УДК 517.9

Т. В. Хрисанова

О линейном регуляторе для систем с зашумленными коэффициентами

Рассматривается управляемая система линейных дифференциальных уравнений

$$\dot{X}(t) = A(\xi(t))X(t) + BU(t), \quad X(t) \in E^n, \tag{1}$$

где $\xi(t)$ — однородный марковский процесс, принимающий значения на измеримом фазовом пространстве $\Phi = \{\varphi\}$ с порождающим оператором L, так что плотность распределения вероятностей $p(t, \varphi)$ относительно некоторой меры $d\varphi$ на Φ удовлетворяет уравнению $\partial p(t, \varphi)/\partial t = Lp(t, \varphi)$; $A(\varphi) = A + \mu A_1(\varphi)$, A, B — постоянные матрицы, $A_1(\varphi)$ — ограничена на Φ, $U(t)$ — управление из класса допустимых управлений U. В дальнейшем предполагается $U(t) = -K(t)X(t)$, где $K(t) = (k_{ij}(t))$ — некоторая неслучайная матрица.

В качестве критерия управления для системы (1) рассматривается функционал

$$I = E\left[\int_0^\infty X^*(t)(Q(t) + K^*(t)\Lambda(t)K(t))X(t)\,dt\right], \tag{2}$$

где $E[\cdot]$ — знак математического ожидания, $Q(t) = (q_{ij}(t))$, $\Lambda(t) = (\lambda_{ij}(t))$ — положительно определенные матрицы, непрерывные по своим аргументам.

Введем следующие обозначения. Пусть $V = (v_{ij})$, $W = (w_{ij})$ — две матрицы одного и того же порядка. Определим их скалярное произведение по формуле $V \circ W = \sum\limits_{i,j} v_{ij}w_{ij}$. Очевидна линейность и коммутативность определенного таким образом произведения матриц, $V \circ W = W \circ V$, $(\alpha V_1 + \beta V_2) \circ W = \alpha V_1 \circ W + \beta V_2 \circ W$.

При этих обозначениях функционал (2) запишется в виде

$$I = \int_0^\infty (Q(t) + K^*(t)\Lambda(t)K(t)) \circ M(t)\,dt, \tag{3}$$

где $M(t) = EX(t)X^*(t)$ — матрица вторых моментов решения системы (1).

Задача для системы (1) состоит в нахождении управления $U(t) \in U$, обеспечивающего минимум критерия качества (3) при заданном начальном условии $X(0)$.

Запишем систему (1) в виде

$$\dot{X}(t) = (A(\xi(t)) - BK(t))X(t).$$

Пусть $M(t, \varphi)$ — матрица вторых частных моментов решения $X(t)$, определяемая по формуле $M(t, \varphi) = \int\limits_{E^n} YY^* p(t, Y, \varphi)\,dY$, где $p(t, Y, \varphi)$ — совместная плотность распределения вероятностей пары процессов $(X(t), \xi(t))$ на множестве $E^n \times \Phi$. Матрица вторых моментов $M(t)$ связана с матрицей вторых частных моментов $M(t, \varphi)$ формулой $M(t) = \int\limits_\Phi M(t, \varphi)\,d\varphi$. Для матрицы $M(t, \varphi)$ справедлива система моментных уравнений второго порядка [5]

$$\frac{\partial M(t, \varphi)}{\partial t} = (A(\varphi) - BK)M(t, \varphi) + M(t, \varphi)(A(\varphi)) - BK)^* + LM(t, \varphi), \quad M(0, \varphi) = M_0(\varphi). \tag{4}$$

Управление $U(t) = -K(t)X(t)$ называется допустимым, если система (4) имеет асимптотически устойчивое положение равновесия $M(t, \varphi) \equiv \equiv 0$. Задача оптимизации системы (1) с критерием (3) в среднем квадратическом ставится как задача оптимизации неслучайной системы (4) с критерием (3).

Принцип Беллмана. Обозначим функцию

$$S(W, t) = \min_{K(\tau),\ t \leqslant \tau < \infty} \int_t^\infty (Q + K^*(\tau)\Lambda K(\tau)) \circ M(\tau)\, d\tau$$

при условии $M(t) = W$, где $W > 0$ — некоторая положительно определенная матрица. Принцип Беллмана запишется как

$$S(W, t) = \min_{K(\tau),\ t \leqslant \tau \leqslant t+\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} (Q + K^*(\tau)\Lambda K(\tau)) \circ M(\tau) + S(W', t + \Delta t),$$

где $W' = M(t + \Delta t)$ при условии, что $M(t) = W$.

Пусть $L_2(\Phi)$ — пространство функций L_2 на множестве Φ, последовательность функций $\{P_k(\varphi)\rho^{0,5}(\varphi),\ k = 0, \pm 1, \ldots\}$ — его ортонормированный базис, $\rho(\varphi) \geqslant 0$ — весовая функция и функции $\{P_k(\varphi)\rho(\varphi)\}$ являются собственными функциями линейного оператора L,

$$LP_k(\varphi)\rho(\varphi) = -\lambda_k P_k(\varphi)\rho(\varphi), \qquad P_0 \equiv 1, \qquad P_{-j} = \bar{P}_j, \qquad \lambda_{-j} = \bar{\lambda}_j,$$

$$\lambda_0 = 0, \qquad (P_k, P_j) = \int_\Phi P_k(\varphi)\bar{P}_j(\varphi)\rho(\varphi)\, d\varphi.$$

Подставляя разложение

$$M(t, \varphi) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k(t) P_k(\varphi)\rho(\varphi), \quad C_0(t) = M(t)$$

в систему (4), получаем бесконечную систему

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\dot{C}_0 = (A - BK)C_0 + C_0(A - BK)^* + \mu \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (A_{0k}C_k + C_k A_{0k}^*),$$

$$\dot{C}_1 = (A - BK)C_1 + C_1(A - BK)^* - \lambda_1 C_1 - \mu \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (A_{1k}C_k + C_k A_{1k}^*),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

где матрицы A_{jk} определяются соотношениями $A_{jk} = \int_\Phi A_1(\varphi)\bar{P}_k(\varphi)P_j(\varphi) \times \times \rho(\varphi)\, d\varphi$.

Проводя рассуждения, связанные с получением уравнения Беллмана, имеем

$$\min_K \Bigg[(Q + K^*\Lambda K) \circ W + R \circ \Big(AC_0 + C_0A^* - (BKC_0 + C_0K^*B^*) + + \mu \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (A_{0k}C_k + C_kA_{0k}^*)\Big) + \frac{dR}{dt} \circ W \Bigg] = 0 \qquad (5)$$

при условии $S(W, t) = R(t) \circ W$. Минимизация формы (5) равносильна минимизации формы

$$\Psi(K) = \sum_{i,j,s,p} (k_{sj}\lambda_{sp}k_{pi}w_{ij} - b_{js}k_{sp}w_{ps}r_{ij} - w_{js}k_{ps}l_{ip}r_{ij}).$$

Равенства $\partial\Psi/\partial k_{cd}$ можно представить в матричном виде как

$$(\Lambda K - B^*R) W + W (K^*\Lambda - RB) = 0. \tag{6}$$

Матричное равенство (6) справедливо для $W > 0$, следовательно, должно выполняться равенство $\Lambda K - B^*R = 0$ или $K = \Lambda^{-1}B^*R$.

Найдем значение минимума формы $\Psi(K)$. Имеем

$$\Psi(\Lambda^{-1}B^*R) = RB\Lambda^{-1}B^*R\circ W - (B\Lambda^{-1}B^*RW + WRB\Lambda^{-1}B^*)\circ R.$$

Легко показать справедливость следующих действий:

$$RNR\circ W = WRN\circ R, \qquad (AW + WA^*)\circ R = (A^*R + RA)\circ W.$$

Полагая $D_k = C_kC_0^{-1}$, запишем уравнение (5) в виде

$$\Big[Q - RB\Lambda^{-1}B^*R + A^*R + RA + \mu \sum_{k=-\infty}^{+\infty} D_k^*A_{0k}^*R +$$

$$+ \mu R \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_{0k}D_k + \frac{dR}{dt}\Big]\circ W = 0.$$

Это равенство справедливо при любом W, поэтому для R должно выполняться матричное уравнение

$$\frac{dR}{dt} = RB\Lambda^{-1}B^*R - Q - \left(\left(A^* + \mu \sum_{k=-\infty}^{+\infty} D_k^*A_{0k}^*\right) R +\right.$$

$$\left. + R\left(A + \mu \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_{0k}D_k\right)\right), \quad D_0 = E. \tag{7}$$

Это уравнение решается совместно с моментной системой (4) при условии $R(+\infty) = R$.

В случае отсутствия возмущений ($\mu = 0$) уравнение (7) совпадает с известным уравнением Риккати [2, 3] для нахождения линейного оптимального регулятора невозмущенной линейной системы (1). При возмущении системы ($\mu \neq 0$) регулятор меняется. Это изменение определяется поправкой $\mu \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} A_{0k}D_k$ в матричном уравнении (7).

Пример. Рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t) = (a + \mu\xi(t))\, x(t) + bu(t),$$

где $\xi(t)$ — марковский процесс с двумя состояниями $\Phi = \{\pm 1\}$ с интенсивностью перехода λ. Критерием качества является интеграл $I = \int\limits_0^\infty M(t)(q + lk^2(t))\, dt$, где q, l — постоянные, $M(t) = Ex^2(t)$ — второй момент решения $x(t)$, $k(t)$ — непрерывная функция.

Моментное уравнение (4) для данной задачи является уравнением относительно вектора вторых частных моментов $M(t, \varphi) = (M(t, 1), M(t, -1))^*$ и имеет вид

$$\frac{d}{dt} M(t, \varphi) = 2\begin{pmatrix} a - bk + \mu & 0 \\ 0 & a - bk - \mu \end{pmatrix} M(t, \varphi) + \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \lambda & -\lambda \end{pmatrix} M(t, \varphi). \tag{8}$$

Решение уравнения (8) представим в виде

$$2M(t, \varphi) = C_0(t) P_0 + C_1(t) P_1, \quad P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \rho(\pm 1) = 0{,}5,$$

где $C_0(t)$, $C_1(t)$ — числовые функции, являющиеся координатами вектора

$2M(t, \varphi)$ в базисе P_0, P_1. Моментное уравнение (8) запишем следующим образом:

$$\dot{C}_0(t) = 2(a - b^2R(t)/l)\,C_0 + 2\mu C_1(t),$$
$$\dot{C}_1(t) = 2\mu C_0(t) + 2(a - \lambda - b^2R(t)/l)\,C_1(t). \qquad (9)$$

Уравнение (7) для данной задачи имеет вид

$$\frac{dR}{dt} = b^2R^2/l - q - 2(a + \mu C_1/C_0)\,R, \quad R(+\infty) = R. \qquad (10)$$

Таким образом, задача о линейном регуляторе для уравнения (8) свелась к решению системы (9) совместно с уравнением (10).

Сделав замену $C_1/C_0 = z$, получим из системы (9) уравнение $z = -2\mu z^2 - 2\lambda z + 2\mu$. Это уравнение Риккати с постоянными коэффициентами решается с помощью замены переменных $u = \exp(S2\mu z dt)$

$$u'' + 2\lambda u' - 4\mu^2 u = 0, \quad z(t) = \frac{(\alpha - \lambda)\,e^{\alpha t} - ce^{-\alpha t}(\alpha + \lambda)}{2\mu\,(e^{\alpha t} + ce^{-\alpha t})},$$
$$\alpha = \sqrt{\lambda^2 + 4\mu^2}.$$

Легко видеть, что

$$\lim_{t \to +\infty} z(t) = 2\mu/(\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 4\mu^2}) = \mu/\lambda + \theta(\mu^2).$$

При малых μ для устойчивого при $t \to +\infty$ постоянного решения R уравнения (10) имеем

$$R = l/b^2\,[a + \sqrt{a^2 + b^2q/l} + \mu^2/\lambda\,(1 + a/\sqrt{a^2 + b^2q/l}) + \theta(\mu^3)], \quad k = bR/l.$$

Эта формула показывает явную зависимость регулятора от параметров и интенсивности возмущений коэффициента исходного уравнения.

1. *Беллман Р.* Динамическое программирование.— М.:Изд-во иностр. лит., 1962.— 312 с,
2. *Валеев К. Г., Финин Г. С.* Построение функций Ляпунова.— Киев : Наук. думка. 1981.— 412 с.
3. *Зубов В. И.* Лекции по теории управления.— М. : Наука, 1975.— 496 с.
4. *Хрисанова Т. В.* Управляемость моментных систем.— М., 1981.— 7 с.— Рукопись деп. в ВИНИТИ № 5835—81. Деп.
5. *Хрисанов С. М.* О нелинейных уравнениях Фриша.— Укр. мат. журн., 1980, **32**, № 1, с. 80—89.

Ин-т нар. хоз-ва, Киев

Получено 15.06.83