УДК 517.926

В. Л. Кулик

Слабо регулярные линейные системы дифференциальных уравнений

Исследование линейной нестационарной системы дифференциальных уравнений на всей оси имеет важное значение для изучения вопросов сохранения инвариантных торов в динамических системах при возмущениях [1, 2].

Пусть $A(t)$ — $n \times n$-мерная матричная функция, непрерывная и ограниченная на всей оси $R =]-\infty, +\infty[$ $(A(t) \in C^0(R))$. Тогда линейную систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = A(t)x, \tag{1}$$

$x \in R^n$, $\dot{x} = dx/dt$, назовем слабо регулярной на всей оси R, если неоднородная система уравнений

$$\dot{x} = A(t)x + f(t) \tag{2}$$

имеет по крайней мере одно ограниченное на R решение при каждой фиксированной вектор-функции $f(t) \in C^0(R)$. Если же неоднородная система (2) имеет единственное ограниченное на R решение при каждой фиксированной вектор-функции $f(t) \in C^0(R)$, то систему (1) будем называть регулярной на R.

Известно [3, 4], что регулярность на R системы (1) эквивалентна ее экспоненциальной дихотомичности на R. В работе [5] показано, что слабая регулярность на R системы (1) эквивалентна существованию квадратичной формы $\langle S(t)x, x\rangle = V(t, x)$ с непрерывно дифференцируемой и ограниченной на R симметричной матрицей коэффициентов $S(t)$, которая имеет знакоопределенную производную вдоль решений сопряженной системы уравнений

$$\dot{x} = -A^T(t)x, \tag{3}$$

т. е.

$$\dot{V}(t, x) = \langle(\dot{S}(t) - S(t)A^T(t) - A(t)S(t))x, x\rangle \leqslant -\|x\|^2. \tag{4}$$

При этом определитель матрицы $S(t)$ может превращаться в нуль не более чем в n различных моментах времени. Невырожденность матрицы $S(t)$ при всех $t \in R$ влечет за собой экспоненциальную дихотомичность на R системы (1), т. е. ее регулярность на R.

Введем следующие обозначения: M — множество матричных функций $A(t) \in C^0(R)$ таких, что система уравнений (1) слабо регулярна на всей оси R; M^* — множество матричных функций $A(t) \in C^0(R)$ таких, что сопряженная система (3) слабо регулярна на R; D — множество матриц $A(t) \in C^0(R)$ таких, что система (1) экспоненциально дихотомична на полуосях $R_+ = [0, +\infty[$, $R_- =]-\infty, 0]$. Заметим (см. [4]), что существуют экспоненциально дихотомичные на полуосях системы (1), которые не являются слабо регулярными на R и их сопряженная система (3) также не является слабо регулярной на R.

Теорема. *Для каждой матричной функции* $A_0(t) \in D$ *и для каждого числа* $\varepsilon > 0$ *существует матричная функция* $A_\varepsilon(t) \in M \cup M^*$ *такая, что* $\sup\limits_{t \in R} \| A_\varepsilon(t) - A_0(t) \| \leqslant \varepsilon$.

Доказательство. Линейную систему дифференциальных уравнений $\dot{x} = A_0(t)x$ с помощью замены переменных Ляпунова $x = T(t)y$ преобразуем к следующему виду (см. [6]):

$$\dot{y}^+ = B_{11}(t)y^+ + B_{13}(t)\tilde{y}, \qquad \dot{y}^- = B_{22}(t)y^- + B_{23}(t)\tilde{y},$$
$$\dot{\hat{y}} = C(t)\hat{y}, \qquad \dot{\check{y}} = P(t)\check{y}, \qquad \tilde{y} = \operatorname{colon}\{\hat{y}, \check{y}\}. \tag{5}$$

Причем для матрицантов $\Omega_\tau^t(B_{ii})$, $i = 1, 2$, $\Omega_\tau^t(C)$, $\Omega_\tau^t(P)$ соответствующих линейных систем выполняются оценки

$$\begin{gathered}
\|\Omega_\tau^t(B_{11})\| \leqslant K\exp\{-\gamma(t-\tau)\}, \quad \tau \leqslant t, \quad t, \tau \in R, \\
\|\Omega_\tau^t(B_{22})\| \leqslant K\exp\{\gamma(t-\tau)\}, \quad t \leqslant \tau, \quad t, \tau \in R, \\
\|\Omega_\tau^t(C)\| \leqslant K\exp\{-\gamma(t-\tau)\}, \quad 0 \leqslant \tau \leqslant t, \\
\|\Omega_\tau^t(C)\| \leqslant K\exp\{\gamma(t-\tau)\}, \quad t \leqslant \tau \leqslant 0, \\
\|\Omega_\tau^t(P)\| \leqslant K\exp\{\gamma(t-\tau)\}, \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau, \\
\|\Omega_\tau^t(P)\| \leqslant K\exp\{-\gamma(t-\tau)\}, \quad \tau \leqslant t \leqslant 0,
\end{gathered} \tag{6}$$

где K, $\gamma = \text{const} > 0$. Выясним, каким свойством должна обладать вектор-функция $f(t) \in C^0(R)$ для того чтобы неоднородная система уравнений

$$\dot{\check{y}} = P(t)y + f(t) \tag{7}$$

имела ограниченное на R решение. Очевидно, в силу последних двух оценок из (6) не для каждой вектор-функции $f(t) \in C^0(R)$ система (7) имеет ограниченное на R решение. Общее решение системы (7) таково:

$$\check{y}(t) = \Omega_0^t(P)\left(\check{y}(0) + \int_0^t \Omega_\tau^0(P) f(\tau)\, d\tau\right). \tag{8}$$

Пусть начальная точка $\check{y}(0) = \check{y}^*(0)$ выбрана так, что равенство (8) определяет ограниченное на R решение. Переходя в равенстве

$$\Omega_t^0(P)\check{y}(t) = \check{y}^*(0) + \int_0^t \Omega_\tau^0(P) f(\tau)\, d\tau$$

сначала к пределу при $t \to +\infty$, а затем при $t \to -\infty$, получаем

$$\check{y}^*(0) + \int\limits_0^\infty \Omega_\tau^0(P) f(\tau)\, d\tau = 0,$$
$$\check{y}^*(0) - \int\limits_{-\infty}^0 \Omega_\tau^0(P) f(\tau)\, d\tau = 0. \tag{9}$$

Из одновременного выполнения равенств (9) следует, что

$$\int\limits_{-\infty}^\infty \Omega_\tau^0(P) f(\tau)\, d\tau = 0. \tag{10}$$

Таким образом, условие (10) является необходимым для того чтобы неоднородная система (7) имела ограниченное на R решение. Покажем, что это условие и достаточное. Действительно, при выполнении равенства (10) в качестве начальной точки $\check{y}(0) = \check{y}^*(0)$ для общего решения (8) выберем одно из равенств (9). Выбирая, например, первое и подставляя в (8), находим

$$\check{y}^*(t) = -\int\limits_t^\infty \Omega_\tau^t(P) f(\tau)\, d\tau. \tag{11}$$

Проверим, что равенством (11) представляется единственное ограниченное на R решение системы (7). При $t \geqslant 0$ имеем

$$\| \check{y}^*(t) \| \leqslant \| f \|_0 \int\limits_t^\infty \| \Omega_\tau^t(P) \|\, d\tau \leqslant K \| f \|_0 \int\limits_t^\infty \exp\{\gamma(t-\tau)\}\, d\tau = K \| f \|_0 \gamma^{-1}.$$

Если же $t < 0$, то с учетом равенства (10) решение (11) запишем в виде

$$\check{y}^*(t) = \int\limits_{-\infty}^t \Omega_\tau^t(P) f(\tau)\, d\tau,$$

и тогда

$$\| \check{y}^*(t) \| \leqslant K \| f \|_0 \int\limits_{-\infty}^t \exp\{-\gamma(t-\tau)\}\, d\tau = K \| f \|_0 \gamma^{-1}.$$

Пусть количество координат $\hat{y}$ не меньше, чем количество координат $\check{y}$. Покажем, что систему уравнений

$$\dot{\hat{y}} = C(t)\hat{y}, \quad \dot{\check{y}} = P(t)\check{y} \tag{5'}$$

как угодно малым возмущением можно сделать слабо регулярной на R. Не уменьшая общности, будем полагать, что матрицы $C(t)$ и $P(t)$ имеют треугольный вид. При этом матрицу $C(t)$ представим в следующем виде: $C(t) = \begin{pmatrix} C_{11}(t) & 0 \\ C_{21}(t) & C_{22}(t) \end{pmatrix}$, где размеры блока $C_{11}(t)$ те же, что и матрицы $P(t)$. Теперь систему (5′) возмутим следующим образом:

$$\dot{\hat{y}}_1 = C_{11}(t)\hat{y}_1, \quad \dot{\hat{y}}_2 = C_{21}(t)\hat{y}_1 + C_{22}(t)\hat{y}_2, \quad \dot{\check{y}} = \varepsilon\hat{y}_1 + P(t)\check{y} \tag{12}$$

и покажем, что $\forall \varepsilon \neq 0$ эта система слабо регулярна на R. Для этого убедимся в существовании ограниченного на R решения неоднородной системы уравнений

$$\dot{\hat{y}}_1 = C_{11}(t)\hat{y}_1 + f_1(t), \qquad \dot{\hat{y}}_2 = C_{21}(t)\hat{y}_1 + C_{22}(t)\hat{y}_2 + f_2(t),$$
$$\dot{\check{y}} = \varepsilon\hat{y}_1 + P(t)\check{y} + f_3(t). \tag{13}$$

Подставляя общее решение первой подсистемы из (13)

$$\hat{y}_1(t) = \Omega_0^t(C_{11})\left(\hat{y}_1(0) + \int_0^t \Omega_\tau^0(C_{11}) f_1(\tau)\, d\tau\right)$$

в третью подсистему, получаем

$$\dot{\check{y}} = P(t)\,\check{y} + f_3(t) + \varepsilon\Omega_0^t(C_{11})\,\hat{y}_1(0) + \varepsilon\int_0^t \Omega_\tau^t(C_{11}) f_1(\tau)\, d\tau. \qquad (14)$$

Для системы (14) условие существования ограниченного на R решения (10) имеет вид

$$\varepsilon\int_{-\infty}^{\infty} \Omega_\tau^0(P)\,\Omega_0^\tau(C_{11})\, d\tau y_1(0) + \int_{-\infty}^{\infty}\Omega_\tau^0(P)\,\varphi_\varepsilon(\tau)\, d\tau = 0, \qquad (15)$$

где

$$\varphi_\varepsilon(t) = f_3(t) + \varepsilon\int_0^t \Omega_\tau^t(C_{11}) f_1(\tau)\, d\tau.$$

В силу второй и третьей оценок из (6) $\varphi_\varepsilon(t) \in C^0(R)$. Очевидно, для разрешимости относительно $\hat{y}_1(0)$ алгебраической системы (15) при всех $\varphi_\varepsilon(t) \in C^0(R)$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\det\int_{-\infty}^{\infty} \Omega_\tau^0(P)\,\Omega_0^\tau(C_{11})\, d\tau \neq 0. \qquad (16)$$

Учитывая треугольный вид матриц $P(t)$, $C_{11}(t)$:

$$P(t) = \begin{pmatrix} p_{11}(t) & 0 & \dots & 0 \\ p_{21}(t) & p_{22}(t) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{k1}(t) & p_{k2}(t) & \dots & p_{kk} \end{pmatrix},$$

$$C_{11}(t) = \begin{pmatrix} c_{11}(t) & 0 & \dots & 0 \\ c_{21}(t) & c_{22}(t) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{k1}(t) & c_{k2}(t) & \dots & c_{kk}(t) \end{pmatrix},$$

получаем

$$\Omega_\tau^0(P)\,\Omega_0^\tau(C_{11}) = \begin{Vmatrix} \exp\left\{\int_\tau^0 p_{11}(\xi)\, d\xi\right\} & 0 & \dots & 0 \\ \omega_{21}(\tau) & \exp\left\{\int_\tau^0 p_{22}(\xi)\, d\xi\right\} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_{k1}(\tau) & \omega_{k2}(\tau) & \dots & \exp\left\{\int_\tau^0 p_{kk}(\xi)\, d\xi\right\} \end{Vmatrix} \times$$

$$\times \begin{Vmatrix} \exp\left\{\int_0^\tau c_{11}(\xi)\, d\xi\right\} & 0 & \dots & 0 \\ \bar{\omega}_{21}(\tau) & \exp\left\{\int_0^\tau c_{22}(\xi)\, d\xi\right\} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{\omega}_{k1}(\tau) & \bar{\omega}_{k2}(\tau) & \dots & \exp\left\{\int_0^\tau c_{kk}(\xi)\, d\xi\right\} \end{Vmatrix} =$$

$$
= \begin{pmatrix} \exp\left\{\int\limits_0^\tau (c_{11}(\xi) - p_{11}(\xi)) d\xi\right\} & 0 & \ldots & 0 \\ W_{21}(\tau) & \exp\left\{\int\limits_0^\tau (c_{22}(\xi) - p_{22}(\xi) d\xi\right\} & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ W_{k1}(\tau) & W_{k2}(\tau) & \ldots & \exp\left\{\int\limits_0^\tau (c_{kk}(\xi) - p_{kk}(\xi) d\xi\right\} \end{pmatrix}.
$$

Отсюда видно, что соотношение

$$
\det \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Omega_\tau^0(P)\,\Omega_0^\tau(C_{11})\,d\tau = \prod_{i=1}^{k} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{\int\limits_0^\tau (c_{ii}(\xi) - p_{ii}(\xi))\,d\xi\right\} > 0
$$

обеспечивает выполнение условия (16), а значит, и разрешимость относительно $\hat{y}_1(0)$ системы (15). Поэтому система уравнений (12) при любом $\varepsilon \neq \neq 0$ является слабо регулярной на R. Таким образом, экспоненциально дихотомичную на полуосях R_+, R_- систему уравнений (5) в случае, когда размерность $\hat{y}$ не превышает размерности $\hat{y}$, как угодно малым возмущением можно сделать слабо регулярной на R, заменяя при этом последние две подсистемы в (5) системой (12).

Рассмотрим теперь случай, когда размерность $\check{y}$ в системе (5) больше чем размерность $\hat{y}$. При этом перейдем к сопряженной системе

$$
\dot{z}^- = -B_{11}^T(t)\,z^-, \quad \dot{z}^+ = -B_{22}^T(t)\,z^+,
$$

$$
\dot{\check{z}} = M_{11}(t)\,z^- + M_{12}(t)\,z^+ - C^T(t)\,\check{z}, \quad \dot{\hat{z}} = M_{21}(t)\,z^- + M_{22}(t)\,z^+ - P^T(t)\,\hat{z} \tag{17}
$$

и учтем тождество

$$
\Omega_\tau^t(-A^T) \equiv (\Omega_t^\tau(A))^T. \tag{18}
$$

На основании оценок (6) при выполнении тождества (18) справедливо утверждение о том, что если, например, решения системы $\dot{\hat{y}} = C(t)\,\hat{y}$ экспоненциально убывают к нулю в обе стороны, то решения сопряженной системы $\dot{\hat{z}} = -C^T(t)\,\check{z}$ экспоненциально возрастают в обе стороны. Учитывая, что в системе (17) размерность вектора $\check{z}$ меньше, чем размерность вектора $\hat{z}$, поступим так же, как и для системы (5). При этом возмущенная система к системе (17) будет слабо регулярной на всей оси R. Этим и завершается доказательство теоремы.

Существование квадратичной формы $V(t, x) = \langle S(t)\,x, x\rangle$ с непрерывно дифференцируемой и ограниченной на полуоси R_+ матрицей коэффициентов $S(t)$, удовлетворяющей условию (4) при всех $t \in R_+$, влечет за собой экспоненциальную дихотомичность систем (1) и (3) на полуоси R_+. Определитель матрицы $S(t)$ при достаточно больших $t : t \geqslant T > 0$ не превращается в нуль. Количество $n^-(\infty)$ отрицательных собственных чисел симметричной матрицы $S(T)$ совпадает с размерностью подпространства убывающих к нулю на ∞ решений системы (1). Если же рассматривать оценку (4) на отрицательной полуоси R_-, то можно убедиться в существовании момента $-T < 0$ такого, что $\det S(t) \neq 0$ $\forall t \in]-\infty, -T]$ и количество $n^-(-\infty)$ отрицательных собственных чисел матрицы $S(-T)$ совпадает с размерностью подпространства решений системы (1), убывающих к нулю на $-\infty$. С учетом изложенного приведенную выше теорему сформулируем в терминах квадратичных форм.

Теорема. *Пусть при достаточно больших $t : t \geqslant t_0 > 0$ существует $n \times n$-мерная симметричная, непрерывно дифференцируемая матрич-*

ная функция $S_1(t) \in C^1(R_+)$, *удовлетворяющая условию* $\langle(\dot{S}_1(t) - S_1(t)A^T(t) - A(t)S_1(t))x, x\rangle \leqslant -\|x\|^2$, *и при всех* $t \leqslant -t_0 < 0$ *существует такая же матричная функция* $S_2(t): \langle(\dot{S}_2(t) - S_2(t)A^T(t) - A(t)S_2(t))x, x\rangle \leqslant -\|x\|^2$. *Тогда для каждого* $\varepsilon > 0$ *существуют* $n \times n$-*мерная матричная функция* $B(t) \in C^0(R)$ *такая, что* $\|B(t)\| \leqslant \varepsilon$, *и непрерывно дифференцируемая и ограниченная на* R *симметричная матричная функция* $S(t)$, *удовлетворяющая одному из условий*:

1) *если* $n^-(-\infty) < n^-(\infty)$, *то*

$$\langle(\dot{S}(t) - S(t)(A^T(t) + B^T(t)) - (A(t) + B(t))S(t))x, x\rangle \leqslant -\|x\|^2; \quad (19)$$

2) *если* $n^-(-\infty) > n^-(\infty)$, *то*

$$\langle(\dot{S}(t) + S(t)(A(t) + B(t)) + (A^T(t) + B^T(t))S(t))x, x\rangle \leqslant -\|x\|^2; \quad (20)$$

3) *если* $n^-(\infty) = n^-(-\infty)$, *то существуют невырожденные матричные функции* $S(t) \in C^1(R)$, *удовлетворяющие условиям* (19), (20), *т. е. система уравнений* $\dot{x} = (A(t) + B(t))x$ *является э-дихотомичной на всей оси* R.

В первом и во втором случаях определитель матрицы $S(t)$ *обязательно в некоторый момент времени превращается в нуль.*

Следствие. *Пусть для матричной функции* $A(t)$ *существуют конечные пределы* $\lim_{t\to+\infty} A(t) = A_+$, $\lim_{t\to-\infty} A(t) = A_-$. *Тогда для каждого* $\varepsilon > 0$ *существует непрерывная на* R *матричная функция* $B(t) \in C^0(R)$ *с нормой* $\|B(t)\| \leqslant \varepsilon$ *такая, что одна из систем* $\dot{x} = (A(t) + B(t))x$, $\dot{x} = -(A^T(t) + B^T(t))x$ *является слабо регулярной на* R.

1. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А., Самойленко А. М.* Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике.— Киев : Наук. думка, 1969.— 244 с.
2. *Самойленко А. М.* О сохранении инвариантного тора при возмущении.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1970, **34**, № 6, с. 1219—1240.
3. *Аносов Д. В.* Геодезические потоки на римановых многообразиях отрицательной кривизны.— Тр. Мат. ин-та / АН СССР, 1967, **90**, с. 1—210.
4. *Плисс В. А.* Ограниченные решения неоднородных линейных систем дифференциальных уравнений.— В кн.: Проблемы асимптотической теории нелинейных колебаний. Киев : Наук. думка, 1977, с. 168—173.
5. *Кулик В. Л.* Квадратичные формы и дихотомия решений систем линейных дифференциальных уравнений.— Укр. мат. журн., 1982, **34**, № 1, с. 43—49.
6. *Кулик А. Н., Кулик В. Л.* Функция Ляпунова и дихотомия на полуосях линейных систем.— Дифференц. уравнения, 1984, **20**, № 2, с. 233—241.
7. *Перов А. И., Трубников Ю. В.* Монотонные дифференциальные уравнения. IV.— Там же, 1978, **14**, № 7, с. 1190—1202.

Ин-т математики АН УССР, Киев
Получено 23.10.84