УДК 519.21

М. Н. Марушин

Об одном классе предельных законов для цепи Маркова с двумя состояниями

Рассмотрим цепь Маркова в виде последовательности серий величин $x_{n1}, \ldots, x_{nk}$, каждая из которых принимает только значения 0 и 1. Предположим, что $k = k(n)$ есть неубывающая последовательность положительных целых чисел, стремящихся к ∞. Переходные вероятности

$$p_{s,t}^{(i)} = P(x_{ni} = t \mid x_{n,i-1} = s) \quad s, t = 0, 1,$$

и начальное распределение

$$P(x_{n1} = 1) = p_{n1}$$

зависят от n, которое в обозначениях переходных вероятностей опускаем. Положим $S_{nk} = x_{n1} + \ldots + x_{nk}$, $D_{nk} = M(S_{nk} - MS_{nk})^2$, $\lambda_{i+1} = p_{11}^{(i+1)} - p_{01}^{(i+1)}$,

$\prod_{i+1,i+j} = \prod_{t=1}^{j} \lambda_{i+t} \left(\prod_{i+1,1} = 1\right)$, $\overset{+}{T}_i = \sum_{j=0}^{k-i} \left|\prod_{i+1,i+j}\right|$, $M_{nk} = \max_{1 \leqslant i \leqslant k} \overset{+}{T}_i$, $\sigma_{nk} = CM_{nk}$ ($C > 0$ — константа). Пусть

$$\frac{D_{nk}}{\sigma_{nk}^2} \to H, \quad n \to \infty. \tag{1}$$

Если $H = 0$, то, очевидно,

$$\frac{S_{nk} - MS_{nk}}{\sigma_{nk}} \xrightarrow{p} 0.$$

Если же $H = \infty$ и $\lambda_{i+1} \geqslant 0$, $i = 1, 2, \ldots$, то, как установлено в работе [1], к сумме S_{nk} применима центральная предельная теорема теории моментов, т. е. для любых $m > 0$ выполняется следующее равенство:

$$\lim_{n\to\infty} M \left| \frac{S_{nk} - MS_{nk}}{\sqrt{D_{nk}}} \right|^m = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^m e^{-x^2/2} dx.$$

Пусть $0 < H < \infty$. Выясним, какие предельные распределения возникают в этом случае.

Введем следующее определение. Будем говорить, что к сумме S_{nk} применим предельный закон $F(x)$, однозначно определяемый моментами

$$A_m = \int_{-\infty}^{+\infty} x^m dF(x), \quad m = 1, 2, \ldots,$$

если при всех натуральных числах m

$$\lim_{n\to\infty} MS_{nk}^m / \sigma_{nk}^m = A_m$$

и, кроме этого, степенной ряд $\sum_{m=1}^{\infty} A_m t^m/m!$ имеет ненулевой радиус сходимости.

Целью настоящей работы является описание предельных распределений $F(x)$, выраженных в терминах моментов A_m.

Предположим, что

$$\sigma_{nk} \to \sigma, \quad n \to \infty. \tag{2}$$

Если $\sigma \neq \infty$, то при соответствующем выборе C можно положить, не ограничивая общности решаемой задачи, $\sigma = 1$. Введем следующие обозначения:

$$T_{i,j}^{(\alpha)} = \sum_{t=0}^{j-1} \prod_{i+1, i+\alpha-1+t} C_{\alpha-1+t}^{\alpha-1}, \ \alpha = 1, 2, \dots, \ T_i^{(\alpha)} = T_{i,k-i-\alpha+2}^{(\alpha)} \ (T_i^{(0)} = 1),$$

$$\varepsilon_{nk} = \max_{2 \leqslant i \leqslant k} p_{01}^{(i)}, \quad \delta_{nk} = \sum_{i=2}^{k} p_{01}^{(i)}, \ \gamma_{nk} = \frac{1}{\sigma_{nk}} \sum_{i=1}^{k-1} p_{01}^{(i+1)} \overset{+}{T}_{i+1}.$$

Теорема 1. *Пусть* $\sigma = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} p_{n1} = p_1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_{nk} = 0$, $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \delta_{nk} = \delta < \infty$. *Если при всех натуральных числах* β

$$\lim_{n\to\infty} T_1^{(\beta)} = B_\beta, \tag{3}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k-\beta} p_{01}^{(i+1)} T_{i+1}^{(\beta)} = C_\beta, \tag{4}$$

то к сумме S_{nk} *применим предельный закон* $F(x)$, *однозначно определяемый моментами*

$$A_m = \sum_{t=1}^{m} \sum_{(\alpha_1, \dots, \alpha_t) \in \mathfrak{N}_t^{(m)}} \frac{m!}{\alpha_1! \dots \alpha_t!} \sum_{l=0}^{t-1} \left[\sum_{\mathfrak{M}_{l+1,t}} \frac{1}{h_1! \dots h_{l+1}!} \prod_{s=1}^{l+1} C_{\beta_s}^{h_s} + \right.$$

$$\left. + p_1 \sum_{r=1}^{t-l} B_r \sum_{\mathfrak{M}_{l,t-r}} \frac{1}{h_1! \dots h_l!} \prod_{s=1}^{l} C_{\beta_s}^{h_s} \right], \quad m = 1, 2, \dots, \tag{5}$$

где

$$\mathfrak{N}_t^{(m)} = \left\{ (\alpha_1, \dots, \alpha_t) : \begin{array}{l} \alpha_1 + \dots + \alpha_t = m, \\ \alpha_i > 0, \quad i = 1, \dots, t \end{array} \right\},$$

$$\mathfrak{M}_{l,t} = \left\{ \begin{array}{l} (h_1, \dots, h_l) \\ (\beta_1, \dots, \beta_l) \end{array} : \begin{array}{l} h_1\beta_1 + \dots + h_l\beta_l = t, \\ 1 \leqslant \beta_1 < \dots < \beta_l \leqslant t \end{array} \right\},$$

Теорема 2. *Пусть* $\sigma = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} p_{n1} = p_1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_{nk} = 0$, $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \gamma_{nk} = \gamma < \infty$. *Если при всех натуральных числах* β

$$\lim_{n\to\infty} \frac{T_1^{(\beta)}}{\sigma_{nk}^{\beta}} = B_\beta, \tag{6}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sigma_{nk}^{\beta}} \sum_{i=1}^{k-\beta} p_{01}^{(i+1)} T_{i+1}^{(\beta)} = C_\beta, \tag{7}$$

то к сумме S_{nk} *применим предельный закон* $F(x)$, *однозначно определяемый моментами*

$$A_m = m! \sum_{l=0}^{m-1} \left[\sum_{\mathfrak{M}_{l+1,m}} \frac{1}{h_1! \dots h_{l+1}!} \prod_{s=1}^{l+1} C_{\beta_s}^{h_s} + \right.$$

$$\left. + p_1 \sum_{r=1}^{m-l} B_r \sum_{\mathfrak{M}_{l,m-r}} \frac{1}{h_1! \dots h_l!} \prod_{s=1}^{l} C_{\beta_s}^{h_s} \right], \quad m = 1, 2, \dots. \tag{8}$$

Теорема 3. *Пусть* $\sigma = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} p_{n1} = p_1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_{nk} = 0$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, \gamma_{nk} = \gamma < \infty$. *Если при* $p_1 = 0, 1$ *к сумме* S_{nk} *применим предельный закон* $F(x)$, *однозначно определяемый моментами* (8), *то соблюдаются условия* (6) *и* (7).

Следствие 1. *Если соблюдаются условия теоремы* 1, *причем* $p_1=0$ *и*

$$C_\beta = \begin{cases} \lambda, & \text{когда } \beta = 1, \\ 0, & \text{когда } \beta > 1, \end{cases}$$

то к сумме S_{nk} *применим предельный закон Пуассона, т. е.*

$$\lim_{n\to\infty} P(S_{nk} < x) \overset{\text{сл.}}{=} \sum_{0\leqslant h<x} \frac{e^{-\lambda}\lambda^h}{h!}, \quad \lambda > 0.$$

Следствие 2. *Если соблюдаются условия теоремы* 1, *причем* $p_1 = p \neq 1$, $B_\beta = p^{\beta-1}/(1-p)^\beta$, $C_\beta = \lambda p^{\beta-1}/(1-p)^\beta$, *то к сумме* S_{nk} *применим предельный закон*

$$F(x) = (1-p)\, e^{-\lambda} \sum_{1\leqslant i<x} L_{i-1}(-(1-p)\lambda/p)\, p^{i-1},$$

где $L_i(\omega)$ — *полиномы Лагерра порядка* i.

Следствие 3. *Если соблюдаются условия теоремы* 2, *причем* $B_\beta = 0$, $C_\beta = a/\beta$, $a > 0$, *то к сумме* S_{nk} *применимо предельное гамма-распределение с параметром* $a > 0$, *т. е.*

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{S_{nk}}{\sigma_{nk}} < x\right) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^x t^{a-1} e^{-t}\, dt,$$

где $\Gamma(a) = \int\limits_0^\infty t^{a-1} e^{-t}\, dt$.

Следствие 4. *Если соблюдаются условия теоремы* 1, *причем* $p_1 = 1$, $B_\beta = 1$, $C_\beta = \lambda$, *то к сумме* S_{nk} *применимо обобщенное распределение Пуассона, т. е.*

$$\lim_{n\to\infty} P(S_{nk} < x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 0, \\ \int\limits_0^x e^{-(\lambda+u)} J_0(2\sqrt{\lambda u})\, du & \text{при } x > 0, \end{cases}$$

где $J_0(\omega) = \sum\limits_{r=1}^\infty \frac{1}{(r!)^2} \left(\frac{\omega}{2}\right)^{2r}$ — *функция Бесселя от чисто мнимого аргумента.*

Доказательство теоремы 1. Нетрудно видеть, что доказательство теоремы сводится к исследованию сходимости моментов суммы S_{nk} для натуральных чисел m (см. [2, с. 197]).

Пусть

$$\mathfrak{M}_j^{(k)} = \left\{ (i_1, \ldots, i_j) : \begin{array}{l} j \leqslant i_1 + \ldots + i_j \leqslant k, \\ i_t > 0, \quad t = 1, \ldots, j \end{array} \right\}.$$

В соответствии с полиномиальной формулой

$$MS_{nk}^m = \sum_{j=1}^m \sum_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_j)\in\mathfrak{M}_j^{(m)}} \frac{m!}{\alpha_1! \ldots \alpha_j!} \sum_{(i_1,\ldots,i_j)\in\mathfrak{M}_j^{(k)}} Mx_{ni_1}^{\alpha_1} \ldots x_{n,i_1+\ldots+i_j}^{\alpha_j}.$$

Так как

$$Mx_{ni_1}^{\alpha_1} \ldots x_{n,i_1,\ldots,i_j}^{\alpha_j} = p_{ni_1} p_{11}^{(i_1,i_1+i_2)} \ldots p_{11}^{(i_1+\ldots+i_{j-1},i_1+\ldots+i_j)},$$

$$p_{11}^{(i,i+j)} = \prod\nolimits_{i+1,i+j} + P_{i+1,i+j},$$

где $P_{i+1,i+j} = \sum_{t=1}^{j} p_{01}^{(i+t)} \prod_{i+t+1,i+j}$, $P_{21} = 0$, то

$$MS_{nk}^m = \sum_{j=1}^{m} \sum_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_j)\in\mathfrak{N}_j^{(m)}} \frac{m!}{\alpha_1!\ldots\alpha_j!} \sum_{(i_1,\ldots,i_j)\in\mathfrak{M}_j^{(k)}} \left(p_{n1}\prod_{2i_1} + P_{2i_1}\right)\times$$

$$\times \prod_{s=1}^{j-1} ((v)_{i_{s+1}} + (p)_{i_{s+1}}), \tag{9}$$

где $(v)_{i_{s+1}} = \prod_{i_1+\ldots+i_s+1,i_1+\ldots+i_{s+1}}$, $(p)_{i_{s+1}} = P_{i_1+\ldots+i_s+1,i_1+\ldots+i_{s+1}}$.

Перемножая двучлены в правой части (9), получаем равенство

$$MS_{nk}^m = \sum_{t=1}^{m} \sum_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_t)\in\mathfrak{N}_t^{(m)}} \frac{m!}{\alpha_1!\ldots\alpha_t!} \left\{p_{n1}\left[\sum_{(i_1,\ldots,i_t)\in\mathfrak{M}_t^{(k)}} (v^{(t)})_{i_t} + \right.\right.$$

$$\left. + \sum_{l=1}^{t-1} \sum_{\{1\leqslant\gamma_0<\ldots<\gamma_l=t\}} \sum_{(i_1,\ldots,i_t)\in\mathfrak{M}_t^{(k)}} (v^{(\gamma_0)})_{i_{\gamma_0}} \prod_{r=1}^{l} (pv^{(\beta_r)})_{i_{\gamma_r}}\right] +$$

$$+ \sum_{(i_1,\ldots,i_t)\in\mathfrak{M}_t^{(k)}} P_{2i_1}(v^{(t-1)})_{i_t} + \sum_{l=1}^{t-1} \sum_{\{1\leqslant\gamma_0<\ldots<\gamma_l=t\}} \sum_{(i_1,\ldots,i_t)\in\mathfrak{M}_t^{(k)}} P_{2i_1}(v^{(\gamma_0-1)})_{i_{\gamma_0}}\times$$

$$\left.\times \prod_{r=1}^{l} (pv^{(\beta_r)})_{i_{\gamma_r}}\right\},$$

где

$$\beta_r = \gamma_r - \gamma_{r-1},\quad \gamma_0 = \beta_0,\quad (v^{(\gamma)})_{i_{t-h}} = \prod_{i_1+\ldots+i_{t-\gamma}-h+2,i_1+\ldots+i_t-h},$$

$$t\geqslant\gamma,\ (pv^{(\gamma_r)})_{i_{\gamma_r}} = (p)_{i_{\gamma_{r-1}+1}}(v^{(\beta_r)})_{i_{\gamma_r}}.$$

Так как

$$\sum_{(i_1,\ldots,i_t)\in\mathfrak{M}_t^{(k)}} (v^{(t)})_{i_t} = T_1^{(t)},\qquad \sum_{(i_1,\ldots,i_t)\in\mathfrak{M}_t^{(k)}} P_{2i_1}(v^{(t-1)})_{i_t} = \sum_{\iota=1}^{k-t} p_{01}^{(\iota+1)}T_{\iota+1}^{(t)},$$

$$\sum_{(i_1,\ldots,i_{\gamma_l})\in\mathfrak{M}_{\gamma_l}^{(k)}} (v^{(\gamma_0)})_{i_{\gamma_0}} \prod_{r=1}^{l} (pv^{(\beta_r)})_{i_{\gamma_r}} = \sum_{(i_0,\ldots,i_{l-1})\in\mathfrak{M}_l^{(k-\gamma_l+l)}} T_{1i_0}^{(\beta_0)} \prod_{r=1}^{l} p_{01}^{(\nu_r)}T_{\nu_r,i_r}^{(\beta_r)},$$

$$\sum_{(i_1,\ldots,i_{\gamma_l})\in\mathfrak{M}_{\gamma_l}^{(k)}} P_{2i_1}(v^{(\gamma_0-1)})_{i_{\gamma_0}} \prod_{r=1}^{} (pv^{(\beta_r)})_{i_{\gamma_r}} = \sum_{(i_0,\ldots,i_l)\in\mathfrak{M}_{l+1}^{(k-\gamma_l+l)}} \prod_{r=0}^{l} p_{01}^{(\eta_r)}T_{\eta_r,i_{r+1}}^{(\beta_r)},$$

где

$$\gamma_t = \beta_0 + \ldots + \beta_t,\quad t = 0, 1, \ldots, l,\quad \nu_r = \sum_{s=0}^{r-1} (i_s + \beta_s) - r + 1,\quad \nu_0 = 1,$$

$$\eta_t = \nu_t + i_t,\quad T_{\nu_l,i_l}^{(\beta_l)} = T_{\nu_l}^{(\beta_l)},\ T_{\eta_l,i_{l+1}}^{(\beta_l)} = T_{\eta_l}^{(\beta_l)},$$

то

$$MS_{nk}^m = \sum_{t=1}^{m} \sum_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_t)\in\mathfrak{N}_t^{(m)}} \frac{m!}{\alpha_1!\ldots\alpha_t!} \sum_{l=0}^{t-1} \sum_{(\beta_0,\ldots,\beta_l)\in B_{l,l+1}} (p_{n1}h_{\beta_0,\ldots,\beta_l;n}^{(m)} + H_{\beta_0,\ldots,\beta_{ln}}^{(m)}), \tag{10}$$

где

$$h^{(m)}_{\beta_0,\ldots,\beta_l;n} = \sum_{(\beta'_0,\ldots,\beta'_l)\in P_{\beta_0,\ldots,\beta_l}} \sum_{(i_0,\ldots,i_{l-1})\in\mathfrak{M}_l^{(k-t+l)}} T^{(\beta'_0)}_{1i_0} \prod_{r=1}^{l} p_{01}^{(\nu_r)} T^{(\beta'_r)}_{\nu_r,i_r}, \ l \geqslant 1, \ h^{(m)}_{\beta_0} = T_1^{(\beta_0)},$$

$$H^{(m)}_{\beta_0,\ldots,\beta_l;n} = \sum_{(\beta'_0,\ldots,\beta'_l)\in P_{\beta_0,\ldots,\beta_l}} \sum_{(i_0,\ldots,i_l)\in\mathfrak{M}_{l+1}^{(k-t+l)}} \prod_{r=0}^{l} p_{01}^{(\eta_r)} T^{(\beta'_r)}_{\eta_r,i_{r+1}}, \quad l \geqslant 1,$$

$$H^{(m)}_{\beta_0,n} = \sum_{i_0=1}^{k-\beta_0} p_{01}^{(i_0+1)} T^{(\beta_0)}_{i_0+1}, \quad B_{t,l+1} = \left\{ (\beta_0, \ldots, \beta_l) : \begin{matrix} \beta_0 + \ldots + \beta_l = t, \\ 0 < \beta_0 \leqslant \beta_1 \leqslant \ldots \leqslant \beta_l \end{matrix} \right\},$$

а множество $P_{\beta_0,\ldots,\beta_l}$ представляет совокупность всевозможных различных перестановок из натуральных чисел $\beta_0, \ldots, \beta_l$.

Положим $\overline{T}^{(\beta)}_{i,j} = T^{(\beta)}_i - T^{(\beta)}_{i,j}$. Тогда

$$h^{(m)}_{\beta_0,\ldots,\beta_l;n} = Q^{(1)}_{\beta_0,\ldots,\beta_l;n} + R^{(1)}_{\beta_0,\ldots,\beta_l;n},$$

$$H^{(m)}_{\beta_0,\ldots,\beta_l;n} = Q^{(2)}_{\beta_0,\ldots,\beta_l;n} + R^{(2)}_{\beta_0,\ldots,\beta_l;n},$$

где

$$Q^{(1)}_{\beta_0,\ldots,\beta_l;n} = \sum_{(\beta'_0,\ldots,\beta'_l)\in P_{\beta_0,\ldots,\beta_l}} \sum_{(i_0,\ldots,i_l)\in\mathfrak{M}_{l+1}^{(k-t+l)}} T_1^{(\beta'_0)} \prod_{r=1}^{l} p_{01}^{(\nu_r)} T^{(\beta'_r)}_{\nu_r},$$

$$Q^{(2)}_{\beta_0,\ldots,\beta_l;n} = \sum_{(\beta'_0,\ldots,\beta'_l)\in P_{\beta_0,\ldots,\beta_l}} \sum_{(i_0,\ldots,i_l)\in\mathfrak{M}_{l+1}^{(k-t+l)}} \prod_{r=0}^{l} p_{01}^{(\eta_r)} T^{(\beta'_r)}_{\eta_r},$$

а каждое слгаемое сумм $R^{(1)}_{\beta_0,\ldots,\beta_l;n}$, $R^{(2)}_{\beta_0,\ldots,\beta_l;n}$ является произведением множителей $p_{01}^{(h_r)} T^{(\beta'_r)}_{h_r}$, $p_{01}^{(h_r)} \overline{T}^{(\beta'_r)}_{h_r,i_{r+1}}$, $h_r = \nu_r$, η_r, причем любое такое произведение содержит по крайней мере один из множителей $p_{01}^{(h_r)} \overline{T}^{(\beta'_r)}_{h_r,i_{r+1}}$. Эта структурная особенность слагаемых сумм $R^{(1)}_{\beta_0,\ldots,\beta_l;n}$, $R^{(2)}_{\beta_0,\ldots,\beta_l;n}$ позволяет оценить их следующим образом:

$$R^{(1)}_{\beta_0,\ldots,\beta_l;n} = O(\varepsilon_{nk}), \quad R^{(2)}_{\beta_0,\ldots,\beta_l;n} = O(\varepsilon_{nk}). \tag{11}$$

Поскольку

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, \delta_{nk} = \delta < \infty, \quad \overline{\lim_{n\to\infty}}\, \sigma_{nk} = 1,$$

то

$$Q^{(1)}_{\beta_1,\ldots,\beta_l;n} = \sum_{r=1}^{t-l} T_1^{(r)} \sum_{\overline{B}_{l,t-r}} \frac{1}{h_1! \ldots h_l!} \prod_{s=1}^{l} (L_{nk}^{(\overline{\beta}_s)})^{h_s} + O(\varepsilon_{nk}),$$

$$Q^{(2)}_{\beta_1,\ldots,\beta_l;n} = \sum_{\overline{B}_{l+1,t}} \frac{1}{h_1! \ldots h_{l+1}!} \prod_{s=1}^{l+1} (L_{nk}^{(\overline{\beta}_s)})^{h_s} + O(\varepsilon_{nk}),$$

где

$$L_{nk}^{(\overline{\beta})} = \sum_{i=1}^{k-\beta_s} p_{01}^{(i+1)} T^{(\overline{\beta}_s)}_{i+1},$$

$$\overline{B}_{l,t} = \left\{ \begin{matrix} (h_1, \ldots, h_l) \\ (\overline{\beta}_1, \ldots, \overline{\beta}_l) \end{matrix} : \begin{matrix} h_1\overline{\beta}_1 + \ldots + h_l\overline{\beta}_l = t, \\ 1 \leqslant \overline{\beta}_1 < \overline{\beta}_2 < \ldots < \overline{\beta}_l \leqslant t \end{matrix} \right\}.$$

В силу (3), (4), (10), (11) и $\lim\limits_{n\to\infty} p_{n1} = p_1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_{nk} = 0$ находим $\lim\limits_{n\to\infty} MS_{nk}^m = A_m$. Нетрудно показать, что $|A_m| \leqslant [2m(\delta + 1/c)]^m$. Поэтому радиус сходимости степенного ряда $\sum\limits_{m=1}^{\infty} \frac{A_m}{m!} t^m$ отличен от нуля, что доказывает теорему 1. Аналогично доказываются теоремы 2, 3.

1. *Марушин М. Н.* Центральные моменты суммы случайных величин, полученных симметризацией цепи Маркова с двумя состояниями.— Теория вероятностей и мат. статистика, 1983, вып. 28, с. 79—83.
2. *Лоэв М.* Теория вероятностей.— М. : Изд-во иностр. лит., 1962.— 719 с.

Киев. ин-т инженеров гражд. авиации

Получено 24.11.83

УДК 517.949.2

Ю. А. Митропольский, Д. И. Мартынюк, А. И. Юрчик

Задача управления для систем дифференциальных уравнений второго порядка с запаздывающим аргументом

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом

$$d^2x(t)/dt^2 = f(t, x(t), x(t-\Delta), dx(t)/dt, dx(t-\Delta)/dt, u^{(1)}, u^{(2)}), \quad (1)$$

где $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$, причем $f(t, x(t), x(t-\Delta), dx(t)/dt, dx(t-\Delta)/dt, u^{(1)}, u^{(2)})$ периодична по t с периодом ω, $0 \leqslant \Delta \leqslant \omega$.

Поставим задачу: отыскать управления $u^{(1)}$ и $u^{(2)}$ таким образом, чтобы решение $x(t)$ уравнения (1) было периодическим по t с периодом ω и удовлетворяло условиям

$$x(0) = x_0, \quad dx(0)/dt = x_1, \quad x_0, x_1 \in E_n. \quad (2)$$

При решении поставленной задачи будем применять численно-аналический метод [1—3].

Для непрерывной на отрезке $0 \leqslant t \leqslant \omega$ функции $f(t)$ введем операторы L, $\overline{L}$, L^2, $\overline{L^2}$ с помощью соотношений

$$Lf(t) = \int_0^t [f(t) - \overline{f(t)}]\, dt = (1 - t/\omega)\int_0^t f(s)\, ds - (t/\omega)\int_t^\omega f(s)\, ds,$$

$$\overline{L}f(t) = (1 - t/\omega)\int_0^t f(s)\, ds + (t/\omega)\int_t^\omega f(s)\, ds, \quad (3)$$

$$L^2f(t) = L(Lf(t)) = \int_0^t \left(\int_0^t (f(s) - \overline{f(s)})\, ds - \int_0^t \overline{(f(s) - \overline{f(s)})\, ds}\right) dt =$$

$$= (1 - t/\omega)\int_0^t Lf(s)\, ds - (t/\omega)\int_t^\omega Lf(s)\, ds,$$

$$\overline{L}^2f(t) = (1 - t/\omega)\int_0^t \overline{L}f(s)\, ds + (t/\omega)\int_t^\omega \overline{L}f(s)\, ds,$$

где $\overline{f(t)} = \omega^{-1}\int_0^\omega f(s)\, ds$.