УДК 517.95.957

Ю. И. Ковач, С. А. Бойцун

Аналитические двусторонние методы приближенного интегрирования задачи Коши для дифференциальных уравнений с частными производными

Некоторые способы улучшения сходимости аналитических двусторонних методов для различных задач исследуются, в частности, в [1, 2]. Укажем алгоритмы с более ускоренным процессом сходимости по отношению к алгоритму, описанному в [1, 2]. Используем обозначения областей $\bar{R}$, $\bar{R}_1^*$, $\bar{R}_2^*$, $\bar{E}$, кривой l, операторов S, H из [1] и проиллюстрируем эти алгоритмы на примере задачи Коши для уравнения

$$\frac{\partial^r U(x, y)}{\partial x^s \partial y^k} = f[x, y, \lambda, U] \equiv f\left(x, y, \lambda_1, \ldots, \lambda_m, U(x, y), \frac{\partial U(x, y)}{\partial x}, \ldots\right.$$

$$\left.\ldots, \frac{\partial^{r-\mu-\nu} U(x, y)}{\partial x^{s-\mu} \partial y^{k-\nu}}\right), \quad 0 < \mu + \nu \leqslant r = s + k, \quad \mu = 0, 1, 2, \ldots, s;$$

$$\nu = 0, 1, 2, \ldots, k, \tag{1}$$

при условии

$$\left.\frac{\partial^{n+q} U(x, y)}{\partial x^n \partial y^q}\right|_l = \left.\frac{\partial^{n+q} \omega(x, y)}{\partial x^n \partial y^q}\right|_l, \quad \frac{\partial^s \omega(x, y)}{\partial x^r \partial y^k} \equiv 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, s;$$

$$q = 0, 1, 2, \ldots, k; \quad n + q < r. \tag{2}$$

Считаем, что параметры R_p, Q_p, D_p, C_p, $p = 1, 2, 3, \ldots$, удовлетворяют условию

$$0 \leqslant R_p < Q_p, \quad 0 \leqslant D_p < C_p, \quad R_p + Q_p = 1, \quad D_p + C_p = 1 \tag{3}$$

или

$$0 \leqslant Q_p < R_p, \quad 0 \leqslant D_p < C_p, \quad R_p + Q_p = 1, \quad D_p + C_p = 1, \tag{4}$$

а правая часть уравнения (1) удовлетворяет условиям из [1].

Пусть в области $\bar{R}$ существуют функции $Z_1(x, y)$, $V_1(x, y)$, удовлетворяющие условиям (2) и неравенствам

$$\frac{\partial^r Z_1(x, y)}{\partial x^s \partial y^k} \leqslant \frac{\partial^r V_1(x, y)}{\partial x^s \partial y^k} \qquad (x, y) \in \bar{R}, \qquad \frac{\partial^{r-\mu-\nu} V_1(x, y)}{\partial x^{s-\mu} \partial y^{k-\nu}} \underset{(\geqslant)}{\leqslant} \frac{\partial^{r-\mu-\nu} Z_1(x, y)}{\partial x^{s-\mu} \partial y^{k-\nu}} \tag{5}$$

при μ нечетных (четных) и произвольных ν в области $\bar{R}_1^*$; при ν нечетных (четных) и произвольных μ в области $\bar{R}_2^*$ (см. [1]), такие, что при $D_1 = 0$, $C_1 = 1$ имеют место соотношения

$$\frac{\partial^r Z_1(x, y)}{\partial x^s \partial y^k} - \frac{1}{2} f[x, y, \lambda, C_1 Z_1 + D_1 V_1] - \frac{1}{2} f[x, y, \lambda, C_1 V_1 + D_1 Z_1] -$$

$$- \frac{1}{2}(C_1 - D_1) S[Z_1 - V_1] = \alpha_1[x, y, \lambda] \leqslant 0,$$

$$\frac{\partial^r V_1(x, y)}{\partial x^s \partial y^k} - \frac{1}{2} f[x, y, \lambda, C_1 V_1 + D_1 Z_1] - \frac{1}{2} f[x, y, \lambda, C_1 Z_1 + D_1 V_1] +$$

$$+ \frac{1}{2}(C_1 - D_1) S[Z_1 - V_1] = \beta_1[x, y, \lambda] \geqslant 0. \tag{6}$$

Можно доказать, что при указанных выше условиях справедливы неравенства

$$\frac{\partial^r Z_1(x, y)}{\partial x^s \partial y^k} \leqslant \frac{\partial^r U[x, y, \lambda]}{\partial x^s \partial y^k} \leqslant \frac{\partial^r V_1(x, y)}{\partial x^s \partial y^k}, \quad (x, y) \in \bar{R},$$

$$\frac{\partial^{r-\mu-\nu} V_1(x, y)}{\partial x^{s-\mu} \partial y^{k-\nu}} \underset{(\geqslant)}{\leqslant} \frac{\partial^{r-\mu-\nu} U[x, y, \lambda]}{\partial x^{s-\mu} \partial y^{k-\nu}} \underset{(\geqslant)}{\leqslant} \frac{\partial^{r-\mu-\nu} Z_1(x, y)}{\partial x^{s-\mu} \partial y^{k-\nu}} \tag{7}$$

при μ нечетных (четных) и произвольных ν в области $\bar{R}_1^*$; при ν нечетных (четных) и произвольных μ в области $\bar{R}_2^*$.

Обозначим

$$F[C_p Z_p + D_p V_p - C_{p+1} Z_{p+1} - D_{p+1} V_{p+1}] = f[x, y, \lambda, C_p Z_p + D_p V_p] -$$

$$- f[x, y, \lambda, C_{p+1}Z_{p+1} + D_{p+1}V_{p+1}] + S[C_pZ_p + D_pV_p - C_{p+1}Z_{p+1} - D_{p+1}V_{p+1}], \quad \Phi[C_pZ_p + D_pV_p - C_{p+1}Z_{p+1} - D_{p+1}V_{p+1}] = f[x, y, \lambda, C_pZ_p + D_pV_p] - f[x, y, \lambda, C_{p+1}Z_{p+1} + D_{p+1}V_{p+1}] - S[C_pZ_p + D_pV_p - C_{p+1}Z_{p+1} - D_{p+1}V_{p+1}]. \tag{8}$$

Исходя из функций $Z_1(x, y)$, $V_1(x, y)$, построим итерационный процесс

$$Z_{p+1}[x, y, \lambda] = Q_pZ_p[x, y, \lambda] + R_pV_p[x, y, \lambda] - \sigma_p[x, y, \lambda],$$
$$V_{p+1}[x, y, \lambda] = Q_pV_p[x, y, \lambda] + R_pZ_p[x, y, \lambda] - \omega_p[x, y, \lambda], \tag{9}$$

$$\sigma_p[x, y, \lambda] = H\{Q_p\alpha_p + R_p\beta_p\}, \quad \omega_p[x, y, \lambda] = H\{Q_p\beta_p + R_p\alpha_p\}, \tag{10}$$

$$\alpha_p[x, y, \lambda] = \frac{\partial^r Z_p[x, y, \lambda]}{\partial x^s \partial y^k} - \frac{1}{2} f[x, y, \lambda, C_pZ_p + D_pV_p] - \frac{1}{2} f[x, y, \lambda, C_pV_p + D_pZ_p] - \frac{1}{2}(C_p - D_p) S[Z_p - V_p],$$

$$\beta_p[x, y, \lambda] = \frac{\partial^r V_p[x, y, \lambda]}{\partial x^s \partial y^k} - \frac{1}{2} f[x, y, \lambda, C_pV_p + D_pZ_p] - \frac{1}{2} f[x, y, \lambda, C_pZ_p + D_pV_p] + \frac{1}{2}(C_p - D_p) S[Z_p - V_p]. \tag{11}$$

Пусть параметры R_p, D_p, D_{p+1}, удовлетворяющие условиям (3), такие, что справедливы неравенства (6) и неравенства

$$Q_p\{F[C_pZ_p + D_pV_p - C_{p+1}Z_{p+1} - D_{p+1}V_{p+1}] + \Phi[C_pV_p + D_pZ_p - C_{p+1}V_{p+1} - D_{p+1}Z_{p+1}]\} + R_p\{F[C_pV_p + D_pZ_p - C_{p+1}Z_{p+1} - D_{p+1}V_{p+1}] + \Phi[C_pZ_p + D_pV_p - C_{p+1}V_{p+1} - D_{p+1}Z_{p+1}]\} \leqslant 0, \quad Q_p\{F[C_pV_p + D_pZ_p - C_{p+1}V_{p+1} - D_{p+1}Z_{p+1}] + \Phi[C_pZ_p + D_pV_p - C_{p+1}Z_{p+1} - D_{p+1}V_{p+1}]\} + R_p\{F[C_pZ_p + D_pV_p - C_{p+1}V_{p+1} - D_{p+1}Z_{p+1}] + \Phi[C_pV_p + D_pZ_p - C_{p+1}Z_{p+1} - D_{p+1}V_{p+1}]\} \geqslant 0, \tag{12}$$

следовательно, выполняются неравенства $\alpha_{p+1}[x, y, \lambda] \leqslant 0$, $\beta_{p+1}[x, y, \lambda] \geqslant 0$. Тогда последовательности $\{Z_{p+1}[x, y, \lambda]\}$, $\{V_{p+1}[x, y, \lambda]\}$, определенные по закону (9) — (11), описывают монотонный процесс (см. (14) в [1]).

Если параметры, удовлетворяющие условию (4), такие, что справедливы соотношения (6) и знаки в неравенствах (12) при $p = 2\gamma - 1$ ($p = 2\gamma$), $\gamma = 1, 2, 3, \ldots$, противоположны (совпадают), следовательно, имеют место неравенства $\alpha_{2p}[x, y, \lambda] \geqslant 0$, $\alpha_{2p+1}[x, y, \lambda] \leqslant 0$, $\beta_{2p}[x, y, \lambda] \leqslant 0$, $\beta_{2p+1}[x, y, \lambda] \geqslant 0$; тогда получим скачкообразный процесс, причем рассмотренный итерационный процесс значительно ускоряется по отношению к процессу в [1, 2].

Заметим, что неравенства (12) при условии (3) всегда выполняются в случае $R_p = 0$, $D_p = 0$, $D_{p+1} = 0$, однако не исключены случаи выполнения неравенств (12), описанных в [1].

Отметим также, что при отыскании функции первой «вилки» $[Z_1, V_1]$ в соответствующих соотношениях нужно считать $D_1 = 0$, $C_1 = 1$ (соотношения (6)). Поэтому в работах [1, 2] (теорема 1) соответственно в соотношениях (7), (6) следует считать $D_1 = 0$, $C_1 = 1$.

1. *Ковач Ю. И., Бойцун С. А.* Задача Коши для нелинейного дифференциального уравнения с частными производными.— Укр. мат. журн., 1982, **34**, № 4, с. 502—506.
2. *Ковач Ю. И., Брич И. В.* Исследование одной нелинейной краевой задачи аналитическим двусторонним методом.— Там же, 1981, **33**, № 5, с. 675—678.

Львов. политехн. ин-т
Получено 12.10.84