УДК 519.21

А. А. Сереченко, М. Т. Таращанский

Некоторые замечания о состоятельном оценивании

Пусть $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathcal{P} = \{P_\vartheta, \vartheta \in \Theta\})$ — статистическая структура, параметрическое пространство Θ которой наделено σ-алгеброй $\mathfrak{B}$, порожденной всеми функциями $\vartheta \to P_\vartheta(A)$, $A \in \mathfrak{A}$. Измеримое отображение η измеримого пространства $(\Omega, \mathfrak{A})$ в измеримое пространство $(\Theta, \mathfrak{B})$ называется состоятельной оценкой, если $P_\vartheta\{\omega : \eta(\omega) = \vartheta\} = 1 \ \forall \vartheta \in \Theta$.

Такую схему состоятельного оценивания будем называть абстрактной, ибо она не связана ни со структурами повторных выборок, ни со структурами выборочных пространств случайных процессов.

В схеме повторной выборки рассматривается последовательность статистических структур $(\Omega_n, \mathfrak{A}_n, \mathcal{P}_n = \{P_{n,\vartheta}, \vartheta \in \Theta\})$, $n \geqslant 1$, где Ω_n — декартово произведение n экземпляров пространства Ω; $\mathfrak{A}_n$ — минимальная σ-алгебра на Ω_n, содержащая все множества вида $\prod_{i=1}^{n} A_i$, $A_i \in \mathfrak{A}$; $P_{n,\vartheta}$ — единственная вероятностная мера на $\mathfrak{A}_n$, удовлетворяющая условию $P_{n,\vartheta}\left(\prod_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} P_\vartheta(A_i)$, $A_i \in \mathfrak{A}$, $\vartheta \in \Theta$. На Θ выделяется σ-алгебра $\mathfrak{B}_n$, относительно которой измеримы все функции вида $\vartheta \to P_{n,\vartheta}(A)$, $A \in \mathfrak{A}_n$. Рассмотрим статистическую структуру $(\Omega_\infty, \mathfrak{A}_\infty, \mathcal{P}_\infty = \{P_{\infty,\vartheta}, \vartheta \in \Theta\})$, где Ω_∞ — декартово произведение счетного числа экземпляров Ω; $\mathfrak{A}_\infty$ — минимальная σ-алгебра на Ω_∞, относительно которой измеримы все канонические проекции $\pi_n : \Omega_\infty \to \Omega_n$; $P_{\infty,\vartheta}$ — единственная мера вероятностная на $\mathfrak{A}_\infty$, удовлетворяющая соотношениям $P_{\infty,\vartheta}(\pi_n^{-1}(A)) = P_{n,\vartheta}(A) \ \forall A \in \mathfrak{A}_n$, $n \geqslant 1$. Последовательность $(\mathfrak{A}_n, \mathfrak{B}_n)$-измеримых отображений $\eta_n : \Omega_n \to \Theta$ называется асимптотически состоятельной оценкой, если $P_{\infty,\vartheta}\{\omega \in \Omega_\infty : (\eta_n \circ \pi_n)(\omega) \to \vartheta\} = 1 \ \forall \vartheta \in \Theta$. Как замечено в [1, с. 56], отображения $\eta_n \circ \pi_n$ могут не сходиться к значению параметра ни при одном значении аргумента, да и само понятие сходимости указанной последовательности несколько искусственно в рамках принятого формализма статистических решений.

Дадим определение состоятельной оценки, основанное на сравнении статистических структур в метрике Ле Кама [2].

В абстрактной схеме оценивания статистика η индуцирует на пространстве $(\Theta, \mathfrak{B})$ семейство мер $\{P_\vartheta \eta^{-1}, \vartheta \in \Theta\}$. Если оценка состоятельна, мера $P_\vartheta \eta^{-1}$ сосредоточена в точке ϑ, $\vartheta \in \Theta$. Это свойство мер $P_\vartheta \eta^{-1}$, $\vartheta \in \Theta$, является необходимым и достаточным условием состоятельности оценки η. Мерой близости используемой оценки к состоятельной может быть взято расстояние $\sup_{\vartheta \in \Theta} \| P_\vartheta \eta^{-1} - q_\vartheta \|$, где q_ϑ — вероятностная мера на $(\Theta, \mathfrak{B})$, сосредоточенная в точке $\vartheta \in \Theta$.

Будем считать последовательность измеримых отображений η_n из $(\Omega_n, \mathfrak{A}_n)$ в $(\Theta, \mathfrak{B}_n)$ слабо состоятельной оценкой, если $\sup_{\vartheta \in \Theta} \| P_{n,\vartheta} \eta_n^{-1} - q_{n,\vartheta} \| \to 0$ при $n \to \infty$. Здесь $q_{n,\vartheta}$ — точечная мера на $(\Theta, \mathfrak{B}_n)$.

Можно рассмотреть более узкий класс оценок, а именно таких последовательностей отображений $\{\eta_n\}$, для которых $\eta_m = \eta_n \circ \pi_{mn} \ \forall m \geqslant n$, где π_{mn} — каноническая проекция Ω_m на Ω_n. В этом случае существует такое отображение $\eta : \Omega_\infty \to \Theta$, что $\eta = \eta_n \circ \pi_n \ \forall n \geqslant 1$. Отображение η измеримо, если на Θ выделена σ-алгебра, порожденная всеми $\mathfrak{B}_n$, и его состоятельность выразится соотношениями

$$\lim_{n \to \infty} P_{\infty,\vartheta}\{\omega \in \Omega_\infty ; (\eta_n \circ \pi_n)(\omega) = \vartheta\} = P_{\infty,\vartheta}\{\omega \in \Omega_\infty ; \eta(\omega) = \vartheta\} = 1 \quad \forall \vartheta \in \Theta.$$

В настоящей статье приведенные конструкции перенесены на случай оценивания по наблюдениям за случайным процессом и получены условия существования введенных состоятельных оценок.

1. С т а т и с т и ч е с к и е с т р у к т у р ы, а с с о ц и и р о в а н н ы е с о с л у ч а й н ы м п р о ц е с с о м. Рассмотрим случайный процесс, определенный на некотором множестве T со значениями в измеримом пространстве $(\Omega, \mathfrak{A})$. Обозначим через $S(T)$ множество всех конечных подмножеств T, наделенное естественным частичным упорядочением.

Согласно общепринятым представлениям, статистический эксперимент не может дать большего, чем конечномерные распределения процесса. Поэтому посылки о принадлежности меры, описывающей наблюдаемое явление, к некоторому семейству мер могут касаться лишь семейств мер, определенных на $(\Omega_s, \mathfrak{A}_s)$, $s \in S(T)$. Пусть $(\Omega_s, \mathfrak{A}_s, \mathcal{P}_s = \{P_{\vartheta,s}, \vartheta \in \Theta\})$ — статистическая структура, построенная аналогично структуре $(\Omega_n, \mathfrak{A}_n, \mathcal{P}_n)$; $\pi_{s's}s' \geqslant s$ — канонические проекции из $\Omega_{s'}$ на Ω_s, которые $(\mathfrak{A}_{s'}, \mathfrak{A}_s)$-измеримы и удовлетворяют соотношениям $\pi_{s's} \circ \pi_{s''s'} = \pi_{s''s}$, $s'' \geqslant s' \geqslant s$. Если семейства $\mathcal{P}_s$ и $\mathcal{P}_{s'}$ согласованы, т. е. $P_{\vartheta,s'}(\pi_{s's}^{-1}(A)) = P_{\vartheta,s}(A)$, $A \in \mathfrak{A}_s$, то для каждого $\vartheta \in \Theta$ вероятностные пространства $(\Omega_s, \mathfrak{A}_s, P_{\vartheta,s})$ образуют проективную систему. Если у этой системы существует проективный предел $(\Omega_T, \mathfrak{A}_T, P_{\vartheta,T})$, где $P_{\theta,T}$ — единственная вероятностная мера на $\mathfrak{A}_T$ такая, что $P_{\vartheta,T}(\pi_s^{-1}(A)) = P_{\vartheta,s}(A)$, $A \in \mathfrak{A}_s$; π_s — каноническая проекция Ω_T на Ω_s, для которой $\pi_s = \pi_{s's} \circ \pi_{s'}$ при $s' \geqslant s$, будем говорить, что совокупность структур $(\Omega_s, \mathfrak{A}_s, \mathcal{P}_s)$ вместе с предельной структурой $(\Omega_T, \mathfrak{A}_T, \mathcal{P}_T)$ образуют структуру, ассоциированную со случайным процессом, определенным на множестве T. Всюду в дальнейшем для каждого $s \in S(T)$ через $\mathfrak{B}_s$ будем обозначать наименьшую σ-алгебру на Θ, относительно которой измеримы все функции вида $\vartheta \to P_{\vartheta,s}(A)$, $A \in \mathfrak{A}_s$. Пусть $\mathfrak{B}$ обозначает σ-алгебру на Θ, порожденную $\bigcup \mathfrak{B}_s$. Ясно, что $\mathfrak{B}$ — минимальная σ-алгебра, относительно которой измеримы все функции вида $\vartheta \to P_{T,\vartheta}(A)$, $A \in \mathfrak{A}_T$.

Пусть η_s — $(\mathfrak{A}_s, \mathfrak{B}_s)$-измеримое отображение Ω_s в Θ для каждого $s \in S(T)$ и для всех $s' \geqslant s$ выполнено соотношение $\eta_{s'} = \eta_s \circ \pi_{s's}$. Поскольку $\pi_s = \pi_{s's} \circ \pi_{s'}$, то $\eta_{s'} \circ \pi_{s'} = \eta_s \circ \pi_{s's} \circ \pi_{s'} = \eta_s \circ \pi_s$ $\forall s' > s$ и, следовательно, существует отображение $\eta_T : \Omega_T \to \Theta$, удовлетворяющее равенству $\eta_T = \eta_s \circ \pi$ $\forall s \in S(T)$ и такое, что $\eta_T^{-1}(\mathfrak{B}) \subset \mathfrak{A}_T$.

О п р е д е л е н и е 1. *Проективную систему отображений* $\{\eta_s s \in S(T)\}$ *будем называть состоятельной оценкой параметра, определенной на структуре, ассоциированной со случайным процессом, если* $P_{\vartheta,T}\{\omega \in \Omega_T : \eta_T(\omega) = \vartheta\} = 1$ $\forall \vartheta \in \Theta$.

О п р е д е л е н и е 2. *Произвольную систему измеримых отображений* $\{\eta_s; s \in S(T)\}$ *будем называть слабо состоятельной оценкой параметра, если* $\sup\limits_{\vartheta \in \Theta} \| P_{\vartheta,s}\eta_s^{-1} - q_{\vartheta,s} \| \to 0$ *по направленному множеству* $S(T)$.

2. С о с т о я т е л ь н ы е о ц е н к и (а б с т р а к т н ы й с л у ч а й). Для произвольного измеримого пространства $(\Omega, \mathfrak{A})$ символом $\mathcal{B}(\Omega, \mathfrak{A})$ обозначим пространство всех действительных ограниченных измеримых функций на $(\Omega, \mathfrak{A})$, наделенное равномерной нормой и естественным порядком. Сопряженное к нему пространство $\mathcal{B}'(\Omega, \mathfrak{A})$ отождествляется с пространством всех конечно-аддитивных мер на $(\Omega, \mathfrak{A})$. Далее все рассматриваемые структуры будут считаться отделимыми, т. е. такими, что алгебра $\mathfrak{B}$ разделяет точки на Θ. Рассмотрим отображение $f \to uf = \int\limits_{\Omega} f(\omega)\, dP_{\vartheta}(\omega)$, $f \in \mathcal{B}(\Omega, \mathfrak{A})$.

Оно является положительным линейным оператором, действующим из $\mathcal{B}(\Omega, \mathfrak{A})$ в $\mathcal{B}(\Theta, \mathfrak{B})$. Этот оператор непрерывен, поскольку $\| u \| \leqslant \sup\limits_{\vartheta \in \Theta} \| P_{\vartheta} \| = 1$ и, более того, как показано в [3, предложение 1.2], $\| u \| = 1$. Сопряженный к u оператор u' изометрично отображает естественный положительный конус K'_{Θ} пространства $\mathcal{B}'(\Theta, \mathfrak{B})$ в естественный положительный конус K'_{Ω} пространства $\mathcal{B}'(\Omega, \mathfrak{A})$.

Пусть η — измеримое отображение пространства $(\Omega, \mathfrak{A})$ в измеримое пространство $(\Theta, \mathfrak{B})$. Обозначим через η^* отображение $\mathcal{B}(\Theta, \mathfrak{B}) \ni g \to g \circ \eta$.

Ясно, что η^* — мультипликативный линейный оператор. Напомним, что подалгебра $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{A}$ называется ограниченно полной, если ядро сужения оператора u на $\mathcal{B}(\Omega, \mathfrak{C})$ состоит из $\mathcal{P}$-эквивалентных нулю функций. Будем говорить, что σ-подалгебра $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{A}$ строго ограниченно полна, если сужение оператора u на $\mathcal{B}(\Omega, \mathfrak{C})$ является взаимно однозначным отображением.

Предложение 1. *Если измеримое отображение* $\eta: (\Omega, \mathfrak{A}) \to (\Theta, \mathfrak{B})$ *является состоятельной оценкой, то*

I) $u \circ \eta^*$ — *тождественный оператор на* $\mathcal{B}(\Theta, \mathfrak{B})$;

II) $\eta^{-1}(\mathfrak{B})$ — *строго ограниченно полная достаточная подалгебра.*

Доказательство. I). Из определения состоятельности следует, что η — эпиморфизм, поэтому η^* — изометрический изоморфизм пространства $\mathcal{B}(\Theta, \mathfrak{B})$ в $\mathcal{B}(\Omega, \mathfrak{A})$ и, кроме того, каждая мера P_ϑ, $\vartheta \in \Theta$, сосредоточена на множестве $\eta^{-1}(\vartheta)$. Пусть зафиксирована точка $\omega \in \Omega$ и $\vartheta = \eta(\omega)$. Имеем

$$(\eta^* u \eta^* g)(\omega) = (u \eta^* g)(\eta(\omega)) = \int\limits_{\eta^{-1}(\vartheta)} g(\eta(\omega))\, dP_\vartheta(\omega) =$$

$$= \int\limits_{\eta^{-1}(\vartheta)} g(\vartheta)\, dP_\vartheta(\omega) = g(\vartheta) = g(\eta(\omega)) = (\eta^* g)(\omega),$$

т. е. $\eta^* u \eta^* = \eta^*$. Отсюда вытекает требуемое утверждение.

II). Ясно, что $p = \eta^* \circ u$ — проектор на $\mathcal{B}(\Omega, \mathfrak{A})$ с областью значений $\mathcal{B}(\Omega, \eta^{-1}(\mathfrak{B}))$. Кроме того, $p^{-1}(0) = u^{-1}(0)$. Поэтому отношения $f \in \mathcal{B}(\Omega, \eta^{-1}(\mathfrak{B}))$ и $uf = 0$ влекут тождественное равенство нулю функции f. Следовательно, подалгебра $\eta^{-1}(\mathfrak{B})$ строго ограниченно полна. Пусть id_Ω — тождественный оператор на $\mathcal{B}(\Omega, \mathfrak{A})$. Поскольку всякая $\eta^{-1}(\mathfrak{B})$-измеримая функция постоянна на каждом множестве $\eta^{-1}(\vartheta)$, $\vartheta \in \Theta$, отношение $f_1 \in p^{-1}(0)$ влечет $ff_1 \in p^{-1}(0)$ $\forall f \in \mathcal{B}(\Omega, \eta^{-1}(\mathfrak{B}))$. Поэтому $0 = p(f(\mathrm{id}_\Omega - p)(f_1)) = u(f(\mathrm{id}_\Omega - p)(f_1)) = u(ff_1) - u(fpf_1)$ $\forall f \in \mathcal{B}(\Omega, \eta^{-1}(\mathfrak{B}))$, $\forall f_1 \in \mathcal{B}(\Omega, \mathfrak{A})$. Отсюда видно, что pf_1 может быть принято в качестве варианта условного математического ожидания $pf_1 = \mathrm{E}_\vartheta(f_1 \mid \eta^{-1}(\mathfrak{B}))$, который не зависит от $\vartheta \in \Theta$. Таким образом, доказано, что подалгебра $\eta^{-1}(\mathfrak{B})$ достаточна, тем самым завершено доказательство предложения 1.

Теорема. *Статистическая структура* $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathcal{P} = \{P_\vartheta, \vartheta \in \theta\})$ *допускает состоятельную оценку тогда и только тогда, когда* 1) *алгебра* $\mathfrak{B}$ *содержит все одноточечные множества*; 2) *оператор и является оператором «на» и* 3) *существует достаточная строго ограниченно полная* σ-*подалгебра* $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{A}$.

Доказательство. Необходимость указанных условий вытекает из предыдущего предложения.

Достаточность. В условиях теоремы сужение u_0 оператора u на подпространство $\mathcal{B}(\Omega, \mathfrak{C})$ взаимно однозначно и «на». Следовательно, сопряженный оператор u_0' обладает теми же свойствами, и сопряженное к $\mathcal{B}(\Omega, \mathfrak{C})$ пространство можно отождествить с $u_0'(\mathcal{B}(\Theta, \mathfrak{B}))$. Покажем, что каждая мера P_ϑ, $\vartheta \in \Theta$, порождает экстремальный луч конуса $u_0'(K_\Theta')$. Действительно, для каждой меры $\mu \in u_0'(K_\Theta')$ справедливо представление $\mu(\cdot) = \int\limits_\Theta P_\vartheta(\cdot)\, d\nu(\vartheta)$ с единственной $\nu \in K_\Theta'$. Из предположения, что найдется такая мера $\mu \in u_0'(K_\Theta')$, при которой $P_\vartheta - \mu \in u_0'(K_\Theta')$, следует отношение $\varepsilon_\vartheta - \nu \in K_\Theta'$, где ε_ϑ — вероятностная мера на $(\Theta, \mathfrak{B})$, сосредоточенная в точке $\vartheta \in \Theta$. Последнее справедливо лишь в случае, когда $\varepsilon_\vartheta = \alpha\mu$, где α — некоторое действительное число. Это означает экстремальность меры P_ϑ.

Поскольку функции из $\mathcal{B}(\Omega, \mathfrak{C})$ ограничены, то, согласно [4, теорема 3], каждая мера P_ϑ, $\vartheta \in \Theta$, является мультипликативным функционалом и, значит, двузначна. Таким образом, оператор u_0 мультипликативен и определяет изоморфизм алгебры $\mathfrak{C}$ на алгебру $\mathfrak{B}$. По условию алгебра $\mathfrak{B}$ атомна, следовательно, то же справедливо и для изоморфной ей алгебры $\mathfrak{C}$. Пусть $\mathfrak{D}$ — множество атомов алгебры $\mathfrak{C}$. Учитывая отделимость структуры, получаем, что для каждого атома $D \in \mathfrak{D}$ существует единственная мера P_ϑ такая, что $P_\vartheta(D)=1$. Каждому атому поставим в соответствие индекс ϑ так, чтобы $P_\vartheta(D_\vartheta)=1$. Отображение, определенное равенствами $\eta(\omega)=\vartheta\ \forall\omega\in D_\vartheta$, является состоятельной оценкой. Теорема доказана.

Следующий результат может быть интерпретирован как устойчивость свойства состоятельности.

Обозначим через $m(\Theta)$ пространство всех семейств ограниченных мер на $(\Omega,\mathfrak{A})$, параметризованных одним и тем же множеством Θ с нормой $|||M|||=\sup\limits_{\vartheta\in\Theta}\|\mu_\vartheta\|$, $M=\{\mu_\vartheta,\vartheta\in\Theta\}\in m(\Theta)$.

Предложение 2. *Пусть η — состоятельная оценка и $\mathcal{P}'$ — семейство вероятностных мер из $m(\Theta)$. Тогда неравенство $|||\mathcal{P}-\mathcal{P}'|||<1$ влечет $P'_\vartheta\{\omega:\eta(\omega)=\vartheta\}=1\ \forall\vartheta\in\Theta,\ P'_\vartheta\in\mathcal{P}'$.*

Доказательство. Положим $u'f=\int\limits_\Omega f(\omega)\,dP'_\vartheta(\omega)$. Пусть id_Θ обозначает тождественный оператор на $\mathcal{B}(\Theta,\mathfrak{B})$. По предложению 1 $u\eta^*=\mathrm{id}_\Theta$, и, поскольку η — состоятельная оценка, для сужения u_0 оператора u на подпространство $\mathcal{B}(\Omega,\eta^{-1}(\mathfrak{B}))$ имеем $u_0\eta^*=\mathrm{id}_\Theta$. Обозначим через u'_0 сужение оператора u' на $\mathcal{B}(\Omega,\ \eta^{-1}(\mathfrak{B}))$. Тогда $\|\mathrm{id}_\Theta-u'_0\eta^*\|=\|u_0\eta^*-u'_0\eta^*\|\leqslant\|u_0-u'_0\|\cdot\|\eta^*\|$. В условиях предложения $\|u_0-u'_0\|\leqslant|||\mathcal{P}-\mathcal{P}'|||<1$, $\|\eta^*\|=1$. Поэтому $\|\mathrm{id}_\Theta-u'_0\eta^*\|<1$, что означает обратимость элемента $u'_0\eta^*$ в алгебре ограниченных эндоморфизмов пространства $\mathcal{B}(\Theta,\mathfrak{B})$. Следовательно, u'_0 — отображение «на».

Для всякого $A_\vartheta\in\eta^{-1}(\mathfrak{B})$ такого, что $P'_\vartheta(A_\vartheta)=1$, справедливо включение $A_\vartheta\supset\eta^{-1}(\vartheta)$ (так как $\eta^{-1}(\vartheta)$ — атом в алгебре $\eta^{-1}(\mathfrak{B})$) для каждого $\vartheta\in\Theta$. Если предположить, что хотя бы одно включение собственное, найдутся два таких индекса $\vartheta,\ \vartheta'\in\Theta$, что $P'_{\vartheta'}(A_\vartheta)\neq0\ \forall A_\vartheta\in\eta^{-1}(\mathfrak{B}):P'_\vartheta(A_\vartheta)=1$. Значит, характеристическая функция множества $\{\vartheta\}$ не принадлежит образу оператора u'_0 — в противоречие с тем, что u'_0 — оператор «на» и алгебра $\mathfrak{B}$ содержит все одноточечные подмножества. Следовательно, $P'_\vartheta(\eta^{-1}(\vartheta))=1\ \forall\vartheta\in\Theta$. Предложение доказано.

3. Асимптотически состоятельные оценки. Пусть $(\Omega_s,\mathfrak{A}_s,\mathcal{P}_s=\{P_{\vartheta,s},\ \vartheta\in\Theta\})$ — проективная система статистических структур, ассоциированная со случайным процессом. Следующий результат очевиден.

Предложение 3. *Проективная система измеримых отображений $\eta_s:(\Omega_s,\ \mathfrak{A}_s)\to(\Theta,\ \mathfrak{B}_s)$ является состоятельной оценкой тогда и только тогда, когда для каждого $s\in S(T)$ отображение η_s является состоятельной оценкой (в абстрактном смысле) на структуре $(\Omega_s,\ \mathfrak{A}_s,\ \mathcal{P}_s)$.*

Предложение 4. *На статистической структуре, ассоциированной со случайным процессом, существует состоятельная оценка тогда и только тогда, когда оператор u_s является оператором «на» и существует достаточная строго ограниченно полная σ-подалгебра $\mathfrak{L}_s\subset\mathfrak{A}_s$, $s\in S(T)$.*

Доказательство. Необходимость вытекает из предложений 1 и 3.

Достаточность. Согласно теореме в высказанных условиях для каждого $s\in S(T)$ существует состоятельная оценка η_s на структуре $(\Omega_s,\mathfrak{A}_s,\mathcal{P}_s)$. По предложению 1 отображение $u_s\circ\eta_s^*$ тождественно на $\mathcal{B}(\Theta,\mathfrak{B}_s)$. Обозначим через $\rho_{s's}$, $s'\geqslant s$, тождественное отображение Θ на себя, рассматриваемое как измеримое отображение $(\Theta,\mathfrak{B}_{s'})\to(\Theta,\mathfrak{B}_s)$. Тогда $u_{s'}\circ\pi^*_{s's}=\rho^*_{s's}\circ u_s$. Действуя на это равенство справа оператором η_s и пользуясь предложением 1, имеем $u_{s'}\circ\pi^*_{s's}\circ\eta^*_s=u_{s'}\circ\eta^*_{s'}\circ\rho^*_{s's}\circ u_s\circ\eta^*_s=u_{s'}\circ\eta^*_{s'}\circ\rho^s_{s's}$, или $u_{s'}\circ(\pi^*_{s's}\circ\eta^*_s-\eta^*_{s'}\circ\rho^*_{s's})=0$. Область значений оператора $\pi^*_{s's}\circ\eta^*_s-\eta^*_{s'}\circ\rho^*_{s's}$ лежит в пространстве $\mathcal{B}(\Omega,\eta^{-1}_{s'}(\mathfrak{B}_{s'}))$, на котором оператор $u_{s'}$ взаимно однозначен. Следовательно, $\pi^*_{s's}\circ\eta^*_s-\eta^*_{s'}\circ\rho^*_{s's}=0$. Отсюда $\eta_s\circ\pi_{s's}=\rho_{s's}\circ\eta_{s'}$. Это означает, что отображения η_s образуют проективную систему, и доказательство завершается применением предложения 3.

Предложение 5. *Если проективная система отображений $\{\eta_s\}$ является слабо состоятельной оценкой, то она и состоятельна.*

Доказательство. Пусть η_T — проективный предел проективной системы $\{\eta_s, s \in S(T)\}$. Справедливы равенства

$$\sup_{\vartheta\in\Theta} \| P_{\Theta,T}\eta_T^{-1} - q_\vartheta \| = \sup_{\vartheta\in\Theta} \| P_{\vartheta,T}(\eta_s \circ \pi_s)^{-1} - q_\vartheta \| = \sup_{\vartheta\in\Theta} \| P_{\vartheta,s}\eta_s^{-1} - q_{\vartheta,s} \|.$$

Из определения слабо состоятельной оценки вытекает, что для любого $\delta > 0$ существует такое $s_\delta \in S(T)$, что как только $s \geqslant s_\delta$, выполняется неравенство $\sup_{\vartheta\in\Theta} \| P_{\vartheta,s}\eta_s^{-1} - q_{\vartheta,s} \| < \delta$. Из этого следует, что $\sup_{\vartheta\in\Theta} \| P_{\vartheta,T}\eta_T^{-1} - q_\vartheta \| = 0$, и, значит, отображение η_T — состоятельная оценка на структуре $(\Omega_T, \mathfrak{A}_T, \mathcal{P}_T)$. Требуемый результат вытекает теперь непосредственно из определений.

Предложение 6. *Система измеримых отображений* $\{\eta_s, s \in S(T)\}$ *является слабо состоятельной оценкой тогда и только тогда, когда начиная с некоторого* $s' \in S(T)$ *статистики* η_s *являются состоятельными (в абстрактном смысле) на структурах* $(\Omega_s\ \mathfrak{A}_s, \mathcal{P}_s)$, $s \geqslant s'$.

Доказательство. Достаточность. Фиксируем $s' \in S(T)$, и пусть для любого $s \geqslant s'$ статистика η_s есть состоятельная оценка на структуре $(\Omega_s, \mathfrak{A}_s, \mathcal{P}_s)$. Тогда $\sup_{\vartheta\in\Theta} \| P_{\vartheta,s}\eta_s^{-1} - q_{\vartheta,s} \| \to 0$ (равен нулю начиная с $s \geqslant s'$) по направленному множеству $S(T)$, что определяет систему $\{\eta_s\}$ как слабо состоятельную оценку.

Необходимость. Для каждого $\delta > 0$ существует такое $s_\delta \in S(T)$, что справедливы неравенства $\sup_{\vartheta\in\Theta} \| P_{\vartheta,s}\eta_s^{-1} - q_{\vartheta,s} \| < \delta\ \forall s > s_\delta$. Пусть $\delta < 1$. Тогда $\sup_{\vartheta\in\Theta} \| P_{\vartheta,s}\eta_s^{-1} - q_{\vartheta,s} \| < 1\ \forall s > s_\delta$. Рассмотрим тройку $(\Theta, \mathfrak{B}_s, \{q_{\vartheta,s}\})$ как статистическую структуру. Тождественное отображение $\rho : \Theta \to \Theta$ является состоятельной оценкой (в абстрактном смысле). Из предложения 2 следует, что ρ — состоятельная оценка и для структуры $(\Theta, \mathfrak{B}_s, \{P_{\vartheta,s}\eta_s^{-1}\})$. Другими словами, это означает, что меры $P_{\vartheta,s}\eta_s^{-1}$ сосредоточены в точках. Отсюда немедленно получаем состоятельность статистик η_s на соответствующих структурах $\forall s \geqslant s_\delta$. Предложение доказано.

1. *Ибрамхалимов И. Ш., Скороход А. В.* Состоятельные оценки параметров случайных процессов.— Киев : Наук. думка, 1980.— 192 с.
2. *Le Cam L.* Sufficiency and approximate sufficiency.— Ann. Math. Statist., 1964, **35**, p. 1419—1455.
3. *Малеев А. Б., Сереченко А. А., Таращанский М. Т.* Семейства вероятностных мер, допускающие состоятельные оценки.— В кн.: Распределения в бесконечномерных пространствах. Киев : Ин-т математики АН УССР, 1978, с. 125—134.
4. *Bonsall F. F., Lindenstrauss J., Phelps R. R.* Extreme positive operators on algebras of functions.— Math. scand., 1966, 18, p. 161—182.

Ворошиловгр. машиностроит. ин-т Получено 25.07.83