УДК 517.946

С. Н. Самборский, М. А. Фельдман

Об условии коэрцитивности для переопределенных граничных задач

1. Пусть A — дифференциальный, B — локальный граничный линейные операторы в сечениях векторных расслоений над гладким многообразием M с гладкой границей Γ. В случае, когда оператор (A, B) удовлетворяет дополнительным условиям регулярности типа невырожденности коэффициентов, в работах [1, 2] указана конструкция, позволяющая в конечное число шагов построить комплекс локальных операторов

$$0 \to H^s(E_0) \xrightarrow{\Phi_0 = (A,\, B)} H^{s-k_1}(E_1) \times H^{s-\beta_1}(G_1) \xrightarrow{\Phi_1} \ldots \to 0, \tag{1}$$

где $H^{s_i}(E_i)$, $H^{\beta_i}(G_i)$ — соболевские пространства сечений расслоений E_i над M, G_i над Γ, β_i — мультииндекс. В работе [1] указано условие, обобщающее условие коэрцитивности Я. Б. Лопатинского, при выполнении которого для эллиптического оператора A когомологии комплекса (1) конечномерны. Это условие заключается в точности комплекса конечномерных расслоений над границей Γ, и его формулировка использует компоненты всех операторов Φ_i, $i = 1, \ldots, l-1$, действующие из $H^{s-\beta_i}(G_i)$ в $H^{s-\beta_{i+1}}(G_{i+1})$.

В данной работе показывается, что упомянутое условие коэрцитивности, а следовательно, и конечномерность когомологий комплекса (1) вытекают из более удобного для проверки условия, в котором используются только операторы A, B и компонента, действующая из $H^{s-\beta_1}(G_1)$ в $H^{s-\beta_2}(G_2)$.

В случае операторов, обладающих рядом формальных свойств (к таким операторам конечной процедурой редуцируются достаточно произвольные «невырожденные» операторы [1, 2]), условие коэрцитивности получено в терминах только операторов A и B. Получаемые теоремы дают возможность приписывать оператору граничной задачи (A, B) эйлерову характеристику комплекса (1), играющую для переопределенных задач ту же роль, что индекс для граничных задач без переопределенности. При этом использована терминология работы [2].

2. Пусть A — формально интегрируемый [3] дифференциальный оператор, B — граничный оператор, содержащий дифференцирования по касательным к Γ направлениям, $\Phi_0 = (A, B)$, $\Phi_i, i = 1, \ldots, l-1$, — дифференциально-граничный оператор, т. е. $\Phi_i(f, g) = (\Phi_i^{11} f, \Phi_i^{21} f + \Phi_i^{22} g)$, где Φ_i^{jj} — дифференциальные, а Φ_i^{21} — граничный операторы [1, 2].

Будем считать порядком k дифференциально-граничного оператора Φ максимальный из порядков операторов Φ^{ij} и сопоставлять оператору $\Phi: \mathcal{E}(E) \times \mathcal{E}(\Gamma) \to \mathcal{E}(E') \times \mathcal{E}(\Gamma')$ (где $\mathcal{E}(\cdot)$ — пространства гладких сечений расслоений) при каждом $x \in M$ отображение $p_s(x, \Phi^{11})$ [3], а при $x \in \Gamma$ отображение

$$p_s(x, \Phi) : J^{s+k}(E)|_\Gamma \times J^{s+k}(G) \to J^s(E') \times J^s(G')$$

так, что при $x \in \Gamma$ $j^s \Phi(f, g)(x) = p_s(x, \Phi)((j^k f)(x), (j^k g)(x))$. Если k, k' — порядки операторов Φ, Φ', то комплекс дифференциально-граничных операторов

$$\mathcal{E}(E) \times \mathcal{E}(G) \xrightarrow{\Phi} \mathcal{E}(E') \times \mathcal{E}(G') \xrightarrow{\Phi'} \mathcal{E}(E'') \times \mathcal{E}(G'')$$

назовем формально точным, если формально точен комплекс дифференциальных операторов [3]

$$\mathcal{E}(E) \xrightarrow{\Phi^{11}} \mathcal{E}(E') \xrightarrow{\Phi'^{11}} \mathcal{E}(E'')$$

и при каждом $x \in \Gamma$ точен комплекс

$$J^{s+k+k'}(E)|_\Gamma \times J^{s+k+k}(G) \xrightarrow{p_{s+k'}(x,\Phi)} J^{s+k'}(E')|_\Gamma \times J^{s+k'}(G') \xrightarrow{p_s(x,\Phi')} J^s(E'')|_\Gamma \times \times J^s(G'').$$

Для каждого достаточно регулярного [3] оператора граничной задачи (A, B) в конечное число шагов строится комплекс дифференциально-граничных операторов (1) такой, что каждый его фрагмент, составленный из операторов Φ_i, Φ_{i+1} формально точен.

Пусть $A: \mathscr{E}(E) \to \mathscr{E}(E')$ — дифференциальный оператор порядка k, ε — стандартное вложение $S^k(T^*M) \otimes E \to J^k(E)$. Символ опе атора A — отображение $\sigma(A): S^k(T^*M) \otimes E \to E'$, определяемое формулой $\sigma(A) = p(A)\varepsilon$ [3]. Для каждых $x \in M$, $\xi \in T^*_x$ обозначим через $\sigma_\xi(x, A)$ отображение $E/x \to E'/x$:

$$\sigma_\xi(x, A) = \sigma(A)(x)(\xi \otimes \xi \otimes \ldots \otimes \xi \otimes y).$$

Ковектор $\xi \in T^*_xM$ называется квазирегулярным, если

$$\dim \operatorname{Ker} \sigma_\xi(x, A) = \min_{\eta \in T^*_xM} \dim \operatorname{Ker} \sigma_\eta(x, A),$$

и нехарактеристичным, если $\dim \operatorname{Ker} \sigma_\xi(x, A) = 0$. Оператор A называется оператором с постоянным дефектом, если для него каждый ненулевой ковектор из T^*_xM квазирегулярен, и эллиптическим оператором, если каждый ненулевой ковектор для него нехарактеристичен.

3. Выберем в некоторой римановой метрике в M в окрестности точки $x \in \Gamma$ локальные координаты на M, в которых dx_n — конормаль к Γ, и определим операторы $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{\Phi}_1$, фиксируя коэффициенты в точке x, оставляя только старшую часть (слагаемые, порядок дифференцирования в которых равен порядку оператора) и заменяя $-i\partial/\partial x_k$ на ξ_k, $k \leqslant n-1$, и $\partial/\partial x_n$ на d/dt. Возникает комплекс

$$0 \to \operatorname{Ker} \hat{A}(x, \eta) \cap \mathfrak{M}^+ \xrightarrow{\hat{B}(x,\eta)} G_1 \otimes \mathbb{C} \xrightarrow{\hat{\Phi}_1^{22}(x,\eta)} G_2 \otimes \mathbb{C}, \tag{2}$$

где $\mathfrak{M}^+$ — пространство функций на полуоси, стремящихся к нулю на бесконечности.

Определение 1. *Оператор (A, B) удовлетворяет условию коэрцитивности, если комплекс (2) точен при каждых $x \in \Gamma$, $\eta \in T^*_x\Gamma$, $\eta \neq 0$.*

Теорема 1. *Пусть (A, B) — оператор достаточно регулярной краевой задачи, A — формально интегрируемый эллиптический (в случае $\dim M = 2$ правильно эллиптический) оператор, (A, B) удовлетворяет условию коэрцитивности и $\dim \operatorname{Ker} \hat{A}(x, \eta) \cap \mathfrak{M}^+$ не зависит от x, $\eta \neq 0$. Тогда существует число s такое, что когомологии комплекса (1) конечномерны.*

Доказательство. Из [1] и эллиптичности оператора A вытекает точность строк в коммутативной диаграмме

$$\begin{array}{ccccc}
(R_{s+k_2})|_\Gamma & \xrightarrow{p_{s+k_2}(B)} & J^{s+k_2}(G_1) & \xrightarrow{p_s(\Phi_1^{22})} & J^s(G_2) \\
\downarrow{\scriptstyle\pi} & & \downarrow{\scriptstyle\pi} & & \downarrow{\scriptstyle\pi} \\
(R_{s+k_2-1})|_\Gamma & \xrightarrow{p_{s+k_2-1}(B)} & J^{s+k_2-1}(G_1) & \xrightarrow{p_{s-1}(\Phi_1^{22})} & J^{s-1}(G_2),
\end{array}$$

где $R_l = \operatorname{Ker} p_l(A) \subset J^{l+k_1}(E_0)$; k_1 и k_2 — порядки B и Φ_1^{22}. Из формальной интегрируемости A следует, что отображение в первом столбце — сюръекция. Поэтому сюръективно отображение $\pi: \operatorname{Ker} p_s(\Phi_1^{22}) \to \operatorname{Ker} p_{s-1}(\Phi_1^{22})$ и оператор Φ_1^{22} формально интегрируем. Докажем вспомогательное предложение.

Предложение 1. *Пусть A — формально интегрируемый оператор, $\xi \in T_x^* M$ — квазирегулярный ковектор* [2] *и*

$$\mathscr{E}(E_0) \xrightarrow{A} \mathscr{E}(E_1) \xrightarrow{A_1} \dots \xrightarrow{A_{N-1}} \mathscr{E}(E_N) \to 0$$

— формально точный комплекс дифференциальных операторов. Тогда точен комплекс

$$E_0|_x \xrightarrow{\sigma_\xi(x, A)} E_1|_x \xrightarrow{\sigma_\xi(x, A_1)} \dots \xrightarrow{\sigma_\xi(x, A_{N-1})} E_N \to 0. \tag{3}$$

Доказательство. Предположим сначала, что A_1 — оператор совместности, построенный в [2], и покажем точность комплекса (3) в члене $E_1/_x$. Из квазирегулярности ковектора ξ для оператора A вытекает его квазирегулярность для оператора $j^m A$ при $m > 0$. Выберем число m таким, чтобы оператор $A' = j^m A$ был инволютивным. Пусть l — порядок оператора A'. Определим оператор 1 порядка $\overline{A}: \mathscr{E}(J^{l-1}(E_0)) \to \mathscr{E}(E_1)$ из соотношения $\overline{A}(j^{l-1} y) = A' y$, где $y \in \mathscr{E}(E_0)$, и зададим оператор $A'': \mathscr{E}(J^{l-1}(E_0)) \to \mathscr{E}(E_1 \times \times C_{l-1}^1)$ по правилу $A'' y = (\overline{A} y, D_1 y)$, где D_1 и C_{l-1}^1 — соответственно оператор и расслоение из второй последовательности Спенсера для расслоения E_0 [3]. Покажем, что ξ — квазирегулярный ковектор для A' тогда и только тогда, когда ξ квазирегулярен для A''. Из точности последовательности

$$0 \to E_0|_x \xrightarrow{\sigma_\xi(x, j^{l-1})} (J^{l-1}(E_0))|_x \xrightarrow{\sigma_\xi(x, D_1)} C_{l-1}^1|_x$$

при всех $x \in M$, $\xi \in T_x^* M$, $\xi \neq 0$, следует $\dim \operatorname{Ker} \sigma_\xi(x, D_1) = \dim E_0|_x$, $\xi \neq 0$. Локальное расслоение $J^{l-1}(E_0)$ представляется в виде $J^{l-1} E_0 = = M \times Y \times X^* \otimes Y \times \dots \times S^{l-1} X^* \otimes Y$ и сечение $\tilde{y} \in \mathscr{E}(J^{l-1}(E_0))$ имеет вид

$$\tilde{y}(x) = (y(x), y^{\alpha_1}(x), \dots, y^{\alpha_s}(x)),$$

где $\alpha_i = (\alpha_i^1, \dots, \alpha_i^n)$, $|\alpha_i| \leqslant |\alpha_{i+1}| \leqslant l$, $y(x) = (y_1(x), \dots, y_r(x))$, $r = \dim E_0|_x$. Оператор D_1 локально записывается в виде

$$D_1 \tilde{y} = \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x_k} y^\alpha - y^{\alpha + 1_k}, & 0 \leqslant |\alpha| \leqslant l - 2, \\ \dfrac{\partial}{\partial x_k} y^{\alpha + 1_m} - \dfrac{\partial}{\partial x_m} y^{\alpha + 1_k}, & |\alpha| = l - 2, \quad m > k. \end{cases}$$

Учитывая, что $\dim \operatorname{Ker} \sigma_\xi(x, D_1) = r$, получаем

$$\operatorname{Ker} \sigma_\xi(x, D_1) = \{(0, \dots, 0, \xi^{\alpha_1} p, \dots, \xi^{\alpha_m} p) \, | \alpha_i | = l - 1, \quad p = (p_1, \dots, p_r)\}. \tag{4}$$

Поскольку при $\tilde{y} = (0, \dots, 0, \xi^{\alpha_1} p, \dots, \xi^{\alpha_m} p)$, $|\alpha_i| = l - 1$,

$$\sigma_\xi(x, \overline{A}) \tilde{y} = \sigma_\xi(x, A') p, \tag{5}$$

то $\dim \operatorname{Ker} \sigma_\xi(x, A'') = \dim \operatorname{Ker} \sigma_\xi(x, A')$ для каждых $x \in M$, $\xi \in T_x^* M$, $\xi \neq 0$.

Пусть $\tilde{A}$ — нормализованный оператор, полученный из A'' применением п. 3 конструкции [2]. Покажем, что ξ — квазирегулярный ковектор для $\tilde{A}$ тогда и только тогда, когда ξ — квазирегулярный ковектор для A''. Локально можно записать

$$A'' y = (\hat{A} y, \varphi y) = (\tilde{A} \tilde{y} + \tilde{A}' \tilde{y}', \tilde{A}'' \tilde{y}', \varphi y),$$

где $\tilde{y} \in \mathscr{E}(\tilde{E}_0)$, $E_0 = \operatorname{Ker} \varphi$, φ — линейный оператор нулевого порядка. Из формальной интегрируемости A'' следует, что соотношение $\dfrac{\partial}{\partial x_k} \varphi y = 0$ является алгебраическим следствием соотношений $A'' y = 0$. Поэтому из

$\sigma_\xi(x, \hat{A})\, y = 0$ следует $\xi_k \varphi y = 0$, $k = 1, \ldots n$, и при $\xi \neq 0$ получаем $\varphi y = 0$, $y = (\tilde{y}, 0)$. Поэтому $\sigma_\xi(x, A'')\, y = 0$ при $\xi \neq 0$ тогда и только тогда, когда $y = (\tilde{y}, 0)$ и $\sigma_\xi(x, \tilde{A})\, \tilde{y} = 0$, т. е. $\dim \operatorname{Ker} \sigma_\xi(x, A'') = \dim \operatorname{Ker} \sigma_\xi(x, \tilde{A})$, $\xi \neq 0$. Следовательно, исходный ковектор квазирегулярен для операторов A и $\tilde{A}$ одновременно.

Построим оператор совместности нормализованного оператора $\tilde{A}$ согласно конструкции [2]:

$$\mathscr{E}(\tilde{E}_0) \xrightarrow{\tilde{A}} \mathscr{E}(\tilde{E}_1) \xrightarrow{\tilde{A}_1} \mathscr{E}(\tilde{E}_2). \tag{6}$$

Пусть

$$\tilde{E}_0|_x \xrightarrow{\sigma_\xi(x, \tilde{A})} \tilde{E}_1|_x \xrightarrow{\sigma_\xi(x, \tilde{A}_1)} \tilde{E}_2|_x \tag{7}$$

— комплекс символов комплекса (6). Из квазирегулярности ξ следует точность (6) [1]. Пусть

$$\mathscr{E}(E_0'') \xrightarrow{A''} \mathscr{E}(E_1'') \xrightarrow{A_1''} \mathscr{E}(E_2'') \tag{8}$$

— комплекс, в котором A_1'' — оператор совместности оператора A'', построенный в [2] по оператору $\tilde{A}_1$. Точность комплекса

$$E_0''|_x \xrightarrow{\sigma_\xi(x, A'')} E_1''|_x \xrightarrow{\sigma_\xi(x, A_1'')} E_2''|_x \tag{9}$$

вытекает из точности комплекса (7) и точности комплекса

$$0 \to \tilde{E}_0'|_x \xrightarrow{\sigma_\xi(x, j^1)} J^1(\tilde{E}_0')|_x \xrightarrow{\sigma_\xi(x, D^1)} C_l'|_x.$$

Из определения операторов A_1 и $A'' = (\bar{A}, D_1)$ [2] следует, что в коммутативной диаграмме

$$\begin{array}{ccccc}
0 & & 0 & & 0 \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
E_0''|_x / \operatorname{Ker} \sigma_\xi(x, D_1) & \xrightarrow{\sigma_\xi(x, D_1)} & C_{l-1}^1|_x & \xrightarrow{\sigma_\xi(x, D_2)} & C_{l-1}^2|_x \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
E_0''|_x & \xrightarrow{\sigma_\xi(x, A'')} & E_1''|_x & \xrightarrow{\sigma_\xi(x, A_1'')} & E_2''|_x \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
E_0''|_x \cap \operatorname{Ker} \sigma_\xi(x, D_1) & \xrightarrow{\sigma_\xi(x, \bar{A})} & E_1'|_x & \xrightarrow{\sigma_\xi(x, A_1)} & E_2'|_x \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
0 & & 0 & & 0
\end{array}$$

столбцы и две верхние строки точны. Таким образом, точна нижняя строка. Из соотношений (4) и (5) имеем $\operatorname{Im} \sigma_\xi(x, A') = \operatorname{Im} (\sigma_\xi(x, \bar{A}) \mid \operatorname{Ker} D_1)$, откуда следует точность комплекса

$$E_0'|_x \xrightarrow{\sigma_\xi(x, A')} E_1'|_x \xrightarrow{\sigma_\xi(x, A_1)} E_2'|_x. \tag{10}$$

Поскольку $A' = j^m A$, оператор A_1 можно представить в виде $(\bar{A}_1, D_1)$. Определим оператор $A_1: \mathscr{E}(E_1) \to \mathscr{E}(E_2)$ формулой $A_1 y = \bar{A}_1(j^m y)$. Оператор A_1 — оператор совместности оператора A. Как было показано при рассмотрении операторов A' и A'', $\dim \operatorname{Ker} \sigma_\xi(x, (\bar{A}_1, D_1)) = \dim \operatorname{Ker} \sigma_\xi(x, A_1)$. Кроме того, очевидно, что $\dim \operatorname{Im} \sigma_\xi(x, A') = \dim \operatorname{Im} \sigma_\xi(x, A)$. Поэтому из точности (10) следует точность (3) в члене $E_1|_x$.

Теперь пусть $K: \mathcal{E}(E_1) \to \mathcal{E}(H)$ — некоторый оператор совместности оператора A порядка $l > m$, где $m = \operatorname{ord} A_1$ (A_1 — оператор, построенный по описанной выше процедуре). Тогда $\operatorname{Ker} p(x, K) = \operatorname{Im} p_l(x, A) = \operatorname{Ker} p(x, j^{l-m} A_1)$ и $\operatorname{Ker} \sigma(K) = \operatorname{Ker} p(K) \cap S^l(T^*M) \otimes E_1 = \operatorname{Ker} \sigma(j^{l-m} A)$. Следовательно, $\operatorname{Ker} \sigma_\xi(x, K) = \operatorname{Ker} \sigma_\xi(x, j^{l-m} A_1)$, поэтому точность комплекса

$$E_0|_x \xrightarrow{\sigma_\xi(x, A)} E_1|_x \xrightarrow{\sigma_\xi(x, K)} H|_x \tag{11}$$

для квазирегулярного ξ вытекает из точности комплекса

$$E_0|_x \xrightarrow{\sigma_\xi(x, A)} E_1|_x \xrightarrow{\sigma_\xi(x, j^{l-m} A_1)} (J^{l-m}(E_2))|_x$$

для квазирегулярного ξ, выполняющейся ввиду равенства

$$\operatorname{Ker} \sigma_\xi(x, A_1) = \operatorname{Ker} \sigma_\xi(x, j^{l-m} A_1), \quad \xi \neq 0.$$

Если $l < m$, то оператор $j^{m-l} K$ является оператором совместности оператора A, $\operatorname{ord}(j^{m-l} K) = \operatorname{ord} A_1$. Поэтому для $j^{m-l} K$ точна символическая последовательность (11) при квазирегулярном ξ. Из равенства $\operatorname{Ker} \sigma_\xi(x, K) = \operatorname{Ker} \sigma_\xi(x, j^{m-l} K)$ при $\xi \neq 0$ следует точность комплекса (11), что влечет точность (3) при квазирегулярном ξ в члене $E_1|_x$ для произвольного формально точного комплекса оператора A.

Для доказательства точности комплекса (3) в остальных членах покажем, что из квазирегулярности ковектора ξ для оператора A вытекает его квазирегулярность для A_1. Обозначим через $K_A(x)$ множество ковекторов, квазирегулярных для оператора A в точке x. Очевидно, что $K_A(x)$ всюду плотно в T_x^*M, а $T_x^*M \setminus K_A(x)$ нигде не плотно в T_x^*M. Покажем включение $K_A(x) \subseteq K_{A_1}(x)$. Из точности (3) в $E_1|_x$ при $\xi \in K_A(x)$ вытекает постоянство $\dim \operatorname{Ker} \sigma_\xi(x, A_1)$ при $\xi \in K_A(x)$. Следовательно, либо $K_A(x) \subseteq K_{A_1}(x)$, либо $K_A(x) \subseteq T_x^*M \setminus K_{A_1}(x)$.

Поскольку $T_x^*M \setminus K_{A_1}(x)$ нигде не плотно в T_x^*M, второе включение невозможно, следовательно, $K_A(x) \subseteq K_{A_1}(x)$. Из формальной интегрируемости A_1 и включения $K_A(x) \subseteq K_{A_1}(x)$ следует точность (3) в $E_2|_x$ при $\xi \in K_A(x)$. Точность комплекса (3) в остальных членах доказывается аналогично. Предложение доказано.

Известно [1], что комплекс

$$\mathcal{E}(G_1) \xrightarrow{\Phi_1^{22}} \mathcal{E}(G_2) \xrightarrow{\Phi_2^{22}} \dots \xrightarrow{\Phi_{l-1}^{22}} \mathcal{E}(G_l) \to 0 \tag{12}$$

формально точен. Из формальной интегрируемости и постоянства дефекта оператора Φ_1^{22} (постоянство дефекта следует из точности (2), постоянства $\dim \operatorname{Ker} \hat{A}(x, \eta) \cap \mathfrak{M}^+$ $(\eta \neq 0)$ и равенства $\hat{\Phi}_1^{22}(x, \eta) = \sigma_\eta(x, \Phi_1^{22}) \otimes 1$) получаем, используя предложение 1, точность комплекса

$$G_1|_x \xrightarrow{\sigma_\eta(x, \Phi_1^{22})} G_2|_x \xrightarrow{\sigma_\eta(x, \Phi_2^{22})} \dots \xrightarrow{\sigma_\eta(x, \Phi_{l-1}^{22})} G_l|_x \to 0 \tag{13}$$

при всех $x \in \Gamma$, $\eta \in T_x^*\Gamma$, $\eta \neq 0$.

Определим операторы $\hat{\Phi}_i(x, \eta)$, $i \geqslant 2$, аналогично оператору $\hat{\Phi}_1(x, \eta)$. Получим комплекс обыкновенных дифференциально-граничных операторов с постоянными коэффициентами

$$0 \to H^s(R^+, \mathbb{C}^{m_0}) \xrightarrow{\hat{\Phi}_0(x, \eta)} H^{s-k_1}(R^+, \mathbb{C}^{m_1}) \times \mathbb{C}^{r_1} \xrightarrow{\hat{\Phi}_1(x, \eta)} \dots \to 0 \tag{14}$$

где $m_i = \dim E_i|_x$, $r_i = \dim G_i|_x$, $\Phi_0 = (A, B)$. Покажем, что этот комплекс точен при всех $x \in \Gamma$, $\eta \in T_x^*\Gamma$, $\eta \neq 0$. Из коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd}
 & 0 & 0 & & \\
0 \arrow[r] & H^s(R^+, \mathbb{C}^{m_0})/\operatorname{Ker}\widehat{A}(x,\eta) \arrow[r, "\widehat{A}(x,\eta)"] \arrow[u] & H^{s-k_1}(R^+, \mathbb{C}^{m_1}) \arrow[r, "\widehat{\Phi}_1^{11}(x,\eta)"] \arrow[u] & \ldots \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & H^s(R^+, \mathbb{C}^{m_0}) \arrow[r, "\widehat{\Phi}_0(x,\eta)"] \arrow[u] & H^{s-k_1}(R^+, \mathbb{C}^{m_1}) \times \mathbb{C}^{r_1} \arrow[r, "\widehat{\Phi}_1(x,\eta)"] \arrow[u] & \ldots \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Ker}\widehat{A}(x,\eta) \cap H^s(R^+, \mathbb{C}^{r_0}) \arrow[r, "\widehat{B}(x,\eta)"] \arrow[u] & \mathbb{C}^{r_1} \arrow[r, "\widehat{\Phi}_1^{22}(x,\eta)"] \arrow[u] & \ldots \arrow[r] & 0, \\
 & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & &
\end{tikzcd}$$

столбцы которой точны, видно, что достаточно показать точность крайних строк. Точность нижней строки следует из точности комплексов (2), (13), так как выполняются равенства

$$\widehat{\Phi}_i^{22}(x, \eta) = \sigma_\eta(x, \Phi_i^{22}) \otimes 1, \quad i = 1, \ldots, l-1.$$

Верхняя строка получена из комплекса совместности оператора A, построенного в [2]. Для нормализованного оператора $\tilde{A}$ точность комплекса обыкновенных дифференциальных операторов показана в [2]. Рассматривая, как при доказательстве предложения 1, последовательно комплексы для операторов A'', A', A, получаем точность верхней строки диаграммы.

Из предложения 3 и эллиптичности оператора A следует точность комплекса

$$0 \to E_0|_x \xrightarrow{\sigma_\xi(x, A)} E_1|_x \xrightarrow{\sigma_\xi(x, \Phi_1^{11})} \ldots \xrightarrow{\sigma_\xi(x, \Phi_{l-1}^{11})} E_l|_x \to 0 \tag{15}$$

при всех $x \in M$, $\xi \in T_x^*M$, $\xi \neq 0$.

Рассматривая лапласиан комплекса (1), из точности комплексов (14), (15) и из [4] получаем конечномерность когомологий комплекса (1).

4. Определим дифференциальный оператор $B' : \mathscr{E}(E_0|_\Gamma) \to \mathscr{E}(G_1)$ формулой $B'(y|_\Gamma) = By$, $y \in \mathscr{E}(E_0)$. Определение корректно, так как B содержит дифференцирования только по касательным к Γ направлениям.

Определение 2. *Оператор краевой задачи* $(A, B) : \mathscr{E}(E_0) \to \mathscr{E}(E_1) \times \mathscr{E}(G_1)$ *назовем нормализованным, если* $A : \mathscr{E}(E_0) \to \mathscr{E}(E_1)$ — *нормализованный дифференциальный оператор и дифференциальный оператор* $\Theta = (A^t, B')$, *где* A^t — *касательная часть оператора* A [2], *формально интегрируемый.*

Теорема 2. *Пусть* (A, B) — *нормализованный оператор граничной задачи, оператор* A — *эллиптический (в случае* $\dim M = 2$ *правильно эллиптический),* A^t — *оператор с постоянным дефектом. Тогда эквивалентны следующие утверждения:*

1) *существует число* s *такое, что когомологии комплекса* (1) *конечномерны и не меняются при замене* s *на* $s' > s$;

2) *выполнено следующее условие коэрцитивности:* $\Theta = (A^t, B)$ — *оператор с постоянным дефектом, отображение* $(\widehat{A}(x, \eta), \widehat{B}(x, \eta))$ *мономорфно при всех* $x \in \Gamma$, $\eta \in T_x^*\Gamma$, $\eta \neq 0$, *и выполняется равенство* $\widehat{B}(x, \eta)(\operatorname{Ker}\widehat{A}^t \times (x, \eta)) = \widehat{B}(x, \eta)(\operatorname{Ker}\widehat{A}(x, \eta) \cap \mathfrak{M}^+)$ *при всех* $x \in \Gamma$, $\eta \in T_x^*\Gamma$, $\eta \neq 0$.

Доказательство. Из [1] следует, что достаточно показать эквивалентность утверждения 2 и следующего утверждения:

2') при всех $x \in \Gamma$, $\eta \in T_x^*\Gamma$, $\eta \neq 0$, точен комплекс

$$0 \to \operatorname{Ker}\widehat{A}(x, \eta) \cap \mathfrak{M}^+ \xrightarrow{\widehat{B}(x, \eta)} G_1|_x \otimes \mathbb{C} \xrightarrow{\widehat{\Phi}_1^{22}(x, \eta)} \ldots \to 0. \tag{16}$$

Покажем, что из утверждения 2′ следует 2. В коммутативной диаграмме

$$\begin{tikzcd}
0 & 0 & \\
E_0|_x/\mathrm{Ker}\,\sigma_\eta(x, A^t) \arrow[u] \arrow[r, "\sigma_\eta(x, A^t)"] & \tilde{E}_1|_x \arrow[u] \arrow[r, "\sigma_\eta(x, A_1^t)"] & \ldots \to 0 \\
E_0|_x \arrow[u] \arrow[r, "\sigma_\eta(x, \Theta)"] & E_1|_x \oplus G_1|_x \arrow[u] \arrow[r, "\sigma_\eta(x, \Theta_1)"] & \ldots \to 0 \\
\mathrm{Ker}\,\sigma_\eta(x, A^t) \arrow[u] \arrow[r, "\sigma_\eta(x, B')"] & G_1|_x \arrow[u] \arrow[r, "\sigma_\eta(x, \Phi_1^{22})"] & \ldots \to 0, \\
0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] &
\end{tikzcd} \qquad (17)$$

где оператор A_i^t — касательная часть оператора A_i [2] и Θ_i — оператор совместности Θ_{i-1}, столбцы, состоящие из вложений и проекций, точны. Точность верхней строки при любых $x \in \Gamma$, $\eta \in T_x^*\Gamma$, $\eta \neq 0$, следует из нормализованности и постоянства дефекта A^t. Точность нижней строки при любых $x \in \Gamma$, $\eta \in T_x^*\Gamma$, $\eta \neq 0$, следует из включения $(\mathrm{Ker}\,\hat{A}(x, \eta) \cap \mathfrak{M}^+)|_{t=0} \subseteq \mathrm{Ker}\,\sigma_\eta(x, A^t)$ и точности комплекса (16). Следовательно, средняя строка точна при всех $x \in \Gamma$, $\eta \in T_x^*\Gamma$, $\eta \neq 0$, откуда вытекает постоянство дефекта оператора Θ.

Равенство $\hat{B}(x, \eta)(\mathrm{Ker}\,\hat{A}^t(x, \eta)) = \hat{B}(x, \eta)(\mathrm{Ker}\,\hat{A}(x, \eta) \cap \mathfrak{M}^+)$ $\forall x \in \Gamma$, $\eta \in T_x^*\Gamma$, $\eta \neq 0$, вытекает из точности (16) в члене $G_1|_x$ и из включения $(\mathrm{Ker}\,\hat{A}(x, \eta) \cap \mathfrak{M}^+)|_{t=0} \subseteq \mathrm{Ker}\,\sigma_\eta(x, A^t)$ $\forall x \in \Gamma$, $\eta \in T_x^*\Gamma$, $\eta \neq 0$.

Покажем, что из утверждения 2 следует 2′. В диаграмме (17) столбцы и верхняя строка точны, а точность средней строки при всех $x \in \Gamma$, $\eta \in T_x^*\Gamma$, $\eta \neq 0$, следует из формальной интегрируемости и постоянства дефекта Θ в силу предложения 1. Следовательно, при всех $x \in \Gamma$, $\eta \in T_x^*\Gamma$, $\eta \neq 0$, точна нижняя строка. Из равенства

$$\hat{B}(x, \eta)(\mathrm{Ker}\,\hat{A}^t(x, \eta)) = \hat{B}(x, \eta)(\mathrm{Ker}\,\hat{A}(x, \eta) \cap \mathfrak{M}^+)$$

и мономорфности отображения $(\hat{A}(x, \eta), \hat{B}(x, \eta))$ вытекает точность комплекса (16) при всех $x \in \Gamma$, $\eta \in T_x^*\Gamma$, $\eta \neq 0$. Теорема доказана.

1. *Самборский С. Н.* Краевые задачи для переопределенных систем уравнений с частными производными.— Киев, 1981.— 44 с.— (Препринт / АН УССР, Ин-т математики ; 81.48).
2. *Самборский С. Н*. Коэрцитивные граничные задачи для переопределенных эллиптических систем.— Укр. мат. журн., 1984, 36, № 3, с. 340—346.
3. *Спенсер Д*. Переопределенные системы линейных дифференциальных уравнений в частных производных.— Математика, 1970, **14**, № 2, с. 66—90; № 3, с. 99—126.
4. *Boutet de Monvel L.* Boundary problems for pseudo-differential operators.— Acta math., 1971, **126**, p. 11—51.

Киев. политехн. ин-т, НИИАСС Получено 21.10.83