УДК 519.41/47

А. В. Спиваковский

О строении сепараторно факторизуемых конечных групп

Пусть C — свойства подгруппы быть дополняемой во всей группе G. В соответствии с работой [1] группу G назовем сепараторно факторизуемой, если в ней существует собственная подгруппа N, называемая C-сепарирующей, такая, что каждая подгруппа группы G, не содержащаяся в N, и сама N дополняема в G.

В настоящей работе продолжается исследование конечных групп, имеющих дополняемые C-сепарирующие подгруппы, начатое в работах [2, 3]. В начале приведем необходимые вспомогательные утверждения.

Предложение 1 [4]. *Если группа G разлагается в полупрямое произведение $G = A \rtimes B$ абелевой подгруппы A, являющейся прямым про-*

изведением инвариантных в G циклических групп простых порядков, и вполне факторизуемой подгруппы B, то группа G вполне факторизуема.

Предложение 2 [5]. *Нормальная подгруппа K группы G обладает дополнением в G, если для любого простого делителя p индекса $|G:K|$ подгруппа $G_p \cap K$ абелева и дополняема в силовской p-подгруппе G_p группы G.*

Теорема 1 [3]. *Конечная группа G тогда и только тогда имеет хотя бы одну дополняемую во всей группе С-сепарирующую подгруппу, когда G — группа одного из типов*

$$(\mathfrak{G}_1): G = ((Q_1 \times F_1) \leftthreetimes (Q_2 \times F_2) \leftthreetimes (\ldots \leftthreetimes (Q_n \times F_n) \ldots))) \leftthreetimes \langle x \rangle,$$

причем выполняются следующие условия:

1) *$(Q_i \times F_i)$ — абелева вполне факторизуемая группа, $i = 1, 2, \ldots, n$;*

2) *группа Q_i разлагается в прямое произведение циклических подгрупп простых порядков, инвариантных в группе $K_i = (Q_i \times F_i) \leftthreetimes ((Q_{i+1} \times F_{i+1}) \leftthreetimes (\ldots \leftthreetimes (Q_n \times F_n) \ldots))$, и F_i — нормальная подгруппа группы K_i, $i = 1, 2, \ldots, n$;*

3) *$Q = Q_1 \leftthreetimes (Q_2 \leftthreetimes (\ldots \leftthreetimes Q_n) \ldots)$ — вполне факторизуемая группа, $F = F_1 \leftthreetimes (F_2 \leftthreetimes (\ldots \leftthreetimes F_n) \ldots)$ — абелева вполне факторизуемая группа, $F \leftthreetimes \langle x \rangle$ — группа Фробениуса с инвариантным множителем F и $x^p = 1$, p — простое число;*

4) *для любой $\langle x \rangle$-допустимой подгруппы из группы F в ней найдется дополнение, инвариантное в группе K, $i = 1, 2, \ldots, n$;*

5) *все силовские подгруппы группы G являются элементарными абелевыми:*

$$(\mathfrak{G}_2): G = ((((Q_1 \times F_1) \leftthreetimes ((Q_2 \times F_2) \leftthreetimes (\ldots \leftthreetimes (Q_n \times F_n) \ldots))) \times P_1) \leftthreetimes (P_2 \times S)) \leftthreetimes \langle x \rangle,$$

причем выполняются следующие условия:

6) *$(Q_i \times F_i)$ — абелева вполне факторизуемая группа, $i = 1, 2, \ldots, n$;*

7) *группа Q_i разлагается в прямое произведение циклических подгрупп простых порядков, инвариантных в группе $K_i = (((Q_i \times F_i) \leftthreetimes ((Q_{i+1} \times F_{i+1}) \leftthreetimes (\ldots \leftthreetimes (Q_n \times F_n) \ldots))) \times P_1) \leftthreetimes (P_2 \times S)$, а $F_i \Delta K_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$;*

8) *$Q = Q_1 \leftthreetimes (Q_2 \leftthreetimes (\ldots \leftthreetimes Q_n) \ldots)) \leftthreetimes P_2$ —* вполне факторизуемая группа, *$F = F_1 \leftthreetimes (F_2 \leftthreetimes (\ldots \leftthreetimes F_n) \ldots)$ — абелева вполне факторизуемая группа, $C_F(P_2) = F$ и $F \leftthreetimes \langle x \rangle$ — группа Фробениуса с инвариантным множителем F, $x^p = 1$, p—простое число;*

9) *для любой $\langle x \rangle$-допустимой подгруппы из группы F_i в ней найдется дополнение, инвариантное в группе K_i, $i = 1, 2, \ldots, n$;*

10) *$(P_1 \times P_2) \leftthreetimes \langle x \rangle$ — силовская p-подгруппа группы G, P_1 — группа, разложимая в прямое произведение циклических подгрупп простых порядков, инвариантных в группе, K_1, $P_1 \times P_2$ — элементарная абелева p-подгруппа, $P_1^x = P_1$ и $P_2^x = P_2$;*

11) *S — группа $\mathfrak{G}_1$;*

12) *все силовские подгруппы группы K_1 являются элементарными абелевыми.*

В дальнейшем мы будем придерживаться обозначений, введенных в теореме 1.

Лемма 1. *Пусть G — группа типа $\mathfrak{G}_1$. Тогда*

$$G = B \leftthreetimes ((F \times T) \leftthreetimes (D \times \langle x \rangle),$$

причем выполняются следующие условия:

1) *B — абелева вполне факторизуемая группа, разложимая в прямое произведение циклических подгрупп простых порядков, инвариантных в группе $M = B \leftthreetimes ((F \leftthreetimes T) \leftthreetimes D)$;*

2) *$F \times T$ — абелева вполне факторизуемая группа;*

3) *$T \leftthreetimes D$ — вполне факторизуемая группа;*

$F \leftthreetimes (D \times \langle x \rangle)$ — группа Фробениуса с инвариантным множителем F, при этом $F = \mathscr{F}_1 \times \mathscr{F}_2 \times \ldots \times \mathscr{F}_n$, где $\mathscr{F}_i$ — минимальные нормальные де-

лители группы $F \leftthreetimes (D \times \langle x\rangle)$, *и каждая подгруппа из группы* $F \leftthreetimes (D \times \langle x\rangle)$ *действует на* $\mathcal{F}_i$ *неприводимо,* $i = 1, 2, \ldots, n$;

5) *все силовские подгруппы группы* G *являются элементарными абелевыми.*

Доказательство. Из теоремы 1 непосредственно следует, что $Q_i = C_{Q_i}(Q_1) \times X_i$, где $X_i \Delta K_i$, $i = 2, 3, \ldots, n$. Далее имеем $C_{Q_i}(Q_1) = C_{C_{Q_i}(Q_1)}(C_{Q_2}(Q_1)) \times Y_i$, где $Y_i \Delta K_i$, $i = 3, 4, \ldots, n$. Продолжая такой процесс, получим следующее равенство:

$$K_1 = (Q_1 \times F_1) \leftthreetimes (S_2 \times L_2 \times F_2) \leftthreetimes (\ldots \leftthreetimes (S_n \times F_n \times L_n) \ldots),$$

где $T_0 = Q_1 \times S_2 \times S_3 \times \ldots \times S_n$ — максимальный абелев нормальный делитель вполне факторизуемой группы $Q = Q_1 \leftthreetimes (Q_2 \leftthreetimes (\ldots \leftthreetimes Q_n) \ldots)$, S_i, $L_i \Delta K_i$, и $L_i \subset Q$, $i = 2, 3, \ldots, n$. В силу двуступенной разрешимости группы Q, легко получаем равенство

$$Q = (Q_1 \times S_2 \times S_3 \times \ldots \times S_n) \leftthreetimes (L_2 \times L_3 \times \ldots \times L_n).$$

Обозначим группу $L_2 \times L_3 \times \ldots L_n$ через L и перейдем к рассмотрению группы $M_1 = \langle F, T_0\rangle$. Очевидно, $M_1 = FT_0 = (Q_1 \times F_1) \leftthreetimes ((S_2 \times F_2) \leftthreetimes (\ldots \leftthreetimes (S_n \times F_n) \ldots)$. В силу теоремы Ито [6] группа M_1 является двуступенно разрешимой. Тогда, поскольку $S_i = C_{S_i}(K_{i+1}) \times [S_i, K_{i+1}]$ и $F_i = C_{F_i}(K_{i+1}) \times [F_i, K_{i+1}]$, непосредственно имеем

$$M_1 = (Q_1 \times F_1 \times U_{21} \times W_{21} \times \ldots \times U_{n1} \times W_{n1}) \leftthreetimes (U_{22} \times W_{22} \times \ldots$$
$$\ldots \times U_{n2} \times W_{n2}),$$

где $U_{i1} \times U_{i2} = S_i$, $W_{i1} \times W_{i2} = F_i$ и $U_{i1} \Delta M_1$, $W_{i1} \Delta M_1$, $i = 2, 3, \ldots, n$. Значит группа $M_1 = (T_{11} \times F_{11}) \leftthreetimes (T_{12} \times F_{12})$, где $T_{11} \times T_{12} = T_0$, $F_{11} \times F_{12} = F$, $T_{11} \Delta M_1$ и $F_{11} \Delta M_1$.

Аналогично и группа $M_2 = FL$ представима в виде полупрямого произведения $M_2 = (L_{11} \times F_{13}) \leftthreetimes (L_{12} \times F_{14})$, где $L_{11} \times L_{12} = L$, $F_{13} \times F_{14} = F$, $L_{11} \Delta M_2$ и $F_{14} \Delta M_2$.

Тогда группа $Q = \langle R, N_Q(F)\rangle$, где R — F-допустимая подгруппа. Очевидно, группа $Z_0 = \langle R^a, a \in (N_Q(F) \leftthreetimes \langle x\rangle)\rangle$ нормальна в группе G и лежит в подгруппе Q. В силу предложения 2 [5], $N \leftthreetimes \langle x\rangle = (Z_0 \cap N) \leftthreetimes (D_0 \leftthreetimes \langle x\rangle)$, где $N = N_Q(F)$ и $D_0 \subset N$. Поэтому

$$G = Z_0 \leftthreetimes (F \leftthreetimes (D_0 \leftthreetimes \langle x\rangle)), \tag{1}$$

В силу п. 2 теоремы 1 соотношение (1) принимает вид

$$G = Z_1 \leftthreetimes (Z_2 \leftthreetimes (F \leftthreetimes (D_0 \leftthreetimes \langle x\rangle))), \tag{2}$$

где Z_i, $i = 1, 2,$— абелевы вполне факторизуемые группы, разложимые в прямое произведение циклических подгрупп простых порядков инвариантных для $i = 1$ в группе M, для $i = 2$ в группе $Z_2 \leftthreetimes (F \leftthreetimes D_0)$. Тогда, ввиду предложения 1 [4]

$$G = Z \leftthreetimes ((F \times K) \leftthreetimes (D_0 \leftthreetimes \langle x\rangle)). \tag{3}$$

Здесь K — абелева вполне факторизуемая группа, $(K \leftthreetimes D_0)$ — вполне факторизуемая группа, Z — абелева вполне факторизуемая группа, представимая в виде прямого произведения циклических подгрупп простых порядков инвариантных в группе M, и $K^x = K$.

Поскольку D_0 лежит во вполне факторизуемой группе Q, то $D_0 = D_1 \leftthreetimes D_2$, где $D_1^x = D_1$, $D_2^x = D_2$ и D_1, D_2 — абелевы вполне факторизуемые группы. Тогда $D_1 = [D_1, x] \times C_{D_1}(\langle x\rangle)$ и $D_2 = [D_2, x] \times C_{D_2}(\langle x\rangle)$. Очевидно, $C_{F \times [D_i, x]}(\langle x\rangle) = E$, $i = 1, 2$. Поэтому группа $F \leftthreetimes [D_i, x]$ нильпотентна, $i = 1, 2$, а значит и абелева (см. п. 5 теоремы 1), т. е. группа $\langle [D_1, x], [D_2, x]\rangle \subset C_{D_0}(F)$. Тогда в силу предложения 2 [5] соотношение (3) примет вид

$$G = Z \leftthreetimes ((F \times (K \leftthreetimes C_{D_0}(F))) \leftthreetimes (D \times \langle x\rangle)),$$

где $D \subset D_0$. Теперь, поскольку $Z \leftthreetimes (F \times (K \leftthreetimes C_{D_0}(F))$ — вполне факторизуемая группа, а все силовские подгруппы группы G являются элементарными абелевыми, то

$$G = B \leftthreetimes ((F \times T) \leftthreetimes (D \times \langle x \rangle)),$$

и выполняются пп. 1, 2, 3, 5 леммы 1.

Покажем теперь, что D — абелева вполне факторизуемая группа. Для этого рассмотрим группу $H = F \leftthreetimes (D \times \langle x \rangle)$. Поскольку все силовские подгруппы группы H являются элементарными абелевыми, то к этой группе применима теорема Машке. А именно: группа $F = \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2 \times \ldots \times \mathcal{F}_n$, где $\mathcal{F}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, — минимальные нормальные делители группы H. Очевидно, $(D \times \langle x \rangle)/C_{(D\times\langle x \rangle)}(\mathcal{F}_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, — абелева вполне факторизуемая группа. Тогда в силу известной теоремы Ремака группа $D \times \langle x \rangle$ является абелевой, поскольку $C_{(D\times\langle x \rangle)}(F) = E$. Таким образом, группа $F \leftthreetimes (D \times \langle x \rangle)$ является группой Фробениуса с инвариантным множителем F. Легко заметить теперь, что $F \leftthreetimes (D \times \langle x \rangle)$ — непримарно факторизуемая группа. Поэтому из работы [7] непосредственно следует истинность п. 4 настоящей леммы. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть G — группа типа $\mathfrak{G}_2$. Тогда*

$$G = (B \times P_1) \leftthreetimes ((F \times T \times P_2) \leftthreetimes (D \times \langle x \rangle)),$$

причем выполняются следующие условия:

1) $(B \times P_1)$ — *абелева вполне факторизуемая группа, разложимая в прямое произведение циклических подгрупп простых порядков, инвариантных в группе* $M = (B \times P_1) \leftthreetimes ((F \times T \times P_2) \leftthreetimes D)$;

2) $(F \times T \times P_2)$ — *абелева вполне факторизуемая группа;*

3) $(T \times P_2) \leftthreetimes D$ — *вполне факторизуемая группа;*

4) $F \leftthreetimes (D \times \langle x \rangle)$ — *группа Фробениуса с инвариантным множителем* F, $F = \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2 \times \ldots \times \mathcal{F}_n$, *где* $\mathcal{F}_i$ — *минимальные нормальные делители группы* $F \leftthreetimes (D \times \langle x \rangle)$ *и каждая подгруппа из группы* $D \times \langle x \rangle$ *действует на* $\mathcal{F}_i$ *неприводимо,* $i = 1, 2, \ldots, n$;

5) $(P_1 \times P_2) \leftthreetimes \langle x \rangle$ — *силовская p-подгруппа группы G, $x^p = 1$, p — простое число и все силовские подгруппы группы M являются элементарными абелевыми.*

Доказательство. Следуя рассуждениям, которые используются при доказательстве леммы 1, получаем, что группа $Q_0 = ((Q_1 \leftthreetimes (Q_2 \leftthreetimes (\ldots \leftthreetimes Q_n) \ldots$ $\ldots) \times P_1) \leftthreetimes (P_2 \times (Q_{n+1} \leftthreetimes (\ldots \leftthreetimes Q_{n+r}) \ldots) = \langle R, N_{Q_0}(F) \rangle$, где $S = (Q_{n+1} \times$ $\times F_{n+1}) \leftthreetimes (\ldots \leftthreetimes (Q_{n+r} \times F_{n+r}) \ldots)$ и множители Q_{n+i}, F_{n+i}, $i = 1, 2, \ldots, r$ удовлетворяют пп. 1—5 теоремы 1, а R — F-допустимая подгруппа. Очевидно, группа $Z_0 = \langle \langle R, P^a \rangle, \ a \in (N_{Q_0}(F) \leftthreetimes \langle x \rangle) \rangle$ нормальна в группе G и лежит в подгруппе Q_0.

В силу предложения 2 [5] $N \leftthreetimes \langle x \rangle = (Z_0 \cap N) \leftthreetimes (D_0 \leftthreetimes \langle x \rangle)$, где $N = N_{Q_0}(F)$ и $D_0 \subset N$. Поэтому $G = Z_0 \leftthreetimes (F \leftthreetimes (D_0 \leftthreetimes \langle x \rangle))$.

Дальнейшее доказательство проводится аналогично доказательству леммы 1. Лемма 2 доказана.

Из теоремы 1, лемм 1 и 2 непосредственно получается следующий основной результат настоящей работы.

Теорема 2. *Конечная группа G тогда и только тогда является сепараторно факторизуемой, когда*

$$G = (B \times P_1) \leftthreetimes ((F \times T \times P_2) \leftthreetimes (D \times \langle x \rangle)),$$

причем выполняются следующие условия:

1) $B \times P_1$ — *абелева вполне факторизуемая группа, разложимая в прямое произведение циклических подгрупп простых порядков, инвариантных в группе* $M = (B \times P_1) \leftthreetimes ((F \times T \times P_2) \leftthreetimes D)$;

2) $F \times T \times P_2$ — *абелева вполне факторизуемая группа;*

3) $(T \times P_2) \leftthreetimes D$ — *вполне факторизуемая группа;*

4) $F \leftthreetimes (D \times \langle x \rangle)$ — *группа Фробениуса с инвариантным множителем* $F = \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2 \times \ldots \times \mathcal{F}_n$ *и с вполне факторизуемым циклическим допол-*

нительным множителем $D \rtimes \langle x \rangle$, *который, как и все его собственные подгруппы, действует на* $\mathcal{F}_i$ *неприводимо,* $i = 1, 2, \ldots, n$;

5) $(P_1 \times P_2) \rtimes \langle x \rangle$ — *силовская* p-*подгруппа группы* G, $x^p = 1$, p — *простое число и все силовские подгруппы группы* M *являются элементарными абелевыми.*

1. *Черников С. Н.* Группы, имеющие сепарирующие подгруппы.— В кн. : Группы с заданными свойствами подгрупп. Киев : Ин-т математики АН УССР, 1973, с. 6—14.
2. *Спиваковский А. В.* Конечные группы, имеющие C-сепарирующие подгруппы.— В кн.: Строение групп и их подгрупповая характеризация. Киев : Ин-т математики АН УССР, 1984, с. 87—100.
3. *Спиваковский А. В.* Строение конечных групп, имеющих C-сепарирующие подгруппы.— Киев, 1984.— 63 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 84.13).
4. *Черникова Н. В.* Группы с дополняемыми подгруппами. — Мат. сб., 1956, **39**, № 3, с. 273—292.
5. *Шеметков Л. А.* Формации конечных групп.— М. : Наука, 1978.— 268 с.
6. *Itô N.* Über das Product von zwei abelschen Gruppen.— Math. Z., 1955, **62**, N 4, S 400—401.
7. *Сучков Н. М.* О некоторых линейных группах с дополняемыми подгруппами.— Алгебра и логика, 1977, **16**, № 5, с. 603—620.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 29.05.84