УДК 519.21

Г. П. Буцан

Интегральное представление мультипликативной стохастической полугруппы без условий мартингальности и непрерывности

В настоящей статье продолжено исследование, начатое в работах [1—4], и в ней использованы принятые там обозначения и определения. Нашей целью является доказательство следующей теоремы.

Теорема. *Всякая M_2-полугруппа X_s^t является решением стохастического интегрального уравнения*

$$X_s^t = x_s^t + \int_s^t X_s^\tau d\check{Y}_0^\tau x_\tau^t. \tag{1}$$

Здесь $x_s^t = MX_s^t$, *а* $\check{Y}_s^t = \check{D}(X_s^t) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{m_n} (X_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} - x_{t_{k-1}^n}^{t_k^n})$ *является инфинитезимальной $\check{A}$-полугруппой для* X_s^t.

Доказательство. В силу свойств (4), (7) (16) из работы [4] полугруппы X_s^t и $\check{Y}_s^t$ одновременно непрерывны в каждой точке t отрезка $[0, T]$ справа или слева (в зависимости от точки) в норме $|\cdot|_4$.

Предположим вначале, что X_s^t не имеет скачков $X_{\tau-0}^{\tau+0}$, для которых $|x_{\tau-0}^{\tau+0} - E|_2 \geqslant 1$. Тогда из результатов работы [4] вытекает, что оператор $(x_s^t)^{-1}$ ограничен и функции $|X_s^t|_5$, $|(x_s^t)^{-1}|_2$, $\|X_s^t\|$, $|x_s^t|_2$ ограничены при $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$.

Покажем теперь, что стохастический интеграл

$$\int_s^t X_s^\tau d\check{Y}_0^\tau x_\tau^t = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{m_n} X_s^{t_{k-1}^n} \check{Y}_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} x_{t_k^n}^t, \tag{2}$$

определенный как указанный предел в норме $|\cdot|_4$, существует и не зависит от последовательности разбиений $\{\Delta_n\}$ отрезка $[s, t]$. Подобно [1] для этого достаточно доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что как только для некоторого разбиения Δ_n отрезка $[s, t]$ выполняется соотношение $\delta_n < \delta(\varepsilon)$, то для любого другого разбиения $\Delta_r \supset \Delta_n$ справедливо равенство

$$\Big| \sum_{k=1}^{m_n} X_s^{t_{k-1}^n} \check{Y}_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} x_{t_k^n}^t - \sum_{k=1}^{m_r} X_s^{t_{k-1}^r} \check{Y}_{t_{k-1}^r}^{t_k^r} x_{t_k^r}^t \Big|_4 < \varepsilon. \tag{3}$$

Пусть, как и в [1], $s = t_0^n < t_1^n < \ldots < t_{m_n}^n = t$, $t_{k-1}^n = s_0^k < s_1^k < \ldots < s_{r_k}^k = t_k^n$, $\delta_n = \max_{1\leqslant k\leqslant m_n} (t_k^n - t_{k-1}^n) \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда левая часть неравенства (3) превратится в левую часть следующего соотношения:

$$\Big| \sum_{k=1}^{m_n} X_s^{t_{k-1}^n} \check{Y}_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} x_{t_k^n}^t - \sum_{k=1}^{m_r} \sum_{i=1}^{r_k} X_s^{s_{i-1}^k} \check{Y}_{s_{i-1}^k}^{s_i^k} x_{s_i^k}^t \Big|_4^2 =$$

$$= \Big| \sum_{k=1}^{m_n} \sum_{i=1}^{r_k} X_s^{t_{k-1}^n} \check{Y}_{s_{i-1}^k}^{s_i^k} x_{t_k^n}^t - \sum_{k=1}^{m_n} \sum_{i=1}^{r_k} X_s^{s_{i-1}^k} \check{Y}_{s_{i-1}^k}^{s_i^k} x_{s_i^k}^t \Big|_4^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{m_n} \sum_{i=1}^{r_k} | X_s^{t_{k-1}^n} \check{Y}_{s_{i-1}^k}^{s_i^k} x_{t_k^n}^t - X_s^{s_{i-1}^k} \check{Y}_{s_{i-1}^k}^{s_i^k} x_{s_i^k}^t |_4^2 \leqslant$$

$$\leqslant 2 \Big(\sum_{k=1}^{m_n} \sum_{i=1}^{r_k} | X_s^{t_{k-1}^n} - X_s^{s_{i-1}^k} |_5^2 \cdot | \check{Y}_{s_{i-1}^k}^{s_i^k} |_4^2 \cdot | x_{t_k^n}^t |_2 +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m_n} \sum_{i=1}^{r_k} | X_s^{s_{i-1}^k} |_5 \cdot | \check{Y}_{s_{i-1}^k}^{s_i^k} |_4^2 \cdot | x_{t_k^n}^t - x_{s_i^k}^t |_2^2 \Big) \leqslant$$

$$\leqslant 2 \sum_{k=1}^{m_n} \sum_{i=1}^{r_k} (| X_s^{t_{k-1}^n} |_5^2 \cdot | X_{t_{k-1}^n}^{s_{i-1}^k} - E |_5^2 \cdot | \check{Y}_{s_{i-1}^k}^{s_i^k} |_4^2 \cdot | x_{t_k^n}^t |_2^2 +$$

$$+ | X_s^{s_{i-1}^k} |_5^2 \cdot | \check{Y}_{s_{i-1}^k}^{s_i^k} |_4^2 \cdot | x_{t_k^n}^t |_2^2 \cdot | x_{s_i^k}^t - E |_2^2) \leqslant$$

$$\leqslant 2 \sum_{k=1}^{m_n}\sum_{i=1}^{r_k} (2 | X_s^{t_{k-1}^n}|_5^2 \cdot \{| X_{t_{k-1}^n}^{s_{i-1}^k} - x_{t_{k-1}^n}^{s_{i-1}^k}|_5^2 + | x_{t_{k-1}^n}^{s_{i-1}^k} - E|_2^2\} | \check{Y}_{s_{i-1}^k}^{s_i^k}|_4^2 \cdot | x_{t_k^n}^t|_2^2 +$$

$$+ |X_s^{s_{i-1}^k}|_5^2 \cdot |\check{Y}_{s_{i-1}^k}^{s_i^k}|_4^2 \cdot |x_{t_k^n}^t|_2^2 \cdot | x_{s_i^k}^{t_k^n} - E|_2^2) \leqslant$$

$$\leqslant 2 \sum_{k=1}^{m_n}\sum_{i=1}^{r_k} (2|X_s^{t_{k-1}^n}|_5^2 \cdot \{|(x_s^{t_{k-1}^n})^{-1}|_2^2 \cdot | x_0^{t_{k-1}^n} X_{t_{k-1}^n}^{s_{i-1}^k} (x_0^{s_{i-1}^k})^{-1} - E|_4^2 \times$$

$$\times | x_0^{s_{i-1}^k}|_2^2 + |(x_0^{t_{k-1}^n})^{-1}|_2^2 \cdot | x_0^{s_{i-1}^k} - x_0^{t_{k-1}^n}|_2^2\} \cdot |\check{Y}_{s_{i-1}^k}^{s_i^k}|_4^2 \cdot |x_{t_k^n}^t|_2^2 +$$

$$+ |X_s^{s_{i-1}^k}|_5^2 \cdot |\check{Y}_{s_{i-1}^k}^{s_i^k}|_4^2 \cdot |x^t_{t_k^n}|_2^2 \cdot |(x_0^{s_i^k})^{-1}|_2^2 \cdot |x_0^{t_k^n} - x_0^{s_i^k}|_2^2) \leqslant$$

$$\leqslant \omega(T)\Big[\sum_{k=1}^{m_n}\sum_{i=1}^{r_k} (F(F_{i-1}^k) - F(t_{k-1}^n))(F(s_i^k) - F(s_{i-1}^k)) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m_n}\sum_{i=1}^{r_k} (f(s_{i-1}^k) - f(t_{k-1}^n))^2 (F(s_i^k) - F(s_{i-1}^k)) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m_n}\sum_{i=1}^{r_k} (f(t_k^n) - f(s_i^k))(F(s_i^k) - F(s_{i-1}^k))\Big]. \qquad (4)$$

Здесь $\omega(T)$ — константа, которую можно получить, используя указанную выше ограниченность соответствующих функций и необходимые оценки из работы [4]. Аналогично этой же работе получаем, что правая часть выражения (4) стремится к нулю при $n \to \infty$ и тем самым существование интеграла (2) и его независимость от последовательности разбиений $\{\Delta_n\}$ доказаны.

Отметим теперь, что для любого разбиения $\{t_k^n\} = \Delta_n$ отрезка $[s, t]$ справедливо равенство

$$X_s^t - x_s^t = \sum_{k=1}^{m_n} (X_s^{t_k^n} x^t_{t_k^n} - X_s^{t_{k-1}^n} x^t_{t_{k-1}^n}) = \sum_{k=1}^{m_n} X_s^{t_{k-1}^n} (X_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} - x_{t_{k-1}^n}^{t_k^n}) x^t_{t_k^n},$$

в силу которого, оценок (2) из [1] и (17) из [4] и указанной выше ограниченности соответствующих функций выполняется следующее соотношение:

$$\Big| X_s^t - x_s^t - \sum_{k=1}^{m_n} X_s^{t_{k-1}^n} \check{Y}_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} x^t_{t_k^n} \Big|_4^2 = \Big| \sum_{k=1}^{m_n} X_s^{t_{k-1}^n} (X_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} - x_{t_{k-1}^n}^{t_k^n}) x^t_{t_k^n} -$$

$$- \sum_{k=1}^{m_n} X_s^{t_{k-1}^n} \check{Y}_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} x^t_{t_k^n} \Big|_4^2 = \Big| \sum_{k=1}^{m_n} X_s^{t_{k-1}^n} (X_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} - x_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} - \check{Y}_{t_{k-1}^n}^{t_k^n}) x^t_{t_k^n} \Big|_4^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{m_n} | X_s^{t_{k-1}^n} (X_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} - x_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} - \check{Y}_{t_{k-1}^n}^{t_k^n}) x^t_{t_k^n} |_4^2 \leqslant \sum_{k=1}^{m_n} | X_s^{t_{k-1}^n} |_5^2 \cdot | X_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} - x_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} -$$

$$- \check{Y}_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} |_4^2 \cdot | x^t_{t_k^n} |_2^2 \leqslant \varkappa(T) \Big\{ \sum_{k=1}^{m_n} (F(t_k^n) - F(t_{k-1}^n + 0))(F(t_k^n - 0) - F(t_{k-1}^n)) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m_n} (f(t_k^n) - f(t_{k-1}^n + 0))^2 (F(t_k^n - 0) - F(t_{k-1}^n)) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m_n} (f(t_k^n - 0) - f(t_{k-1}^n))^2 (F(t_k^n) - F(t_{k-1}^n + 0))\Big\}. \qquad (5)$$

Пусть теперь $\varepsilon_n \downarrow 0$ при $n \to \infty$. Покажем, что всегда существует такая монотонная последовательность разбиений $\{\Delta_n\}$, что при каждом n правая часть выражения (5) будет меньше ε_n для всех Δ_m при $m \geqslant n$ и произвольных $\Delta \supset \Delta_m$. Для этого достаточно показать, что такая последовательность разбиений существует для каждого из трех слагаемых, входящих в фигурные скобки в правой части выражения (5). А поскольку все эти доказательства аналогичны, докажем сформулированное утверждение, например, для второго слагаемого.

Для этого, воспользовавшись монотонностью функций $f(\tau)$ и $F(\tau)$, выделим у них конечное число скачков на $[s, t]$ так, чтобы сумма всех оставшихся скачков была меньше $\frac{\varepsilon_1}{12}\min(f^{-2}(t), F^{-1/2}(t))$.

Занумеруем все точки скачков τ_i, $i = \overline{1, \infty}$, функций $f(\tau)$ и $F(\tau)$ так, чтобы первые $N(\varepsilon_1)$ из них были именно теми, в которых происходят выделенные скачки, и представим функции $f(\tau)$ и $F(\tau)$ на $[s, t]$ в виде $f(\tau) = f_1(\tau) + f_2(\tau) + f_3(\tau)$, $F(\tau) = F_1(\tau) + F_2(\tau) + F_3(\tau)$, где $f_1(\tau)$ и $F_1(\tau)$ непрерывны на $[s, t]$, а $f_2(\tau)$, $f_3(\tau)$ и $F_2(\tau)$, $F_3(\tau)$ ступенчатые, причем скачки $f_3(\tau)$ и $F_3(\tau)$ совпадают по месту и величине с теми скачками $f(\tau)$ и $F(\tau)$ соответственно, которые попали в выделенные $N(\varepsilon_1)$ скачков, и только с ними, а скачки $f_2(\tau)$ и $F_2(\tau)$ совпадают с оставшимися скачками $f(\tau)$ и $F(\tau)$ соответственно по месту и величине и только с ними. И кроме того, все $f_i(\tau)$, $F_i(\tau)$, $i = \overline{1, 3}$, монотонно возрастают на $[s, t]$, а $f_2(\tau)$, $f_3(\tau)$ и $F_2(\tau)$, $F_3(\tau)$ соответственно в каждой точке отрезка $[s, t]$ непрерывны слева или справа одновременно в зависимости от выбранной точки.

Легко видеть, что в этих обозначениях второе слагаемое в фигурных скобках в правой части выражения (5) не превышает суммы

$$3\sum_{k=1}^{m_n}(f_1(t_k^n) - f_1(t_{k-1}^n + 0))^2(F(t_k^n - 0) - F(t_{k-1}^n)) +$$

$$+ 3\sum_{k=1}^{m_n}(f_2(t_k^n) - f_2(t_{k-1}^n + 0))^2(F(t_k^n - 0) - F(t_{k-1}^n)) +$$

$$+ 3\sum_{k=1}^{m_n}(f_3(t_k^n) - f_3(t_{k-1}^n + 0))^2(F_1(t_k^n - 0) - F_1(t_{k-1}^n)) +$$

$$+ 3\sum_{k=1}^{m_n}(f_3(t_k^n) - f_3(t_{k-1}^n + 0))^2(F_2(t_k^n - 0) - F_2(t_{k-1}^n)) +$$

$$+ 3\sum_{k=1}^{m_n}(f_3(t_k^n) - f_3(t_{k-1}^n - 0))(F_3(t_k^n - 0) - F_3(t_{k-1}^n)). \qquad (6)$$

Выберем теперь произвольное разбиение $\Delta = \{t_k\}$, $k = \overline{1, M}$, отрезка $[s, t]$ так, чтобы выполнялись условия:

1) $\delta_1 = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant M}(t_k - t_{k-1}) < \min\limits_{0 < i \neq j \leqslant N(\varepsilon_1)}|\tau_i - \tau_j|$;

2) $\sup\limits_{1 \leqslant k \leqslant M}(f_1(t_k) - f_1(t_{k-1}))^2 < \frac{\varepsilon_1}{12}F^{-1}(T)$;

3) $\sup\limits_{1 \leqslant k \leqslant M}(F_1(t_k) - F_1(t_{k-1})) < \varepsilon_1(4N(\varepsilon_1)f^2(T))^{-1}$,

и определим $\Delta_1 = \Delta \cup \bigcup\limits_{i=1}^{N(\varepsilon_1)} \tau_i$. Тогда первое слагаемое в выражении (6) при $n = 1$ в силу условия 2 будет меньше $\varepsilon_1/4$. Его второе слагаемое меньше $\varepsilon_1/4$, поскольку $(f_2(t_k^1) - f_2(t_{k-1}^1 + 0))^2 < \frac{\varepsilon_1}{12}F^{-1}(T)$. Сумма, входящая в третье слагаемое, будет содержать не более $N(\varepsilon_1)$ членов, отличных от нуля, и за счет 3) будет меньше $\varepsilon_1/4$. Четвертое слагаемое будет ограничено величиной $3f^2(T)\sum\limits_{k=1}^{M+N(\varepsilon)}(F_2(t_k^1-0)-F_2(t_{k-1}^1))\leqslant\varepsilon_1/4$, а пятое тождественно равно нулю. Таким образом, для разбиения Δ_1 и всех других содержащих его разбиений второе слагаемое в фигурных скобках выражения (5) будет меньше ε_1.

Выделим теперь у $f(\tau)$ и $F(\tau)$ на $[s, t]$ конечное $N(\varepsilon_2)$ число скачков так, чтобы сумма всех их оставшихся скачков была меньше $\frac{\varepsilon_2}{12}\min(f^{-2}(t), F^{-1/2}(t))$, и взяв Δ_1 вместо Δ в предыдущем построении, получим такое разбиение Δ_2, для которого (и всех содержащих его разбиений) второе слагаемое в фигурных скобках выражения (5) будет меньше ε_2.

Продолжая этот процесс до бесконечности, получаем искомую монотонную последовательность разбиений $\{\Delta_n\}$, $n=\overline{1,\infty}$, для второго слагаемого в фигурных скобках правой части выражения (5). Объединив соответствующие последовательности разбиений для каждого из слагаемых в правой части (5), получим такую последовательность разбиений $\{\overline{\Delta}_n\}$, $n=\overline{1,\infty}$, для которой выполняется соотношение $\left|X_s^t-x_s^t-\sum\limits_{k=1}^{m_n}X_s^{t_{k-1}^n}\check{Y}_{t_{k-1}^n}^{t_k^n}x_{t_k^n}^t\right|_4\to 0$ при $n\to\infty$. Учитывая теперь доказанную выше независимость предела $\int\limits_s^t X_s^\tau d\check{Y}_0^\tau x_\tau^t=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{m_n}X_s^{t_{k-1}^n}\check{Y}_{t_{k-1}^n}^{t_k^n}x_{t_k^n}^t$ от последовательности разбиений $\{\Delta_n\}$, $n=\overline{1,\infty}$, отрезка $[s, t]$, получаем, что M_2-полугруппа X_s^t без скачков $X_{\tau-0}^{\tau+0}$, для которых $|x_{\tau-0}^{\tau+0}-E|_2\geqslant 1$, удовлетворяет уравнению (1).

Рассмотрим общий случай. Для этого выделим из X_s^t, как это сделано в [4], M_2-полугруппы $\overline{X}_s^t$ и $\widetilde{X}_s^t$, первая из которых не содержит таких скачков $X_{\tau-0}^{\tau+0}$, что $|x_{\tau-0}^{\tau+0}-E|_2\geqslant 1$, а вторая является произведением этих скачков. В силу условия (2) в [4], указанных скачков будет только конечное число N, и пусть они происходят в точках τ_i, $i=\overline{1,N}$, упорядоченных по возрастанию. Отметим, что $\overline{X}_s^t$ и $\widetilde{X}_s^t$ (а потому и $M\overline{X}_s^t=\overline{x}_s^t$ и $M\widetilde{X}_s^t=\widetilde{x}_s^t$) не имеют общих точек разрыва и они непрерывны в каждой точке $t\in[0, T]$ слева или справа в зависимости от этой точки. По теореме, доказанной в [4], справедливы формулы

$$\check{Y}_s^t=\check{D}(X_s^t)=\check{D}(\overline{X}_s^t)+\check{D}(\widetilde{X}_s^t)=\check{\overline{Y}}_s^t+\check{\widetilde{Y}}_s^t, \tag{7}$$

где $X_s^t=\overline{X}_s^t\boxtimes\widetilde{X}_s^t$, $x_s^t=\overline{x}_s^t\boxtimes\widetilde{x}_s^t$, $D(\overline{x}_s^t)=\check{\overline{y}}_s^t D(\widetilde{x}_s^t)=\check{\widetilde{y}}_s^t$,

$$\check{\widetilde{Y}}_s^\tau=\begin{cases}X_s^{s+0}-x_s^{s+0}+\sum\limits_{j=1}^{i}(X_{\tau_j-0}^{\tau_j+0}-x_{\tau_j-0}^{\tau_j+0}), & \tau_j<\tau<\tau_{i+1}, \quad i=\overline{1,N},\\ X_s^{s+0}-x_s^{s+0}+\sum\limits_{j=1}^{i-1}(X_{\tau_j-0}^{\tau_j+0}-x_{\tau_j-0}^{\tau_j+0})+(X_{\tau_i-0}^{\tau_i}-x_{\tau_i-0}^{\tau_i}), & \tau=\tau_i,\end{cases}$$

а $\check{\overline{y}}_s^t$ и $\check{\widetilde{y}}_s^t$ также не имеют общих точек разрыва.

По предыдущему $\overline{X}_s^t$ удовлетворяет уравнению (1):

$$\overline{X}_s^t-\overline{x}_s^t=\int\limits_s^t\overline{X}_s^\tau d\check{\overline{Y}}_0^\tau\overline{x}_\tau^t=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{m_n}\overline{X}_s^{t_{k-1}^n}\check{\overline{Y}}_{t_{k-1}^n}^{t_k^n}\overline{x}_{t_k^n}^t. \tag{8}$$

Покажем, что $X_s^t = \overline{X}_s^t \boxtimes \widetilde{X}_s^t$ также удовлетворяет уравнению (1). Для этого вначале предположим, что $\widetilde{X}_s^t$ имеет только один скачок в точке $\tau_1 \in [s, t]$ и рассмотрим следующие случаи: 1) $\tau_1 \notin \Delta_n$; 2) $\tau_1 \in \Delta_n$, $X_{\tau_1-0}^{\tau_1} = E \pmod P$; 3) $\tau_1 \in \Delta_n$, $X_{\tau_1}^{\tau_1+0} = E \pmod P$.

В первом случае для некоторого k справедливо неравенство $t_{k-1} < \tau_1 < t_k$, во втором и третьем — $\tau_1 = t_k$ при некотором k (индекс n у t_k^n для упрощения записи опускаем). В первом случае интегральная сумма для интеграла, стоящего в правой части (1), запишется в виде

$$\sum_{k=1}^{m_n} X_s^{t_{k-1}} \breve{Y}_{t_{k-1}}^{t_k} x_{t_k}^t = \sum_{i=1}^{k-1} \overline{X}_s^{t_{i-1}} \breve{\overline{Y}}_{t_{i-1}}^{t_i} \overline{x}_{t_i}^{\tau_1} x_{\tau_1-0}^{\tau_1+0} \overline{x}_{\tau_1}^t +$$

$$+ \overline{X}_s^{t_{k-1}} [\breve{\overline{Y}}_{t_{k-1}}^{t_k} X_{\tau_1-0}^{\tau_1+0} - x_{\tau_1-0}^{\tau_1+0}] \overline{x}_{t_k}^t + \sum_{i=k+1}^{m_n} \overline{X}_s^{\tau_1} X_{\tau_1-0}^{\tau_1+0} X_{\tau_1}^{t_{i-1}} \breve{\overline{Y}}_{t_{i-1}}^{t_i} \overline{x}_{t_i}^t =$$

$$= \Big(\sum_{i=1}^{k-1} \overline{X}_s^{t_{i-1}} \breve{\overline{Y}}_{t_{i-1}}^{t_i} \overline{x}_{t_i}^{\tau_1} \Big) x_{\tau_1-0}^{\tau_1+0} \overline{x}_{\tau_1}^t + \overline{X}_s^{t_{k-1}} [\breve{\overline{Y}}_{t_{k-1}}^{t_k} + X_{\tau_1-1}^{\tau_1+0} -$$

$$- x_{\tau_1-0}^{\tau_1+0}] \overline{x}_{t_k}^t + \overline{X}_s^{\tau_1} X_{\tau_1-0}^{\tau_1+0} \Big(\sum_{i=k+1}^{m_n} \overline{X}_{\tau_1}^{t_{i-1}} \breve{\overline{Y}}_{t_{i-1}}^{t_i} \overline{x}_{t_i}^t \Big),$$

что в силу непрерывности $\breve{\overline{Y}}_\sigma^\tau$ в точке τ_1 и равенства (8) стремится при $n \to \infty$ к величине

$$\Big(\int_s^{\tau_1} \overline{X}_s^\tau d \breve{\overline{Y}}_0^\tau \overline{x}_\tau^{\tau_1} \Big) x_{\tau_1-0}^{\tau_1+0} \overline{x}_{\tau_1}^t + \overline{X}_s^{\tau_1} [X_{\tau_1-0}^{\tau_1+0} - x_{\tau_1-0}^{\tau_1+0}] \overline{x}_{\tau_1}^t + \overline{X}_s^{\tau_1} X_{\tau_1-0}^{\tau_1+0} \Big(\int_{\tau_1}^t \overline{X}_{\tau_1}^\tau d \breve{\overline{Y}}_0^\tau \overline{x}_\tau^t \Big) =$$

$$= (\overline{X}_s^{\tau_1} - \overline{x}_s^{\tau_1}) x_{\tau_1-0}^{\tau_1+0} \overline{x}_{\tau_1}^t + \overline{X}_s^{\tau_1} X_{\tau_1-0}^{\tau_1+0} \overline{x}_{\tau_1}^t - \overline{X}_s^{\tau_1} x_{\tau_1-0}^{\tau_1+0} \overline{x}_{\tau_1}^t + \overline{X}_s^{\tau_1} X_{\tau_1-0}^{\tau_1+0} (\overline{X}_{\tau_1}^t - \overline{x}_{\tau_1}^t) =$$

$$= \overline{X}_s^{\tau_1} X_{\tau_1-0}^{\tau_1+0} \overline{X}_{\tau_1}^t - \overline{x}_s^{\tau_1} x_{\tau_1-0}^{\tau_1+0} \overline{x}_{\tau_1}^t = X_s^t - x_s^t.$$

Во втором и третьем случаях указанная интегральная сумма принимает вид

$$\sum_{k=1}^{m_n} X_s^{t_{k-1}} \breve{Y}_{t_{k-1}}^{t_k} x_{t_k}^t = \sum_{i=1}^{k-1} \overline{X}_s^{t_{i-1}} \breve{\overline{Y}}_{t_{i-1}}^{t_i} \overline{x}_{\tau_1-0}^{\tau_1} \overline{x}_{\tau_1}^t + \overline{X}_s^{t_{k-1}} (\breve{\overline{Y}}_{t_{k-1}}^{\tau_1} + X_{\tau_1-0}^{\tau_1} -$$

$$- x_{\tau_1-0}^{\tau_1}) x_{\tau_1}^{\tau_1+0} \overline{x}_{\tau_1}^t + \overline{X}_s^{\tau_1} X_{\tau_1-0}^{\tau_1} (\breve{\overline{Y}}_{\tau_1}^{t_{k+1}} + X_{\tau_1}^{\tau_1+0} - x_{\tau_1}^{\tau_1+0}) \overline{x}_{t_{k+1}}^t +$$

$$+ \sum_{i=k+2}^{n} X_s^{\tau_1} X_{\tau_1-0}^{\tau_1+0} \overline{X}_{\tau_1}^{t_{i-1}} \breve{\overline{Y}}_{t_{i-1}}^{t_i} \overline{x}_{t_i}^t. \tag{9}$$

Если теперь $X_{\tau_1-0}^{\tau_1} = E \pmod P$, то в силу непрерывности $\breve{\overline{Y}}_\sigma^\tau$ в точке τ_1 и равенства (8) правая часть выражения (9) при $n \to \infty$ стремится к следующему выражению:

$$\Big(\int_s^{\tau_1} \overline{X}_s^\tau d \breve{\overline{Y}}_0^\tau \overline{x}_\tau^{\tau_1} \Big) x_{\tau_1}^{\tau_1+0} \overline{x}_{\tau_1}^t + \overline{X}_s^{\tau_1} (X_{\tau_1}^{\tau_1+0} - x_{\tau_1}^{\tau_1+0}) \overline{x}_{\tau_1}^t +$$

$$+ \overline{X}_s^{\tau_1} X_{\tau_1}^{\tau_1+0} \Big(\int_{\tau_1}^t \overline{X}_{\tau_1}^\tau d \overline{Y}_0^\tau \overline{x}_\tau^t \Big) = (\overline{X}_s^{\tau_1} - \overline{x}_s^{\tau_1}) x_{\tau_1}^{\tau_1+0} \overline{x}_{\tau_1}^t +$$

$$+ X_s^{\tau_1} X_{\tau_1}^{\tau_1+0} \overline{x}_{\tau_1}^t - X_s^{\tau_1} x_{\tau_1}^{\tau_1+0} \overline{x}_{\tau_1}^t + \overline{X}_s^{\tau_1} X_{\tau_1}^{\tau_1+0} (\overline{X}_{\tau_1}^t - \overline{x}_{\tau_1}^t) =$$

$$= \overline{X}_s^{\tau_1} X_{\tau_1}^{\tau_1+0} \overline{X}_{\tau_1}^t - \overline{x}_s^{\tau_1} x_{\tau_1}^{\tau_1+0} \overline{x}_{\tau_1}^t = X_s^t - x_s^t.$$

В случае $X_{\tau_1}^{\tau_1+0}=E\,(\mathrm{mod}\,P)$ аналогичные рассуждения показывают, что правая часть равенства (9) также стремится к $X_s^t - x_s^t$ при $n\to\infty$.

Итак, теорема остается справедливой, когда у скачкообразной M_2-полугруппы $\tilde{X}_\sigma^\tau$ имеется ровно один скачок на отрезке $[s,t]$. Если теперь $\tilde{X}_\sigma^\tau$ имеет ровно два скачка в точках τ_1 и τ_2, $s\leqslant\tau_1<\tau_2\leqslant t$, то, аналогично предыдущему, M_2-полугруппу X_σ^τ на отрезке $[s,t]$ можно представить в виде $X_\sigma^\tau=(1)\,\overline{X}_\sigma^\tau\boxtimes(1)\,\tilde{X}_\sigma^\tau$, где M_2-полугруппа $(1)\ \overline{X}_\sigma^\tau$ удовлетворяет уравнению (1), а скачкообразная M_2-полугруппа $(1)\ \tilde{X}_\sigma^\tau$ имеет ровно один скачок на отрезке $[s,t]$, который происходит в точке τ_2. Причем $(1)\ \overline{X}_\sigma^\tau$, $\check{D}\,((1)\overline{X}_\sigma^\tau)=(1)\,\check{\overline{Y}}_\sigma^\tau$ и $M(1)\,\overline{X}_\sigma^\tau$ непрерывны в точке τ_2. Повторяя предыдущие рассуждения при $(1)\ \overline{X}_\sigma^\tau=\overline{X}_\sigma^\tau$, $(1)\ \tilde{X}_\sigma^\tau=\tilde{X}_\sigma^\tau$, получаем, что и в этом случае $\tilde{X}_\sigma^\tau$ удовлетворяет уравнению (1). Поскольку $\tilde{X}_\sigma^\tau$ может иметь только конечное число N скачков на $[0,T]$, то, повторяя приведенные рассуждения N раз, получаем доказательство теоремы в общем случае.

1. *Буцан Г. П.* Об инфинитезимальных полугруппах для одного класса стохастических полугрупп.— Укр. мат. журн., 1983, 35, № 2, с. 221—224.
2. *Буцан Г. П.* О первообразных полугруппах для одного класса стохастических полугрупп.— Там же, № 4, с. 485—489.
3. *Буцан Г. П.* Об одном классе стохастических полугрупп.— Там же, 1984, 36, № 1, с. 3—7.
4. *Буцан Г. П.* Об инфинитезимальных полугруппах для стохастических полугрупп без условий непрерывности и мартингальности.— Там же, 1985, 37, № 3, с. 285—294.

Ин-т математики АН УССР, Киев Получено 23.03.84