УДК 519.41/47

И. Я. Субботин

Группы, разложимые в квазицентрализаторное произведение

Квазицентрализатором подгруппы A в группе G называется подгруппа $Q(A)$ группы G, совпадающая с пересечением нормализаторов в G всех подгрупп из A (см., например, [1]).

Определение (С. Н. Черников). *Группу G будем называть квазицентрализаторным произведением подгруппы A на подгруппу B, если G является произведением этих подгрупп и $B \subset Q(A)$, т. е. B нормализует все подгруппы из A.*

В работе [2] группы G, содержащие нормальный делитель A, все подгруппы которого в G инвариантны, названы квазицентральными расширениями с ядром A. Произвольная группа G такого рода, очевидно, представима в виде произведения ядра A и некоторой подгруппы B, порожденной представителями всех смежных классов группы G по A. Отсюда следует, что понятие квазицентрализаторного произведения существенно обобщает понятие квазицентрального расширения. В качестве примеров групп, разложимых в квазицентрализаторное произведение с нетривиальными множителями, можно указать непериодические группы, в которых инвариантны все бесконечные абелевы подгруппы [3], периодические группы, разложимые в равномерное произведение своих силовских подгрупп [4], произвольные группы, в которых инвариантны все подгруппы коммутанта [5], разрешимые группы с условием транзитивности для нормальных делителей [6] и др.

В предлагаемой работе изучаются периодические группы, разложимые в квазицентрализаторное произведение с локально нильпотентными и абелевыми множителями.

Лемма 1. *Пусть G — периодическая группа, разложимая в квазицентрализаторное произведение неабелевой локально нильпотентной примарной группы A на локально нильпотентную группу B. Тогда группа G сама локально нильпотентна.*

Доказательство. Локально нильпотентная периодическая группа B разложима в прямое произведение своих силовских подгрупп. Покажем, что группа G также разложима в прямое произведение своих силовских подгрупп. Отсюда в силу периодичности группы G будет следовать локальная нильпотентность последней (см., например, [7]).

Предположим, что b — произвольный элемент из силовской q-подгруппы группы B. Число q выберем отличным от простого числа p, соответствующего примарной группе A (если B — p-группа, то лемма очевидна). Рассмотрим группу $K = A \leftthreetimes \langle b \rangle$. Напомним, что автоморфизм группы называется степенным, если относительно него допустимы все подгруппы группы [6]. Элемент b индуцирует на A степенной автоморфизм и потому он централизует ее коммутант A' [8]. Пусть теперь x — произвольный элемент подгруппы A и пусть $|x| = p^n$. Если $x \in A'$, то $[x, b] = 1$. Предположим, что $x \notin A'$ и обозначим через z элемент $x^{p^{n-1}}$. Пусть y— некоторый элемент порядка p из A'. Рассмотрим группу $T = \langle y, z \rangle$, Если T — абелева группа, то в силу соотношения $[b, y] = 1$ из леммы 4.1.1. работы [6] $[b, z] = 1$. Если же T — неабелева нильпотентная группа (A — локально конечная p-группа), то группа ее степенных автоморфизмов является p-группой [9]. Поэтому и в этом случае $[b, z] = 1$. Таким образом, элемент b централизует все подгруппы порядка p из A. Следовательно, $x^{p^{n-1}} \in Z(\langle x, b \rangle)$. Предположим, что $b^{-1}\ xb = x^{\beta}$. Тогда $\beta \equiv 1\ (p)$. Из этого сравнения следует нильпотентность группы $\langle x, b \rangle$. Поэтому $[x, b] = 1$. Отсюда в силу выбора произвольного элемента x из подгруппы A вытекает соотношение $[A, b] = 1$. Мы показали, что любой элемент, порядка взаимно простого с p и принадлежащий B, централизует подгруппу A. Силовская p-подгруппа группы G, очевидно, совпадает с подгруппой $AB_p = C$, где B_p — p-силовская подгруппа из B. Обозначим через D прямое произведение всех силовских подгрупп группы B, отличных от B_p. Легко видеть, что из соотношения $[A, D] = 1$ вытекает $[AB_p, D] = 1$. Очевидно, $G = CD$ и $C \cap D = 1$. Следовательно, группа G допускает предложение $G = C \times D$. Отсюда вытекает справедливость леммы.

Под локально нильпотентным (гиперцентральным) корадикалом группы G мы, следуя [10], будем понимать нормальный делитель группы G, который определяет локально нильпотентную (гиперцентральную) фактор-группу и содержится в каждом нормальном делителе группы G, определяющем локально нильпотентную (гиперцентральную) фактор-группу.

Л е м м а 2. *Пусть G — периодическая группа, являющаяся квазицентрализаторным произведением локально нильпотентной подгруппы A на локально нильпотентную подгруппу B. Тогда локально нильпотентный корадикал группы G либо является единичной подгруппой, либо совпадает с прямым произведением тех абелевых силовских подгрупп из A, которые тривиально пересекаются с центром группы G.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть L — прямое произведение всех абелевых силовских подгрупп из A, пересекающихся с центром группы G тривиально. Покажем, что фактор-группа $\overline{G} = G/L$ локально нильпотентна. В самом деле, $\overline{G}$, очевидно, является квазицентрализаторным произведением подгруппы $\overline{A} = A/L$ на подгруппу $\overline{B} \simeq B/B \cap L$. Обе эти подгруппы локально нильпотентны. Ввиду леммы 1 любая силовская подгруппа из $\overline{A}$ пересекается с центром группы $\overline{G}$ нетривиально. Группу $\overline{G}$, очевидно, можно представить в виде произведения $\overline{A}_1\overline{B}_1$, где $\overline{A}_1$ — прямое произведение всех силовских абелевых подгрупп из $\overline{A}$, а $\overline{B}_1$ — произведение дополнения $\overline{A}_2$ к $\overline{A}_1$ в $\overline{A}$ на локально нильпотентную группу $\overline{B}$. Эти произведения, очевидно, будут квазицентрализаторными произведениями. В силу леммы 1 подгруппа $\overline{B}_1$ локально нильпотентна. Группу $\overline{G}$ можно рассматривать как квазицентральное расширение абелевой группы $\overline{A}_1$ с локально нильпотентной фактор-группой. В силу теоремы 1 из [2] такое расширение в случае, когда все силовские подгруппы из $\overline{A}_1$ нетривиально пересекаются с центром группы, будет локально нильпотентной группой. Отсюда следует локальная нильпотентность фактор-группы G/L. Теперь группу G можно рассматривать как квазицентральное расширение подгруппы L с локально нильпотентной фактор-группой. Подгруппа L либо единичная группа, либо представима в виде прямого произведения своих силовских подгрупп, каждая из которых тривиально пересекается с центром группы G. Ввиду теоремы 1 из [2] это означает, что L — локально нильпотентный корадикал группы G. Лемма доказана.

Л е м м а 3. *Локально нильпотентный корадикал L группы G, о которой говорится в лемме 2, дополняем в G.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть M — дополнение к L в A. Тогда MB — группа, удовлетворяющая всем условиям леммы 2. В силу этой леммы локально нильпотентный корадикал группы MB равен 1. Поэтому MB — локально нильпотентная группа. Покажем, что $T = L \cap BM = 1$. Предположим противное, пусть x — элемент простого порядка p из T. Очевидно, как и всякий элемент из L, x порождает инвариантную в G подгруппу $\langle x \rangle$, порядок которой равен p. В локально нильпотентной периодической группе любой нормальный делитель простого порядка принадлежит центру группы, т. е. $x \in Z(MB)$. Но тогда, очевидно, $x \in Z(G)$, что противоречит выбору элемента x из L. Лемма доказана.

Из лемм 1—3 непосредственно следует справедливость теоремы 1.

Т е о р е м а 1. *Пусть группа G является квазицентрализаторным произведением подгруппы A на подгруппу B, причем A и B — периодические локально нильпотентные группы. Тогда либо группа G локально нильпотентна, либо прямое произведение тех силовских подгрупп группы A, которые тривиально пересекаются с центром группы G, является неединичной абелевой группой без инволюций, совпадает с локально нильпотентным корадикалом группы G и дополняемо в G.*

Из этой теоремы вытекают следующие утверждения.

С л е д с т в и е 1. *Периодическая группа G тогда и только тогда разложима в квазицентрализаторное произведение с локально нильпотентными множителями, когда она является полупрямым произведением абелевой группы, все подгруппы которой в группе G инвариантны, на локально нильпотентную группу.*

С л е д с т в и е 2. *Пусть периодическая группа G представима в виде произведения двух локально нильпотентных подгрупп A и B, причем B нормализует все подгруппы из A. Если при этом все силовские подгруппы из A неабелевы, то G — локально нильпотентная группа.*

Из содержащегося в [4] описания периодических групп, разложимых в равномерное произведение своих силовских подгрупп и из следствия 1 легко вытекает следующее утверждение.

С л е д с т в и е 3. *Локально конечная группа G тогда и только тогда, разложима в равномерное произведение своих силовских подгрупп, когда она является квазицентрализаторным произведением с локально нильпотентными множителями и ее локально нильпотентный корадикал — холлова подгруппа в G.*

Из теоремы 1 легко вытекает необходимость условий следующей теоремы.

Т е о р е м а 3. *Произвольная периодическая группа G тогда и только тогда разложима в квазицентрализаторное произведение с абелевыми множителями, когда она разложима в полупрямое произведение абелевой подгруппы N, все подгруппы которой в G инвариантны, на гиперцентральную группу M, являющуюся квазицентрализаторным произведением абелевой группы C на абелеву группу Q, причем подгруппа C инвариантна в группе G и порядки элементов подгрупп C и N взаимно просты.*

Докажем достаточность условий теоремы. Пусть $G = N \leftthreetimes M = N \times (CQ)$ — группа , о которой говорится в теореме. Поскольку C — инвариантная в группе G абелева группа, то таковой будет и подгруппа $A = N \times C$. Покажем, что все подгруппы из A инвариантны в группе G. Прежде всего отметим, что все подгруппы из N и C инвариантны в G. Если x — произвольный элемент из A, то его можно представить в виде $x = nc$, где n — некоторый элемент из N, а c — некоторый элемент из C. Тогда для всякого элемента $b \in G$ имеет место соотношение

$$b^{-1}xb = b^{-1}ncb = n^{\alpha}c^{\beta}.$$

Так как элементы n и c перестановочны и их порядки взаимно просты, то найдется такое число γ, что $n^{\alpha}c^{\beta} = (nc)^{\gamma}$, т. е. $b^{-1}xb = x^{\gamma}$. Теорема доказана.

1. *Scott W. R.* Group theory.— Englewood Gliffs : Prentice-Hall, 1964.—479 p.
2. *Субботин И. Я.* Квазицентральные расширения групп.— В кн.: Группы и системы их подгрупп. Киев : Ин-т математики АН УССР, 1983, с. 86—92.
3. *Черников С. Н.* Группы с инвариантными бесконечными абелевыми подгруппами.— В кн.: Группы с ограничениями для подгрупп. Киев : Наук. думка, 1971, с. 47—65.
4. *Шунков В. П.* О группах, разложимых в равномерное произведение своих p-подгрупп.— Докл. АН СССР, 1964, **154**, № 3, с. 542—544.
5. *Субботин И. Я.* О гиперцентральном корадикале KI-группы.— Укр. мат. журн., 1982, **4**, № 5, с. 650—654.
6. *Robinson D. S.* Groups in which normality is transitive relation.— Proc. Cambridge Phil. Soc., 1964, **60**, N 21, p. 21—38.
7. *Курош А. Г.* Теория групп.— М. : Наука, 1967.—648 с.
8. *Cooper C. D.* Power automorphisms of a group.— Math. Z., 1968, **107**, N 5, p. 335—336.
9. *Huppert B.* Zur Sylowstruktur auflösbarer Gruppen.— Arch. Math., 1961, **12**, S. 161—169.
10. *Плоткин Б. И.* Группы автоморфизмов алгебраических систем.— М. : Наука, 1966.—604 с.

Киев. политехн. ин-т

Получено 18.04.84,
после доработки — 10.12.84