УДК 517.938

С. И. Трофимчук

Критерий «грубой» диагонализируемости систем линейных расширений компактных потоков

Выяснению достаточных и необходимых условий расщепляемости линейных систем посвящены многие работы (см., например, [1—4]).

Докажем критерий «грубой» диагонализируемости (гр. диаг.) систем линейных расширений потоков на некоторых компактных пространствах (см. определение 2). Основной результат сформулирован в теореме 3.

Рассматривается система вида

$$dx/dt = P(\varphi)x, \quad \varphi_t(\varphi): K \times R \to K. \tag{1}$$

Здесь и в дальнейшем будем считать, что $x \in R^n$, R^n — n-мерное евклидово пространство, K — компактное метрическое пространство с потоком $\varphi_t(\varphi)$ на нем: $\varphi \in K$, $\varphi_0(\varphi) = \varphi$. Поток $\varphi_t(\varphi)$ фиксирован, $C(K, M_n(R))$ — банахово пространство непрерывных матричнозначных функций на K с нормой $\|\cdot\|$ равномерной сходимости, $P(\varphi) \in C(K, M_n(R))$.

Естественное определение диагонализируемости существенно зависит от пространства K. Для упрощения будем полагать, что фундаментальная группа $\pi_1(K)$ тривиальна.

Определение 1 (пространства $C'(K, M_n(R))$):

$$C'(K, M_n(R)) \overset{\Delta}{=} \{S(\varphi) \in C(K, M_n(R)): \forall \varphi \ \exists dS(\varphi_t(\varphi))/dt|_{t=0} \overset{\Delta}{=}$$

$$\overset{\Delta}{=} \dot{S}(\varphi) \wedge \dot{S}(\varphi) \in C(K, M_n(R))\}.$$

Определение 2 («грубой» диагонализируемости (гр. диаг.)). *Система* (1) *называется гр. диаг., если* $\exists \varepsilon > 0 \ \forall Q(\varphi) \in C(K, M_n(R)): \|Q(\varphi) - P(\varphi)\| < \varepsilon \exists S_Q(\varphi) \in C'(K, M_n(R))$, $\det S(\varphi) \neq 0$, *матрица* $S_Q^{-1}(\varphi) Q(\varphi) S_Q(\varphi) - S_Q^{-1}(\varphi) \dot{S}_Q(\varphi)$ *является диагональной и, кроме того,* $S_Q(\varphi)$ *можно выбрать непрерывно зависящей от* $Q(\varphi)$. Отметим, что решение задачи о диагонализируемости системы (1) в условиях малых возмущений

$P(\varphi)$, характерных для такого рода задач, и есть решение задачи о «грубой» диагонализируемости.

Определение 3 (разделенных инвариантных подрасслоений (р. и. п.)). *Будем говорить, что система* (1) *имеет свойство р. и. п., если произведение $K \times R^n$ разлагается в сумму Уитни одномерных, инвариантных относительно* (1) *подрасслоений $V_1, \ldots, V_n$:*

$$K \times R^n = V_1 \oplus \ldots \oplus V_n, \tag{2}$$

причем каждое подрасслоение V_i непрерывно зависит от изменения $P(\varphi)$.

В дальнейшем будем считать разложение (2) фиксированным и согласно определению 3 рассматривать его малые возмущения.

Непосредственно из определений 2 и 3 следует утверждение.

Теорема 1. *Система* (1) *«грубо» диагонализируема в том и только в том случае, когда имеет свойство р. и.п.*

Лемма 1. *Пусть $S_1(\varphi)$ и $S_2(\varphi)$, $S_i(\varphi) \in C'(K)$ — матрицы, осуществляющие диагонализацию* (1) *согласно разложению* (2) *к видам*

$$\operatorname{diag}\{p_1(\varphi), \ldots, p_n(\varphi)\}, \quad \operatorname{diag}\{q_1(\varphi), \ldots, q_n(\varphi)\}$$

соответственно. Тогда существует такая перестановка σ, что

$$p_i(\varphi) = q_{\sigma(i)}(\varphi) - \dot{\alpha}(\varphi)(\alpha(\varphi))^{-1}, \quad \alpha(\varphi) \neq 0 \;\forall\varphi, \quad \alpha(\varphi) \in C'(K, R). \tag{3}$$

Доказательство. Пусть $S_1(\varphi) = \operatorname{Colon}(e_1(\varphi), \ldots, e_n(\varphi))$, $S_2(\varphi) = \operatorname{Colon}(a_1(\varphi), \ldots, a_n(\varphi))$. Тогда согласно предположению существует n функций $\alpha_i(\varphi)$ типа (3) и перестановочная матрица $\sigma \in M_n(R)$: $S_1(\varphi) = S_2(\varphi)\,\sigma A(\varphi)$, где $\mathrm{A}(\varphi) = \operatorname{diag}\{\alpha_1(\varphi), \ldots, \alpha_n(\varphi)\}$. Но тогда

$$\operatorname{diag}\{p_1(\varphi), \ldots, p_n(\varphi)\} = S_1^{-1}(\varphi)\,P(\varphi)\,S_1(\varphi) - S_1^{-1}(\varphi)\,\dot{S}_1(\varphi) =$$

$$= A^{-1}(\varphi)\,\sigma^{-1}\operatorname{diag}\{q_1(\varphi), \ldots, q_n(\varphi)\}\,\sigma\mathrm{A}(\varphi) - \mathrm{A}^{-1}(\varphi)\,\dot{\mathrm{A}}(\varphi) =$$

$$= \operatorname{diag}\{q_{\sigma(1)}(\varphi), \ldots, q_{\sigma(n)}(\varphi)\} - \operatorname{diag}\{\dot{\alpha}_1(\varphi)(\alpha_1(\varphi))^{-1}, \ldots, \dot{\alpha}_n(\varphi)(\alpha_n(\varphi))^{-1}\}.$$

Замечание. Поскольку фундаментальные матрицы $\Omega_\tau^t(\varphi)$, $\tilde{\Omega}_\tau^t(\varphi)$ расширений

$$dx/dt = p_i(\varphi)\,x, \quad \varphi_t(\varphi): K \times R \to K; \quad dx/dt = q_{\sigma(i)}x, \quad \varphi_t(\varphi): K \times R \to K,$$

связаны соотношением $\Omega_\tau^t(\varphi) = \tilde{\Omega}_\tau^t(\varphi)\,\alpha(\varphi_\tau(\varphi))(\alpha(\varphi_t(\varphi)))^{-1}$, то их спектры совпадают (нужные нам определение и свойства спектра расширений см. в [5]). Это замечание и лемма 1 показывают, что существует некоторый произвол в выборе матрицы $S(\varphi)$, не затрагивающий основных свойств приводящих отношений , чем мы будем пользоваться в дальнейшем.

Определение 4. *Будем говорить, что система* (1) *имеет свойство экспоненциальной дихотомии (э. д.) с проектором $C(\varphi)$ ранга r, если существует единственная функция Грина (см. [4]) системы* (1) *вида*

$$G_0(\tau, \varphi) = \begin{cases} \Omega_\tau^0(\varphi)\,C(\varphi_\tau(\varphi)), & \tau \leqslant 0, \\ \Omega_\tau^0(\varphi)(C(\varphi_\tau(\varphi)) - \mathfrak{E}), & \tau > 0, \end{cases}$$

где $C(\varphi) \in C'(K, M_n(R))$ — проектирующая функция ранга $r: C^2(\varphi) \equiv C(\varphi)$.

Теорема 2. *Система* (1) *«грубо» диагонализируема тогда и только тогда, когда существует $n-1$ функция $\lambda_1(\varphi), \ldots, \lambda_{n-1}(\varphi): \lambda_i(\varphi) \in C(K, R)$ такая, что система*

$$dx/dt = (P(\varphi) - \lambda_i(\varphi)\,\mathfrak{E})\,x, \quad \varphi_t(\varphi): K \times R \to K \tag{4}$$

имеет свойство э. д. с проектором $C_i(\varphi)$ ранга i $\forall i = \overline{1, n-1}$.

Лемма 2. *Пусть гр. диаг. система* (1) *приведена к диагональной форме*

$$dx/dt = \operatorname{diag}\{p_1(\varphi), \ldots, p_n(\varphi)\}x, \varphi_t(\varphi): K \times R \to K. \tag{5}$$

Тогда система первого порядка

$$dx/dt = (p_i(\varphi) - p_j(\varphi))x, \quad \varphi_t(\varphi): K \times R \to K \tag{6}$$

обладает экспоненциальной дихотомией $\forall i \neq j$.

Доказательство леммы. Согласно лемме 1 и замечанию без ограничения общности можно считать $j = n$. Так как система (1) гр. диаг., то таковыми должны быть система (5) и система

$$dx/dt = \mathrm{diag}\,(p_1(\varphi) - p_n(\varphi), \ldots, p_{n-1}(\varphi) - p_n(\varphi), 0) \stackrel{\Delta}{=} \mathrm{diag}\,(m_1(\varphi), \ldots$$
$$\ldots, m_{n-1}(\varphi), 0) \stackrel{\Delta}{=} M(\varphi)x, \quad \varphi_t(\varphi): K \times R \to K, \tag{5'}$$

т. е. $\exists \delta > 0$: для произвольных возмущений $\mathrm{E}(\varphi)$ матрицы $M(\varphi)$: $: \| \mathrm{E}(\varphi) \| < \delta$ должна существовать приводящая матрица $S_{\mathrm{E}}(\varphi)$, причем согласно предположению в начале статьи, лемме 1 и замечанию можно считать, что $S_0(\varphi) = \mathrm{E}$, т. е. недиагональные элементы матрицы $S_{\mathrm{E}}(\varphi)$ малы по норме, а диагональные близки к единице. Кроме того, можно предположить, что элемент $s_{nn}(\varphi)$ матрицы $S_{\mathrm{E}}(\varphi)$ равен 1, а $\det S(\varphi) \equiv 1$ при произвольных (но достаточно малых $\| \mathrm{E}(\varphi) \| \leqslant \delta$) возмущениях $\mathrm{E}(\varphi)$. В дальнейшем индекс E в обозначении $S_{\mathrm{E}}(\varphi)$ будем опускать.

Но тогда, выбрав матрицу $\mathrm{E}(\varphi)$ в виде $\mathrm{E}(\varphi) = \mathrm{Colon}\,(0, \ldots, \bar{\varepsilon}(\varphi))$, где $\bar{\varepsilon}(\varphi) = (\varepsilon_1(\varphi), \ldots, \varepsilon_{n-1}(\varphi), 0)$, $\varepsilon_i(\varphi) \in C(K, R)$, получаем, что для всех $\varepsilon_i(\varphi)$: $: \Sigma\varepsilon_i^2(\varphi) \leqslant \delta^2$ должно быть разрешимо относительно матрицы $S(\varphi)$ указанного выше вида дифференциальное уравнение

$$S^{-1}(\varphi)\{M(\varphi) + E(\varphi)\}S(\varphi) - S^{-1}(\varphi)\dot{S}(\varphi) = D(\varphi), \quad \varphi_t(\varphi): K \times R \to K, \tag{7}$$

где $D(\varphi)$ — некоторая диагональная матрица: $D(\varphi) = \mathrm{diag}\,\{d_1(\varphi), \ldots, \ldots, d_n(\varphi)\}$. Запишем уравнение (7) в матричной форме:

$$\left[\begin{array}{c|c} \tilde{S}_1 & \tilde{S}_2 \\ \hline \tilde{S}_3 & \tilde{S}_{nn} \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} \tilde{M} & \tilde{\varepsilon} \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} S_1 & S_2 \\ \hline S_3 & 1 \end{array}\right] - \left[\begin{array}{c|c} \tilde{S}_1 & \tilde{S}_2 \\ \hline \tilde{S}_3 & \tilde{S}_{nn} \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} \dot{S}_1 & \dot{S}_2 \\ \hline \dot{S}_3 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \tilde{D} & 0 \\ \hline 0 & d_n(\varphi) \end{array}\right],$$
$$\varphi_t(\varphi): K \times R \to K.$$

Здесь $\left[\begin{array}{c|c} \text{Б}_{11} & \text{Б}_{12} \\ \hline \text{Б}_{21} & \text{Б}_{22} \end{array}\right]$ — разделение матрицы на блоки Б_{11}, Б_{12}, Б_{21}, Б_{22} размерностей $(n-1) \times (n-1)$, $(n-1) \times 1$, $1 \times (n-1)$, 1×1 соответственно. Учитывая, что $\det \tilde{S}_1(\varphi) \neq 0 \forall \varphi$ для блока Б_{12}, получаем следующее уравнение:

$$dS_2/dt = \tilde{M}(\varphi)S_2 + \tilde{\varepsilon}, \quad \varphi_t(\varphi): K \times R \to K. \tag{8}$$

Существование решения $S_2 \in C'(K, R^{n-1})$ уравнения (8) при достаточно малых $\tilde{\varepsilon} \in C(K, R^{n-1})$ в силу диагональности $M(\varphi)$ эквивалентно существованию решения $x = u(\varphi) \in C'(K, R)$ при достаточно малых $\varepsilon \in C(K, R)$ у линейного расширения первого порядка $\forall i$:

$$dx/dt = m_i(\varphi)x + \varepsilon(\varphi), \quad \varphi_t(\varphi): K \times R \to K. \tag{9}$$

Кроме того, поскольку элемент s_{nn} был зафиксирован ($s_{nn} = 1$), то такое решение должно быть единственным. Но тогда, доказав, что расширение (9) имеет функцию Грина, мы докажем утверждение леммы 2.

Предположим, однако, что расширение (9) не имеет функции Грина. Рассмотрим сопряженное расширение

$$dx/dt = -m_i(\varphi)x, \quad \varphi_t(\varphi): K \times R \to K. \tag{10}$$

Согласно критерию И. У. Бронштейна существования функции Грина [6] для расширения (9) $\exists \varphi_0 \in K$: что уравнение $dx/dt = -m_i(\varphi_t(\varphi_0))x = -a(t)x$ имеет ограниченное решение $\sigma(t)$, т. е. $\exists C \in R: 0 \leqslant \sigma(t) = \exp\{-\int_t^0 a(t)dt\} < C$. Возьмем $\varepsilon(\varphi) \equiv \varepsilon \in R$ и проинтегрируем (9) вдоль траектории $\varphi_t(\varphi_0): x(t) = [\sigma(t)]^{-1}\{x(0) + \varepsilon \int_t^0 \sigma(\tau)\,d\tau\}$. Мы должны выбрать такое значение $x(0)$, чтобы решение $x(t)$ было ограниченным, но это, как легко убедиться, невозможно сделать. Итак, допустив, что расширение (9) не обладает функцией Грина, мы получили, что для сколь угодно малых $\varepsilon(\varphi)$ расширение (9) может не иметь решения $u(\varphi) \in C'(K, R)$.

Лемма 3. *Пусть расширения*

$$dx/dt = (P(\varphi) - \lambda_i(\varphi)\mathcal{E})x, \quad \varphi_t(\varphi): K \times R \to K, \quad i = 1, 2, \tag{11}$$

имеют э. д. с проекторами $C_i(\varphi)$ ранга r. Тогда $C_1(\varphi) \equiv C_2(\varphi)$ $(\lambda_i(\varphi) \in C(K, R))$.

Доказательство. Согласно условиям леммы справедливы соотношения

$$\exp\left\{-\int_\tau^t \lambda_i(\varphi_s(\varphi_0))\,ds\right\} \|\Omega_0^t(\varphi_0)\,C_i(\varphi_0)\,\Omega_\tau^0(\varphi_0)\| \leqslant$$

$$\leqslant K_i \exp\{-\gamma_i(t-\tau)\}, \quad t \geqslant \tau, \tag{12}$$

$$\exp\left\{-\int_\tau^t \lambda_i(\varphi_s(\varphi_0))\,ds\right\} \|\Omega_0^t(\varphi_0)\,(C_i(\varphi_0) - \mathcal{E})\,\Omega_\tau^0(\varphi_0)\| \leqslant$$

$$\leqslant K_i \exp\{\gamma_i(t-\tau)\}, \quad t \leqslant \tau. \tag{13}$$

Зафиксируем произвольную точку φ_0 и рассмотрим функции $f_1(\tau)$ и $f_2(\tau)$:

$$f_1(\tau) = -f_2(\tau) = \int_\tau^0 (\lambda_2(\varphi_s(\varphi_0)) - \lambda_1(\varphi_s(\varphi_0)))\,ds, \quad \tau \geqslant 0.$$

Тогда либо а) $\exists$ последовательность чисел $\tau_k \geqslant 0$, $\tau_k \to +\infty$, что $f_1(\tau_k) < 0{,}5(\gamma_1 + \gamma_2)\tau_k$, либо б) $\exists L > 0$: $f_2(\tau) \leqslant -0{,}5(\gamma_1 + \gamma_2)\tau$ $\forall$ $\tau \geqslant L$.

Поменяем в соотношениях (12), $i = 1$, и (13), $i = 2$, t и τ местами. Тогда из (12), $i = 1$, и (13), $i = 2$, при $t = 0$ следует

$$\|(C_2(\varphi) - \mathcal{E})\,C_1(\varphi)\| \leqslant K_1K_2 \exp\{-(\gamma_1 + \gamma_2)\tau + f_1(\tau)\}, \quad \tau \geqslant 0, \tag{14}$$

а из (12), $i = 2$, (13), $i = 1$, при $\tau = 0$ —

$$\|(C_1(\varphi) - \mathcal{E})\,C_2(\varphi)\| \leqslant K_1K_2 \exp\{-(\gamma_1 + \gamma_2)t + f_2(t)\}, \quad t \geqslant 0. \tag{15}$$

Наконец, получаем

$$\{\text{а}),\ (14) \Rightarrow C_2(\varphi)\,C_1(\varphi) = C_1(\varphi); \quad \text{б}),\ (15) \Rightarrow C_1(\varphi)\,C_2(\varphi) = C_2(\varphi)\}. \tag{16}$$

Аналогично, рассмотрев функции $f_1(\tau)$, $f_2(\tau)$ при $\tau \leqslant 0$, доказываем справедливость соотношений

$$C_2(\varphi)\,C_1(\varphi) = C_2(\varphi), \quad C_1(\varphi)\,C_2(\varphi) = C_1(\varphi). \tag{17}$$

Из равенств (16), (17) и следует утверждение леммы 3.

Лемма 4. *Пусть расширения* (11) *имеют э. д. ранга r_i с проекторами $C_i(\varphi)$, причем $r_2 > r_1$ $(i = 1, 2)$. Тогда расширение* (18) *первого порядка*

$$dx/dt = (\lambda_2(\varphi) - \lambda_1(\varphi))\,x, \quad \varphi_t(\varphi): K \times R \to K \tag{18}$$

имеет э. д. с нулевым проектором. Кроме того, справедливы следующие коммутационные соотношения:

$$C_2(\varphi)\,C_1(\varphi) \equiv C_1(\varphi)\,C_2(\varphi) \equiv C_1(\varphi). \tag{19}$$

Доказательство. Соотношения (19) немедленно следуют из леммы 3. Свойство э. д. с нулевым проектором для (18) легко следует из леммы 3 и критерия И. У. Бронштейна существования функции Грина [6].

Предположим, что мы привели систему (1) к диагональной форме (5). Согласно лемме 1 и замечанию спектр $\Sigma_i = [a_i, b_i]$ системы $dx/dt = p_i(\varphi)x$, $\varphi_t(\varphi): K \times R \to K$ не зависит (с точностью до перестановки) от приводящей матрицы $S(\varphi)$ при фиксированном разложении (2), поэтому мы можем рассмотреть семейство I сегментов Σ_i, ассоциированное с разложением (2). В семействе I введем отношение порядка: $\Sigma_i < \Sigma_j$, если $a_i < a_j$. (Если мы предположим, что $\exists \Sigma_{s_0}$ и $\Sigma_{k_0}: a_{s_0} = a_{k_0}$ и $\Sigma_{s_0} \subseteq \Sigma_{k_0}$, то расширение (6) с $i = k_0$, $j = s_0$ не имеет э. д.). В дальнейшем, не ограничивая общности, будем считать, что $\Sigma_i < \Sigma_j \Leftrightarrow i < j$. Далее, рассмотрим спектр $\Sigma(i)$ системы $dx/dt = (P(\varphi) - p_i(\varphi)\,\varepsilon)\,x$, $\varphi_t(\varphi): K \times R \to K$:

$$\Sigma(i) = [-\alpha_1^2, -\beta_1^2] \cup \ldots \cup [-\alpha_i^2, -\beta_i^2] \cup 0 \cup [\alpha_{i+2}^2, \beta_{i+2}^2] \cup \ldots \cup [\alpha_s^2, \beta_s^2]. \tag{20}$$

Пусть $m_i = \min(\beta_i^2, \alpha_{i+2}^2)$, $m = \min\limits_i m_i$, $m > 0$. Итак, для системы (1) и разложения (2) мы определили положительное число m. Будем говорить, что разложение (2) для системы (1) m-разделено.

Доказательство теоремы 2. Необходимость. Пусть разложение (2) для системы (1) m-разделено. Тогда, очевидно, в качестве функций $\lambda_i(\varphi)$ можно взять функции $p_i(\varphi) + \varepsilon$, $i = \overline{1, n-1}$, $\varepsilon \in R$: $0 < \varepsilon < m$.

Достаточность следует из коммутационных соотношений типа (19): $C_i(\varphi)\,C_j(\varphi) \equiv C_j(\varphi)\,C_i(\varphi) \equiv C_i(\varphi)$ $\forall i \leqslant j$ и предположения $\pi_1(K) = 1$.

Следствие 2: *Разложение* (2) *для гр. диаг. системы единственно.*

Определение 5. *Будем говорить, что система* (1) *обладает строгим свойством р. и. п., если она обладает свойством р.и.п. и разложение* (2) *единственно.*

Из следствия (2) получаем, что число m разделенности (20) зависит лишь от системы (1), но не от разложения (2).

Определение 6. *Будем говорить, что система* (1) *имеет свойство Перрона, если справедливо разложение* (2) *и существуют такие числа* $K > 0$, $\gamma > 0$, *что выполняются неравенства* $\forall i$

$$(\| x(t, x_{i+1}, \varphi) \| (\| x_{i+1} \|^{-1}))(\| x(t, x_i, \varphi) \| (\| x_i \|^{-1}))^{-1} \geqslant K \exp(\gamma t),$$

где $t > 0$, $x_i \in V_i$, $\| x_i \| \neq 0$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Для расширения* (1) *следующие условия эквивалентны:* 1) *свойство р.и.п.;* 2) *строгое свойство р.и.п.;* 3) *условие «грубой» диагонализации;* 4) *условие Перрона;* 5) *существует* $n-1$ *функция* $\lambda_i(\varphi) \in C(K, R)$ *такая, что система* (4) *имеет свойство э. д. с проектором* $C_i(\varphi)$ *ранга* i $\forall i = \overline{1, n-1}$.

Доказательство. Учитывая теоремы 1, 2, для завершения доказательства достаточно доказать справедливость импликаций $5 \Rightarrow 4$ и $4 \Rightarrow 1$. Но справедливость утверждения $4 \Rightarrow 1$ доказывается в [7], теорема 8, а утверждение $5 \Rightarrow 4$ легко проверяется непосредственно согласно определению 6 с использованием первой части леммы 4.

Следствие 3. *Условие Перрона является грубым, т. е. если для системы* (1) *оно выполняется, то оно выполняется и при достаточно малых возмущениях правой части.*

Замечание. Условие $\pi_1(K) = 1$ используется лишь в достаточной части теоремы 2.

1. *Самойленко А. М., Кулик В. Л.* О расщепляемости линеаризованных систем дифференциальных уравнений.— Укр. мат. журн., 1982, **34**, № 5, с. 587—593.
2. *Самойленко А. М., Мальков В. А., Трофимчук С. И.* Расщепляемость линейного расширения динамической системы на торе.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1982, № 11, с. 19—22.
3. *Palmer K. J.* Exponential dichotomy, integral separation and diagonalizability of linear systems of ordinary differential equations.— J. Different. Equat., 1982, **43**, N 2, p. 184—203.
4. *Самойленко А. М.* Сепаратрисные многообразия и расщепляемость линейного расширения динамической системы на торе.— Укр. мат. журн., 1981, **33**, № 1, с. 31—38.
5. *Sacker J. R., Sell G. R.* A spectral theory for linear differential systems.— J. Different. Equat., 1978, **27**, N 3, p. 320—358.
6. *Бронштейн И. У.* Слабая регулярность и функции Грина линейных расширений динамических систем.— Дифференц. уравнения, 1983, **19**, № 12, с. 2031—2039.
7. *Бронштейн И. У., Черний В. Ф.* Линейные расширения, удовлетворяющие условию Перрона. II.— Там же, 1980, **16**, № 2, с. 201—207.

Ин-т математики АН УССР, Киев Получено 24.12.84