{\infty} (e^{-sx} - 1 + sx/(1+x^2))\,\Pi\{dx\}.$$

Для фиксированных T, x, $0 < x < T$, положим $\tau_x^T = \inf\{t : \xi(t) \overline{\in} \overline{\in}(-x, T-x)\}$. В предположении, что процесс $\xi(t)$ имеет скачки только в одну сторону, распределение случайной величины $\xi(\tau_x^T)$ хорошо изучено (см., например, [1 — 4]). Так, в работах [2 — 4] в предположении $\Pi\{[x,\infty]\}=0$, $x>0$, получены явные формулы для вероятностей $P\{\xi(\tau_x^T) < z\}$, $z \leqslant -x$, $P\{\xi(\tau_x^T) = T-x\}$. Указанные результаты обобщены в [5] для случая, когда $\Pi\{[x,\infty]\}$, $x>0$, — экспоненциальный полином по x. В настоящей статье мы получим явные представления для функций $P\{\xi(\tau_x^T) < z\}$, $z \leqslant -x$, $P\{\xi(\tau_x^T) > T - x + u\}$, $u \geqslant 0$, при гораздо более слабых ограничениях на исходный процесс.

1. В дальнейшем предполагается, что выполнены условия:

А) $M\xi^2(1) = b + \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \Pi\{dx\} < \infty$;

Б) $M\xi(1) = m \neq 0$.

Введем необходимые для дальнейшего изложения обозначения. Пусть τ^x, γ^x (τ_{-x}, γ_{-x}), $x \geqslant 0$, — соответственно момент первого достижения и величина перескока уровня $x(-x)$ процессом $\xi(t)$;

$$\Gamma_+(\lambda, x, y) = M\{e^{-\lambda\tau^x}, \gamma^x < y\}, \quad \Gamma_-(\lambda, x, y) = M\{e^{-\lambda\tau_{-x}}, \gamma_{-x} < y\};$$

θ_λ — показательно распределенная с параметром λ случайная величина, независящая от $\xi(t)$;

$$\xi^+(t) = \sup_{0 \leqslant u \leqslant t} \xi(u), \quad \xi^-(t) = \inf_{0 \leqslant u \leqslant t} \xi(u);$$

$$F_+(\lambda, x) = P\{\xi^+(\theta_\lambda) < x\}, \qquad F_-(\lambda, x) = P\{\xi^-(\theta_\lambda) < x\};$$

$$\Phi(\lambda, x, y) = P\{\xi^+(\theta_\lambda) < x, \xi(\theta_\lambda) < y\};$$

$$M(x) = \Pi\{[-\infty, -x]\}, \quad x > 0; \qquad N(x) = \Pi\{[x, \infty]\}, \quad x > 0.$$

Доказательство основного результата основывается на свойствах функций $F_\pm(\lambda, x)$, $\Phi(\lambda, x, y)$ при $\lambda \downarrow 0$. При этом различают случаи $m > 0$ и $m < 0$. Вследствие полной аналогии рассмотрим только один из них, например первый.

Итак, пусть $m > 0$. Прежде всего заметим, что для любого фиксированного $x > 0$ $P\{\tau_{-x} < \infty\} = q_x < 1$, $P\{\tau^x < \infty\} = 1$ (см., например, [6]). Далее, из результатов работы [7] (см. также [8, с. 446]) следует

$$\Gamma_+(\lambda, x, y) = Me^{-\lambda\tau^x} - \lambda^{-1} \int_{-0}^{x+0} \int_{-\infty}^{-0} N(x - z + y - t)\, dF_-(\lambda, t)\, dF_+(\lambda, z),$$

$$\Gamma_-(\lambda, x, y) = Me^{-\lambda\tau_{-x}} - \lambda^{-1} \int_{-x}^{+0} \int_{-0}^{\infty} M(y + x + z + t)\, dF_+(\lambda, t)\, dF_-(\lambda, z), \qquad (1)$$

$$\Phi(\lambda, x, y) = \lambda^{-1} F_+(\lambda, y) + \lambda^{-1} \int_y^x F_-(\lambda, y - z)\, dF_+(\lambda, z), \quad y < x.$$

Лемма 1. *При* $m>0$ *справедливы следующие утверждения:*

1) *случайная величина* $\xi^- = \xi^-(\infty)$ *имеет собственное распределение* $F_-(x) = P\{\xi^- < x\}$;

2) *определена функция* $F_+(x) = \int\limits_0^\infty P\{\xi^+(t) < x\}\, dt$, *причем* $\lim\limits_{x\to\infty} x^{-1}F_+(x) = 1/m$;

3) *существует такая постоянная* $C>0$, *что* $F_+(x) \leqslant C(x+1)$, $x \geqslant 0$.

Доказательство. Утверждение 1 хорошо известно (см., например, [6]). Утверждение 3 очевидным образом следует из 2 и монотонности $F_+(x)$ по x.

Первая часть утверждения 2 следует из того, что при $m>0$ и фиксированном $x>0$ $M\tau^x < \infty$, а $F_+(x) = \int\limits_0^\infty P\{\xi^+(t) < x\}\, dt = M\tau^x$. Для доказательства второй части воспользуемся формулой [9]

$$\lim_{\lambda\downarrow 0} \lambda^{-1} \int\limits_{-0}^\infty e^{-sx} dF_+(\lambda, x) = [\psi(s)]^{-1} c, \tag{2}$$

где $c = \int\limits_0^\infty e^{-u} M\tau^u du < \infty$; $\psi(s) = t^{-1}\ln Me^{-s\xi^*(t)}$; $\xi^*(t)$, $t \geqslant 0$, $\xi^*(0) = 0$, — монотонно возрастающий процесс с независимыми приращениями. В работе [9] установлено, что

$$\psi(s) = msc \int\limits_0^\infty e^{-sx} dQ(x). \tag{3}$$

Здесь $Q(x)$ — собственная функция распределения, $Q(x) = \lim\limits_{u\to\infty} P\{\gamma^u < x\}$. Очевидно, $\lambda^{-1}F_+(\lambda, x) \uparrow F_+(x)$ при $\lambda \downarrow 0$, и по теореме Лебега о монотонной сходимости имеем

$$\lim_{\lambda\downarrow 0} \lambda^{-1} \int\limits_{-0}^\infty e^{-sx} dF_+(\lambda, x) = \lim_{\lambda\downarrow 0} \left(-\lambda^{-1}F_+(\lambda, +0) + s\int\limits_0^\infty e^{-sx}(\lambda^{-1}F_+(\lambda, x))\, dx\right) =$$

$$= -F_+(+0) + s\int\limits_0^\infty e^{-sx} F_+(x)\, dx = \int\limits_{-0}^\infty e^{-sx} dF_+(x).$$

Отсюда с учетом (2), (3) получаем

$$\int\limits_{-0}^\infty e^{-sx} dF_+(x) = \left(ms\int\limits_0^\infty e^{-sx} dQ(x)\right)^{-1}. \tag{4}$$

Если через $\omega(s)$ обозначить правую часть равенства (4), то $\lim\limits_{\tau\downarrow 0} \omega(\tau s)/\omega(s) = 1/s$. Поэтому из (4) и тауберовой теоремы ([10, с. 510]) следует $F_+(x) \sim x/m$, $x \to \infty$. Лемма доказана.

Из соотношений (1) при $\lambda \downarrow 0$ с учетом леммы 1 имеем

$$\Gamma_+(x, y) = \lim_{\lambda\downarrow 0} \Gamma_+(\lambda, x, y) = 1 - \int\limits_{-0}^{x+0}\int\limits_{-\infty}^{0} N(x - z + y - t)\, dF_-(t)\, dF_+(z),$$

$$\Gamma_-(x, y) = \lim_{\lambda\downarrow 0} \Gamma_-(\lambda, x, y) = q_x - \int\limits_{-x}^{+0}\int\limits_{-0}^{\infty} M(y + x + z + t)\, dF_+(t)\, dF_-(z), \tag{5}$$

$$\Phi(x, y) = \lim_{\lambda\downarrow 0} \lambda^{-1}\Phi(\lambda, x, y) = F_+(y) + \int\limits_y^x F_-(y - z)\, dF_+(z), \quad y < x.$$

Лемма 2. *При* $T > 0$

$$\sup_{x \geqslant 0} \int_0^\infty y \Gamma_-(T + x, dy) < \infty.$$

Доказательство. Используя свойство функции $M(x)$ ($M(x_1) > M(x_2)$ при $x_1 < x_2$) и представление для $\Gamma_-(T + x, y)$, находим

$$\int_0^\infty y\Gamma_-(T + x, dy) = -\int_{-T-x}^{+0} \int_{-0}^{\infty}\int_0^\infty y dy M(T + x + y + z + t)\, dF_+(t)\, dF_-(z) =$$

$$= \int_{-T-x}^{+0} \int_{-0}^{\infty}\int_0^\infty M(T + x + y + z + t)\, dy dF_+(t)\, dF_-(z) \leqslant \int_{-0}^{\infty} \int_{T+t}^{\infty} M(y)\, dy dF_+(t) =$$

$$= \int_{-0}^\infty F_+(t) M(T + t)\, dt - F(+0) \int_T^\infty M(y)\, dy < \infty.$$

Последнее неравенство следует из леммы 1 и того, что $\int\limits_0^\infty tM(T + t)\, dt < \infty$ при $T > 0$.

2. Теорема. *При* $z \leqslant -x$, $u \geqslant 0$ *имеют место следующие представления:*

$$P\{\xi(\tau_x^T) < z\} = \int_{-x}^{T-x} M(x + y - z)\, dH(T, x, y),$$

$$P\{\xi(\tau_x^T) > T + u\} = \int_{-x}^{T-x} N(T + u - x - y)\, dH(T, x, y),$$

где

$$H(T, x, y) = \Phi(T - x, y) -$$

$$-\sum_{n=0}^\infty \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty \Gamma_-(x, du_1)\Gamma_+(T + u_1, du_2) \ldots \Gamma_-(T + u_{2n}, du_{2n+1}) \times$$

$$\times \Phi(T + u_{2n+1}, y + x + u_{2n+1}) + \sum_{n=0}^\infty \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty \Gamma_+(T - x, du_1)\Gamma_-(T + u_1, du_2) \times$$

$$\times \Gamma_+(T + u_2, du_3) \ldots \Gamma_-(T + u_{2n}, du_{2n+2}) \Phi(T + u_{2n+2}, y + x + u_{2n+2}). \qquad (6)$$

Доказательство. Прежде всего покажем, что ряды в (6) сходятся равномерно по y при $-x \leqslant y \leqslant T - x$. Ввиду полной аналогии рассмотрим только первый из них. Обозначим через $\mathcal{J}_n$ общий член этого ряда. Очевидно, $\mathcal{J}_n \geqslant 0$.

Пусть $m > 0$. Тогда из представления для $\Phi(x, y)$ и леммы 1 следует оценка $\Phi(x, y) \leqslant F_+(x) \leqslant C(x + 1)$, $x \geqslant 0$. Используя лемму 2, получаем

$$\int_0^\infty \Gamma_+(T + u, du_1) \int_0^\infty \Gamma_-(T + u_1, du_2)\Phi(T + u_2, y + x + u_2) \leqslant$$

$$\leqslant C\int_0^\infty \Gamma_+(T + u_1, du_1) \int_0^\infty (T + u_2 + 1)\Gamma_-(T + u_1, du_2) \leqslant$$

$$\leqslant C\left(T + 1 + \sup_{u_1 \geqslant 0} \int_0^\infty u_2\Gamma_-(T + u_1, du_2)\right) = M < \infty. \qquad (7)$$

Очевидно, при $x > 0$ $P\{\tau_{-T-x} < \infty\} \leqslant P\{\tau_{-T} < \infty\} = q_T < 1$. Поэтому

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \Gamma_+(T + u, du_1)\Gamma_-(T + u_1, du_2) \leqslant q_T. \qquad (8)$$

Теперь из (7) и (8) легко следует оценка $0 \leqslant \mathcal{I}_n \leqslant q_T^{n-1} M$, которая доказывает требуемое.

Далее, в [11] получены представления

$$M\{e^{-\lambda\tau_x^T}, \xi(\tau_x^T) < z\} = \lambda^{-1} \int_{-x}^{T-x} M(x+y+z)\, dH_\lambda(T, x, y),$$

$$M\{e^{-\lambda\tau_x^T}, \xi(\tau_x^T) > T - x + u\} = \lambda^{-1} \int_{-x}^{T-x} N(T+u-x-y)\, dH_\lambda(T, x, y), \quad (9)$$

где

$$H_\lambda(T, x, y) = \Phi(\lambda, T-x, y) - \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} \Gamma_-(\lambda, x, du_1) \times$$

$$\times \Gamma_+(\lambda, T+u_1, du_2) \dots \Gamma_-(\lambda, T+u_{2n}, du_{2n+1}) \Phi(\lambda, T+u_{2n+1}, y+x+u_{2n+1}) +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} \Gamma_+(\lambda, T-x, du_1) \Gamma_-(\lambda, T+u_1, du_2) \times \dots$$

$$\dots \times \Gamma_-(\lambda, T+u_{2n+1}, du_{2n+2}) \Phi(\lambda, T+u_{2n+2}, y+x+u_{2n+2}). \quad (10)$$

Пусть $\mathcal{I}_n(\lambda)$ — общий член первого ряда в (10). Очевидно, $\lambda^{-1}\mathcal{I}_n(\lambda) \geqslant 0$ при $\lambda > 0$. Поэтому

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{I}_n = \sum_{n=0}^{\infty} \varliminf_{\lambda \downarrow 0} \lambda^{-1} \mathcal{I}_n(\lambda) \leqslant \varliminf_{\lambda \downarrow 0} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-1} \mathcal{I}_n(\lambda) \leqslant$$

$$\leqslant \varlimsup_{\lambda \downarrow 0} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-1} \mathcal{I}_n(\lambda) \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \varlimsup_{\lambda \downarrow 0} \lambda^{-1} \mathcal{I}_n(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{I}_n.$$

Отсюда следует $\lim_{\lambda \downarrow 0} \lambda^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{I}_n(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{I}_n$. Аналогичный результат справедлив и для второго ряда в (10). Таким образом, $\lim_{\lambda \downarrow 0} \lambda^{-1} H_\lambda(T, x, y) = H(T, x, y)$. Теперь из (9) при $\lambda \downarrow 0$ следует доказательство теоремы.

1. *Боровков А. А.* Вероятностные процессы в теории массового обслуживания.— М. : Наука, 1972.— 368 с.
2. *Печерский Е. А.* Некоторые тождества, связанные с выходом случайного блуждания из отрезка и полуинтервала.— Теория вероятностей и ее применения, 1974, **19**, № 1, с. 104—119.
3. *Королюк В. С., Супрун В. Н., Шуренков В. М.* Метод потенциала в граничных задачах для процессов с независимыми приращениями и скачками одного знака.— Там же, 1976, **21**, № 2, с. 253—259.
4. *Королюк В. С.* Граничные задачи для сложных пуассоновских процессов.— Киев : Наук. думка, 1975.— 138 с.
5. *Братийчук Н. С.* Граничные задачи для случайных процессов с независимыми приращениями.— В кн. : Асимптотические задачи для случайных процессов. Киев, 1977, с. 3—27. (Препринт / АН УССР, Ин-т математики ; 77-24).
6. *Рогозин Б. А.* О распределении некоторых функционалов, связанных с граничными задачами для процессов с независимыми приращениями.— Теория вероятностей и ее применения, 1966, **11**, № 4, с. 656—670.
7. *Гусак Д. В., Королюк В. С.* Распределение функционалов от однородных процессов с независимыми приращениями.— Теория вероятностей и мат. статистика, 1970, вып. 1, с. 55—73.
8. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Теория случайных процессов : В 3-х т.— М. : Наука, 1973.— Т. 2. 636 с.
9. *Могульский А. А.* О величине первого перескока для процесса с независимыми приращениями.— Теория вероятностей и ее применения, 1976, **21**, № 3, с. 486—496.
10. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения : В 2-х т.— М. : Мир, 1967.—Т. 2. 752 с.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 05.10.84