УДК 517.949.2

Ю. А. Митропольский, Д. И. Мартынюк, А. И. Юрчик

Решение одной задачи управления для систем с запаздыванием методом двусторонних приближений

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом

$$dx(t)/dt = g(t, x(t), x(t-\Delta), u), \tag{1}$$

где $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $g = (g_1, g_2, \ldots, g_n)$, $u = (u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots, u^{(n)})$ — элементы евклидова пространства E_n, полуупорядоченного конусом неотрицательных векторов; Δ — постоянная величина, характеризующая запаздывание в системе, $0 \leqslant \Delta \leqslant \omega$; $g(t, x(t), x(t-\Delta), u)$ — периодическая по t с периодом ω вектор-функция.

Предположим, что систему (1) можно представить в виде [1]

$$dx(t)/dt = f(t, x(t), x(t-\Delta), u, x(t), x(t-\Delta), u) - Au. \tag{2}$$

Здесь A — постоянная обратимая матрица.

Поставим следующую задачу: отыскать периодическое решение системы (2) и управление u таким образом, чтобы выполнялось условие

$$x(0) = x_0, \quad x_0 \in E_n. \tag{3}$$

Отметим, что аналогичная задача для систем обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью численно-аналитического метода [2] и метода двусторонних приближений [3] рассматривалась в работе [5].

Пусть функция $f(t, x, y, u, \bar{x}, \bar{y}, \bar{u})$ удовлетворяет условиям:

а) определена и непрерывна в области D: $(-\infty, \infty) \times [a, b] \times [a \times b] \times \times [c, d] \times [a, b] \times [a, b] \times [c, d]$, где $a = (a_1, \ldots, a_n) \in E_n$, $b = (b_1, \ldots, b_n) \in E_n$, $c = (c_1, \ldots, c_n) \in E_n$, $d = (d_1, \ldots, d_n) \in E_n$;

б) $m \leqslant f(t, \underline{x}, \underline{y}, \underline{u}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{u}) \leqslant M$, где $m = (m_1, \ldots, m_n) \in E_n$, $M = (M_1, M_2, \ldots, M_n) \in E_n$;

в) $f(t, x, y, u, x, y, u) \leqslant f(t, \underline{x}, \underline{y}, \underline{u}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{u})$ при $x \leqslant \underline{x}$, $y \leqslant \underline{y}$, $u \leqslant \underline{u}$, $x \geqslant \bar{x}$, $y \geqslant \bar{y}$, $u \geqslant \bar{u}$;

г) $A^{-1} \geqslant 0$, $\omega(M - m)/2 \leqslant b - a$;

д) $a + \omega(M - m)/4 \leqslant x_0 \leqslant b - \omega(M - m)/4$;

е) $c \leqslant A^{-1}m \leqslant A^{-1}M \leqslant d$;

ж) $|f(t, \underline{x}, \underline{y}, \underline{u}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{u}) - f(t, \bar{x}, \bar{y}, \bar{u}, \underline{x}, \underline{y}, \underline{u})| \leqslant K_1 |\underline{x} - \bar{x}| + K_2 |\underline{y} - \bar{y}| + K_3 |\underline{u} - \bar{u}|$, где K_1, K_2, K_3 — постоянные матрицы с неотрицательными элементами.

Определим две последовательности функций $\{\underline{x}_k(t, u)\}$, $\{\bar{x}_k(t, u)\}$ с помощью соотношений

$$\underline{x}_{k+1}(t, u) = L[f(t, \underline{x}_k(t), \underline{x}_k(t-\Delta), u, \bar{x}_k(t), \bar{x}_k(t-\Delta), u)],$$

$$\bar{x}_{k+1}(t, u) = L[f(t, \bar{x}_k(t), \bar{x}_k(t-\Delta), u, \underline{x}_k(t), \underline{x}_k(t-\Delta), u)], \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{4}$$

где

$$L[f(t, \underline{x}(t), \underline{x}(t-\Delta), u, \bar{x}(t), \bar{x}(t-\Delta), u)] = x_0 + (1 - t/\omega)\int_0^t f(s, \underline{x}(s), \underline{x}(s-\Delta), u, \bar{x}(s), \bar{x}(s-\Delta), u)\, ds - (t/\omega)\int_t^\omega f(s, \underline{x}(s), \underline{x}(s-\Delta), u, \bar{x}(s), \bar{x}(s-\Delta), u)\, ds$$

при $0 \leqslant t \leqslant \omega$, взяв

$$\underline{x}_0(t, u) = x_0 - \alpha_1(t)(M - m)/2, \quad \bar{x}_0(t, u) = x_0 + \alpha_1(t)(M - m)/2, \tag{5}$$

$$\underline{x}_0(t-\Delta, u) = x_0 - 2^{-1}(M - m)\begin{cases}\alpha_1(t - \Delta + \omega) & \text{при } 0 \leqslant t \leqslant \Delta,\\ \alpha_1(t - \Delta) & \text{при } \Delta \leqslant t \leqslant \omega,\end{cases} \tag{6}$$

$$\bar{x}_0(t-\Delta, u) = x_0 + 2^{-1}(M - m)\begin{cases}\alpha_1(t - \Delta + \omega) & \text{при } 0 \leqslant t \leqslant \Delta,\\ \alpha_1(t - \Delta) & \text{при } \Delta \leqslant t \leqslant \omega,\end{cases}$$

$$\alpha_1(t) = 2t(1 - t/\omega).$$

Очевидно, что функции $\underline{x}_k(t, u)$, $\bar{x}_k(t, u)$ при всех $k = 0, 1, 2, \ldots$ удовлетворяют условиям

$$\underline{x}_k(0, u) = \underline{x}_k(\omega, u) = x_0, \quad \bar{x}_k(0, u) = \bar{x}_k(\omega, u) = x_0,$$

$$a \leqslant \underline{x}_k(t, u) \leqslant b, \quad a \leqslant \bar{x}_k(t, u) \leqslant b. \tag{7}$$

Согласно результатам [1, 4], функции $\underline{x}_k(t, u)$, $\bar{x}_k(t, u)$ при любых $u \in [c, d]$, $t \in [0, \omega]$ будут удовлетворять неравенствам

$$\underline{x}_k(t, u) \leqslant \underline{x}_{k+1}(t, u) \leqslant \bar{x}_{k+1}(t, u) \leqslant \bar{x}_k(t, u^*), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{8}$$

и существует по крайней мере одно решение $x^*(t, u^*)$ задачи (2), (3), удовлетворяющее неравенству

$$\underline{x}_k(t, u^*) \leqslant x^*(t, u^*) \leqslant \bar{x}_k(t, u^*), \quad k = 0, 1, 2, \ldots. \tag{9}$$

Кроме того, если собственные числа матрицы $Q_1 = (K_1 + K_2)(\omega/3 + (3\Delta^2/2\omega)(1 - \Delta/\omega)^2)$ лежат в круге единичного радиуса, то последовательность функций (4) сходится равномерно по t, $u \in [0, \omega] \times [c, d]$ к функции $x^*(t, u^*) \in [a, в]$, которая является периодическим с периодом ω решением системы

$$dx^*(t, u)/dt = f(t, x^*(t, u), x^*(t, u), u, x^*(t-\Delta, u), x^*(t-\Delta, u), u) -$$
$$- \omega^{-1} \int_0^\omega f(t, x^*(t, u), x^*(t, u), u, x^*(t-\Delta, u), x^*(t-\Delta, u), u)\, dt. \quad (10)$$

Из соотношения (10) следует, что задача (2), (3) имеет решение $x^*(t, u^*)$, u^*, если управление u^* — решение системы

$$Au = \omega^{-1} \int_0^\omega f(t, x^*(t, u), x^*(t-\Delta, u), u, x^*(t, u), x^*(t-\Delta, u), u)\, dt. \quad (11)$$

Поскольку в общем случае найти функцию $x^*(t, u)$ невозможно, о существовании решения системы (11) будем судить исходя из функций

$$\underline{\Delta}_k(u) = u - \omega^{-1}A^{-1} \int_0^\omega f(t, \underline{x}_k(t, u), \underline{x}_k(t-\Delta, u), u, \overline{x}_k(t, u), \overline{x}_k(t-\Delta, u), u)\, dt,$$
$$(12)$$
$$\overline{\Delta}_k(u) = u - \omega^{-1}A^{-1} \int_0^\omega f(t, \overline{x}_k(t, u), \overline{x}_k(t-\Delta, u), u, \underline{x}_k(t, u), \underline{x}_k(t-\Delta, u), u)\, dt.$$

Аналогично [1, 4] можно показать, что в силу условий в) и неравенств (8) для всех $u \in [c, d]$ выполняются соотношения

$$\underline{\Delta}_k(u) \leqslant \underline{\Delta}_{k+1}(u) \leqslant \overline{\Delta}_{k+1}(u) \leqslant \overline{\Delta}_k(u), \quad (13)$$

из которых следует, что если при некотором k и всех $u \in [c, d]$ выполняются неравенства $\Delta_k(u) > 0$ или $\overline{\Delta}_k(u) < 0$, то задача (2), (3) не имеет решений.

Построим итерационный процесс, позволяющий находить приближения к решению задачи (2), (3) одновременно.

Обозначим

$$z(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x(t-\Delta) \\ u \end{pmatrix}, \quad s(\underline{z}, \overline{z}) = \omega^{-1}A^{-1} \int_0^\omega f(t, \underline{z}(t), \overline{z}(t))\, dt,$$

$$T_1(\underline{z}, \overline{z}) = \begin{pmatrix} L[f(t, \underline{z}, \overline{z})] \\ L_\Delta[f(t, \underline{z}, \overline{z})] \\ s(\underline{z}, \overline{\overline{z}}) \end{pmatrix}$$

и определим последовательные приближения следующим образом:

$$\underline{z}_{k+1}(t) = T_1(\underline{z}_k, \overline{z}_k), \quad \overline{z}_{k+1}(t) = T_1(\overline{z}_k, \underline{z}_k), \quad (14)$$

положив

$$\underline{z}_0 = \begin{pmatrix} a \\ a \\ c \end{pmatrix}, \quad \overline{z}_0 = \begin{pmatrix} b \\ b \\ d \end{pmatrix}$$

и определив L_Δ через L по аналогии с (6).

Теорема 1. *Пусть выполняются неравенства* а) — в). *Тогда последовательности* $\{\underline{z}_k(t)\}$ *и* $\{\overline{z}_k(t)\}$, *определяемые соотношениями* (14), *удовлетворяют неравенствам*

$$\underline{z}_k(t) \leqslant \underline{z}_{k+1}(t) \leqslant \overline{z}_{k+1}(t) \leqslant \overline{z}_k(t), \quad t \in [0, \omega], \quad k = 0, 1, \ldots, \quad (15)$$

и уравнение

$$z = T_1(z, z) \tag{16}$$

имеет по крайней мере одно решение $z^*(t) \in [\underline{z}_0, \overline{z}_0]$, *удовлетворяющее соотношению*

$$\underline{z}_k(t) \leqslant z^*(t) \leqslant \overline{z}_k(t). \tag{17}$$

Доказательство. Учитывая неравенства а) — в) и соотношения (4) — (6), получаем неравенства

$$\underline{x}_1(t) \geqslant x_0 + (1 - t/\omega)\int_0^t m ds - (t/\omega)\int_t^\omega M ds = \underline{x}_0(t),$$

$$\overline{x}_1(t) \leqslant x_0 + (1 - t/\omega)\int_0^t M ds - (t/\omega)\int_t^\omega m ds = \overline{x}_0(t), \tag{18}$$

$$\underline{x}_1(t-\Delta) \geqslant \underline{x}_0(t-\Delta), \quad \overline{x}_1(t-\Delta) \leqslant \overline{x}_0(t-\Delta),$$

$$\underline{x}_1(t) \leqslant \overline{x}_1(t), \quad \underline{x}_1(t-\Delta) \leqslant \overline{x}_1(t-\Delta),$$

$$\underline{u}_1 = \omega^{-1}A^{-1}\int_0^\omega f(t, \underline{x}_0(t), \underline{x}_0(t-\Delta), \underline{u}_1, \overline{x}_0(t), \overline{x}_0(t-\Delta), \overline{u}_1)\,dt \geqslant$$

$$\geqslant A^{-1}m \geqslant c \geqslant \underline{u}_0,$$

$$\overline{u}_1 = \omega^{-1}A^{-1}\int_0^\omega f(t, \overline{x}_0(t), \overline{x}_0(t-\Delta), \overline{u}_1, \underline{x}_0(t), \underline{x}_0(t-\Delta), \underline{u}_1)\,dt \leqslant$$

$$\leqslant A^{-1}M \leqslant d \leqslant \overline{u}_0, \quad \underline{u}_1 \leqslant \overline{u}_1,$$

из которых следует соотношение

$$\underline{z}_0(t) \leqslant \underline{z}_1(t) \leqslant \overline{z}_1(t) \leqslant \overline{z}_0(t). \tag{19}$$

Методом математической индукции легко доказать, что неравенства (15) имеют место для всех $k = 0, 1, 2, \dots$.

Предположим, что $z^*(t) \in [\underline{z}_0, \overline{z}_0]$ является решением уравнения (16). Тогда, учитывая неравенства в), д), (7), находим неравенства

$$x^*(t) \geqslant x_0 + (1 - t/\omega)\int_0^t f(s, a, a, c, b, b, d)\,ds - (t/\omega)\int_t^\omega f(s, b, b, d, a, a, c)\,ds \geqslant$$

$$\geqslant x_0 + t(1 - t/\omega)m - (t/\omega)(\omega - t)M = x_0 - \alpha_1(t)(M - m)/2 = \underline{x}_0(t), \tag{20}$$

$$x^*(t) \leqslant x_0 + (1 - t/\omega)\int_0^t f(s, b, b, d, a, a, c)\,ds - (t/\omega)\int_t^\omega f(s, a, a, c, b, b, d)\,ds =$$

$$= x_0 + (1 - t/\omega)tM - (t/\omega)(\omega - t)m = x_0 + \alpha_1(t)(M - m)/2 = \overline{x}_0(t),$$

$$x^*(t-\Delta) \geqslant \underline{x}_0(t-\Delta), \quad x^*(t-\Delta) \leqslant \overline{x}_0(t), \quad u^* \geqslant \underline{u}_0, \quad u^* \leqslant \overline{u}_0,$$

из которых следует соотношение

$$\underline{z}_0(t) \leqslant z^*(t) \leqslant \overline{z}_0(t). \tag{21}$$

Методом полной математической индукции можно показать, что для всех k выполняются неравенства

$$\underline{z}_k(t) \leqslant z^*(t) \leqslant \overline{z}_k(t). \tag{22}$$

В силу непрерывности функции f в области D последовательности $\{\underline{z}_k(t)\}$, $\{\overline{z}_k(t)\}$ равностепенно непрерывны и равномерно ограничены. Поскольку эти последовательности монотонны и ограничены соответственно сверху и снизу, то они сходятся к функциям $\underline{z}_\infty(t)$ и $\overline{z}_\infty(t)$. Из неравенства (22) следует неравенство

$$\underline{z}_\infty(t) \leqslant z^*(t) \leqslant \overline{z}_\infty(t). \tag{23}$$

Единственность решения задачи (2), (3) устанавливает следующая теорема.

Теорема 2. *Предположим, что функция $f(t, x, y, u, \overline{x}, \overline{y}, \overline{u})$ удовлетворяет условиям* а) — ж) *и собственные числа матрицы*

$$Q_1 = (K_1 + K_2)(\omega/3 + (3\Delta^2/2\omega)(1 - \Delta/\omega)^2) + A^{-1}K_3$$

лежат в круге единичного радиуса. Тогда задача (2), (3) *имеет единственное решение* $x^*(t)$, u^*, *к которому при* $k \to \infty$ *равномерно по* $t \in [0, \omega]$ *сходятся последовательности* (14), *причем имеют место оценки*

$$\overline{z}_k(t) - \underline{z}_k(t) \leqslant R_1 Q_1^{k-1} r, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{24}$$

где

$$R_1 = \begin{pmatrix} \omega E/2 \\ \omega E/2 \\ A^{-1} \end{pmatrix}, \quad r = (K_1 + K_2)(b - a) + K_3(d - c).$$

Доказательство. Из соотношений (14) имеем

$$\overline{x}_1(t) - \underline{x}_1(t) \leqslant (1 - t/\omega) \int_0^t \{K_1(\overline{x}_0(t) - \underline{x}_0(t)) + K_2(\overline{x}_0(t - \Delta) - \underline{x}_0(t - \Delta)) +$$

$$+ K_3(\overline{u}_0 - \underline{u}_0)\} dt + (t/\omega) \int_t^\omega \{K_1(\overline{x}_0(t) - \underline{x}_0(t)) + K_2(\overline{x}_0(t - \Delta) - \underline{x}_0(t - \Delta)) +$$

$$+ K_3(\overline{u}_0 - \underline{u}_0)\} dt \leqslant \alpha_1(t) r \leqslant \omega r/2, \tag{25}$$

$$\overline{x}_1(t - \Delta) - \underline{x}_1(t - \Delta) \leqslant r \begin{Bmatrix} \alpha_1(t - \Delta + \omega) & \text{при } 0 \leqslant t \leqslant \Delta, \\ \alpha_1(t - \Delta) & \text{при } \Delta \leqslant t \leqslant \omega \end{Bmatrix} \leqslant r\omega/2,$$

$$\overline{u}_1 - \underline{u}_1 \leqslant A^{-1}\omega^{-1} \int_0^\omega \{K_1(\overline{x}_0(t) - \underline{x}_0(t)) + K_2(\overline{x}_0(t - \Delta) - \underline{x}_0(t - \Delta)) +$$

$$+ K_3(\overline{u}_0 - \underline{u}_0)\} dt \leqslant A^{-1} r.$$

Неравенства (25) можно записать в виде

$$\overline{z}_1(t) - \underline{z}_1(t) \leqslant R_1 r. \tag{26}$$

Оценивая разность $\overline{x}_2(t) - \underline{x}_2(t)$, получаем

$$\overline{x}_2(t) - \underline{x}_2(t) \leqslant (1 - t/\omega) \int_0^t \{K_1(\overline{x}_1(t) - \underline{x}_1(t)) + K_2(\overline{x}_1(t - \Delta) - \underline{x}_1(t - \Delta)) +$$

$$+ K_3(\overline{u}_1 - \underline{u}_1)\} dt + (t/\omega) \int_t^\omega \{K_1(\overline{x}_1(t) - \underline{x}_1(t)) + K_2(\overline{x}_1(t - \Delta) - \underline{x}_1(t - \Delta)) +$$

$$+ K_3(\overline{u}_1 - \underline{u}_1)\} dt \leqslant \left[(1 - t/\omega) \int_0^t \alpha_1(t)\, dt + (t/\omega) \int_t^\omega \alpha_1(t)\, dt\right] K_1 r +$$

$$+ K_2 \left[(1 - t/\omega) \int_{-\Delta}^{t-\Delta} (\overline{x}_1(t_1) - \underline{x}_1(t_1))\, dt_1 + (t/\omega) \int_{t-\Delta}^{\omega-\Delta} (\overline{x}_1(t_1) -\right.$$

$$\left. - \underline{x}_1(t_1))\, dt_1 + 2(1 - t/\omega)\, t\right] A^{-1} K_3 r. \tag{27}$$

С учетом соотношения, аналогичного (6), и результатов [1] из неравенства (27) следуют неравенства

$$\bar{x}_2(t) - \underline{x}_2(t) \leqslant \alpha_1(t) r [(\omega/3 + (3\Delta^2/2\omega)(1 - \Delta/\omega)^2)(K_1 + K_2) + A^{-1}K_3] \leqslant \leqslant \omega r Q_1/2, \quad (28)$$

$$\bar{x}_2(t-\Delta) - \underline{x}_2(t-\Delta) \leqslant Q_1 r \begin{Bmatrix} \alpha_1(t-\Delta+\omega) & \text{при } 0 \leqslant t \leqslant \Delta \\ \alpha_1(t-\Delta) & \text{при } \Delta \leqslant t \leqslant \omega \end{Bmatrix} \leqslant \omega r Q_1/2. \quad (29)$$

Аналогично получаем оценку

$$\bar{u}_2 - \underline{u}_2 \leqslant A^{-1}\omega^{-1}\int_0^\omega \{K_1(\bar{x}_1(t) - \underline{x}_1(t)) + K_2(\bar{x}_1(t-\Delta) - \underline{x}_1(t-\Delta)) + + K_3(\bar{u}_1 - \underline{u}_1)\}\, dt \leqslant A^{-1}[(K_1 + K_2)\omega/3 + A^{-1}K_3] r \leqslant \leqslant A^{-1} r [(K_1 + K_2)(\omega/3 + (3\Delta^2/2\omega)(1 - \Delta/\omega)^2) + A^{-1}Q_1 r. \quad (30$$

Неравенства (28) — (30) приводят к соотношению

$$\bar{z}_2(t) - \underline{z}_2(t) \leqslant R_1 Q_1 r. \quad (31)$$

Методом полной математической индукции легко доказать, что выполняется неравенство

$$\bar{z}_{k+1}(t) - \underline{z}_k(t) \leqslant R_1 Q_1^k r, \quad (32)$$

из которого, переходя к пределу при $k \to \infty$, в силу свойств матрицы Q_1 легко получить соотношение

$$\lim_{k\to\infty} \bar{z}_k(t) = \lim_{k\to\infty} \underline{z}_k(t) = z^*(t). \quad (33)$$

Методом от противного легко доказать единственность решения $x^*(t)$ и управления u^*.

Поскольку функция $f(t, \underline{x}, \underline{y}, \underline{u}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{u})$ периодична по t с периодом ω, то, продолжая это решение периодическим образом на весь интервал $-\infty < t < \infty$, получаем решение задачи (2), (3).

1. *Митропольский Ю. А., Мартынюк Д. И.* Периодические и квазипериодические колебания систем с запаздыванием.— Киев : Вища шк., 1979.— 247 с.
2. *Самойленко А. М., Ронто Н. И.* Численно-аналитические методы исследования периодических решений.— Киев : Вища шк., 1976.— 180 с.
3. *Курпель Н. С.* О двусторонних приближениях к периодическим решениям дифференциальных уравнений.— В кн.: Тр. V. Межунар. конф. по нелинейн. колебаниям, Киев, 25 авг.— 4 сент. 1969 г. Киев : Наук. думка, 1970, т. 1, с. 348—352.
4. *Курпель М. С., Цідило К. В.* Про двосторонні наближення до періодичних розв'язків систем диференціальних рівнянь із запізненням аргументу.— Доп. АН УРСР, 1972, № 6, с. 515—519.
5. *Собкович Р. И.* Двусторонний метод исследования некоторых краевых задач с параметрами.— Киев, 1981.— 36 с.— (Препринт / АН УССР, Ин-т математики; 81.82)

Ин-т математики АН УССР, Киев,
Киев. ун-т

Получено 26.11.84.