УДК 517.946

В. М. Флюд, В. Н. Цымбал

Асимптотика решения смешанной задачи для сингулярно возмущенной слабо связанной гиперболической системы

В данной работе методом погранфункций построено асимптотическое разложение решения смешанной задачи для сингулярно возмущенной слабо связанной гиперболической системы уравнений второго порядка. При этом используются угловые погранфункции.

1. Постановка задачи. В прямоугольнике $D = \{(x, t) : 0 \leqslant \leqslant x \leqslant l,\ 0 \leqslant t \leqslant T\}$ рассматривается смешанная задача для гиперболической системы уравнений второго порядка:

$$Lu(x, t; \varepsilon, \mu) \equiv \varepsilon^2\mu^s (\partial^2 u/\partial t^2 - \partial^2 u/\partial x^2) + \varepsilon (A(x, t)\,\partial u/\partial t + B(x, t)\,\partial u/\partial x) + C(x, t)\,u = f(x, t), \tag{1}$$

$$u(x, 0; \varepsilon, \mu) = 0, \quad u_t(x, 0; \varepsilon, \mu) = 0, \tag{2}$$

$$u(0, t; \varepsilon, \mu) = 0, \quad u(l, t; \varepsilon, \mu) = 0, \tag{3}$$

где $0 < \varepsilon \ll 1$, $0 < \mu \ll 1$, — вообще говоря, независимые параметры, $u(x, t; \varepsilon, \mu)$ — вектор-столбец с компонентами $(u^1(x, t; \varepsilon, \mu), \ldots, u^n(x, t; \varepsilon, \mu))$, $A(x, t) = \operatorname{diag}\{\underbrace{a(x, t), \ldots, a(x, t)}_{n}\}$, $B(x, t) = \operatorname{diag}\{\underbrace{b(x, t), \ldots, b(x, t)}_{n}\}$, $C(x, t) = \| c_{ij}(x, t) \|_{i,j=1}^{n}$ — симметричная матрица, $f(x, t)$ — вектор-столбец с компонентами $(f^1(x, t), \ldots, f^n(x, t))$.

Предположим, что выполняются следующие условия:

1) все функции, входящие в систему (1), достаточно гладкие;

2) $a(x, t) > 0$, $(x, t) \in D$; $b(0, t) > 0$, $b(l, t) < 0$ $\forall t \in [0, T]$, если $b(x, t) \not\equiv 0$; $C(x, t)$ положительно определена в D;

3) $f(0, 0) = f(l, 0) = 0$;

4) $|b(x, t)| < a(x, t)$ $\forall (x, t) \in D$.

Асимптотика решения смешанных задач для одного гиперболического уравнения в случае $b(x, t) \equiv 0$ и $s = 0$ построена в работе [1], в случае $b(x, t) \not\equiv 0$ и $s = 0$ — в работе [2].

Известно, что в наших предположениях при фиксированных значениях параметров существует, и притом единственное, решение задачи (1) — (3).

2. Построение асимптотики при $s = 0$ (случай одного малого параметра). Асимптотику решения задачи (1) — (3) будем строить в виде

$$u(x, t; \varepsilon) = \sum_{i=0}^{N} \varepsilon^i v_i(x, t) + \sum_{i=0}^{N} \varepsilon^i \Pi_i(x, \eta) + \sum_{i=0}^{N} \varepsilon^i Q_i(\xi, t) +$$
$$+ \sum_{i=0}^{N} \varepsilon^i Q_i^*(\zeta, t) + \sum_{i=0}^{N} \varepsilon^i P_i(\xi, \eta) + \sum_{i=0}^{N} \varepsilon^i P_i^*(\zeta, \eta) + R_N(x, t; \varepsilon), \qquad (4)$$

где $\eta = t/\varepsilon$, $\xi = x/\varepsilon$, $\zeta = (l - x)/\varepsilon$, $v(x, t; \varepsilon) = \sum_{i=0}^{N} \varepsilon^i v_i(x, t)$ — регулярная часть асимптотики, $\Pi_i(x, \eta)$, $Q_i(\xi, t)$, $Q_i^*(\zeta, t)$ — функции обыкновенного погранслоя, $P_i(\xi, \eta)$, $P_i^*(\zeta, \eta)$ — функции углового погранслоя, $R_N(x, t; \varepsilon)$ — остаточный член, N — натуральное число.

Опишем процесс нахождения и назначение каждого слагаемого (4).

Подставляя в систему (1) $v(x, t; \varepsilon)$ вместо $u(x, t; \varepsilon)$ и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получаем

$$C(x, t) v_0 = f(x, t), \quad C(x, t) v_k = -(\partial^2 v_{k-2}/\partial t^2 - \partial^2 v_{k-2}/\partial x^2) -$$
$$-(A(x, t) \partial v_{k-1}/\partial t + B(x, t) \partial v_{k-1}/\partial x), \quad k = \overline{1, N}. \qquad (5)$$

Здесь и далее для простоты записей полагаем, что функция с отрицательным индексом тождественно равна нулю.

Итак, $v_k(x, t)$, $k = \overline{0, N}$, рекуррентно и однозначно (матрица $C(x, t)$ невырождена) определяется из алгебраических систем (5) и, вообще говоря, ни одному из условий (2), (3) не удовлетворяют. Поэтому в окрестности каждой из сторон прямоугольника возникает погранслой.

Для построения погранслоя в окрестности $t = 0$ в виде $\Pi(x, \eta; \varepsilon) = \sum_{i=0}^{N} \varepsilon^i \Pi_i(x, \eta)$ применим стандартную процедуру теории сингулярных возмущений. Для этого в однородной системе (1) сделаем регуляризующее преобразование $t = \varepsilon\eta$, разложим коэффициенты в ряд по степеням ε и подставим вместо $u(x, t; \varepsilon)$ выражение для $\Pi(x, \eta; \varepsilon)$. Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получаем

$$L_1 \Pi_k(x, \eta) \equiv \partial^2 \Pi_k/\partial \eta^2 + A(x, 0) \partial \Pi_k/\partial \eta + C(x, 0) \Pi_k = \pi_k(x, \eta), \quad k = \overline{0, N}, \qquad (6)$$

где $\pi_k(x, \eta)$ — линейная комбинация $\Pi_s(x, \eta)$, $s < k$, и их производных, причем $\pi_0(x, \eta) \equiv 0$. Дополнительные условия для $\Pi_k(x, \eta)$ зададим таким образом, чтобы $\Pi(x, \eta; \varepsilon)$ в сумме с $v(x, t; \varepsilon)$ удовлетворяла условиям (2). Тогда

$$\Pi_k(x, 0) = -v_k(x, 0), \quad \frac{\partial \Pi_k}{\partial \eta}(x, 0) = -\frac{\partial v_{k-1}}{\partial t}(x, 0), \quad k = \overline{0, N}. \qquad (7)$$

Нетрудно убедиться, что при выполнении условия 2 для $\Pi_k(x, \eta)$ имеет место оценка

$$\|\Pi_k(x, \eta)\| \leqslant M(x) \exp\{-\varkappa(x)\eta\},$$

где

$$\varkappa(x) = \min_i \varkappa_i(x), \quad \varkappa_i(x) = \begin{cases} a(x, 0)/2 - D^{1/2}, & D = a^2(x, 0)/4 - \gamma_i(x) > 0, \\ a(x, 0)/2, & D \leqslant 0, \end{cases}$$

$\gamma_i(x)$— собственные значения матрицы $C(x, 0)$. (Здесь и в дальнейшем через $M(x)$ будем обозначать многочлен, подходящий для той или иной оценки, а под нормой вектора будем подразумевать сумму модулей его элементов.) Отсюда видно, что $\Pi(x, \eta; \varepsilon)$ — функция погранслоя.

Выписывая явные выражения функций $\pi_k(x, \eta)$, $k = \overline{0, N}$, и используя условия (7), нетрудно убедиться, что

$$L_1\Pi_k(0, 0) = \begin{cases} 0, & k = 0, \\ -b(0, 0)\,\partial v_0(0, 0)/\partial x, & k = 1, \\ -b(0, 0)\,\partial v_{k-1}(0, 0)/\partial x + \partial^2 v_{k-2}(0, 0)/\partial x^2, & k = \overline{2, N}. \end{cases} \tag{8}$$

Эти условия будут играть важную роль при построении функций углового погранслоя.

Применяя, как и выше, стандартную процедуру теории сингулярных возмущений, после замены $x = \varepsilon\xi$ получаем рекуррентные соотношения для определения $Q_k(\xi, t)$:

$$L_2 Q_k(\xi, t) \equiv \partial^2 Q_k/\partial\xi^2 - B(0, t)\,\partial Q_k/\partial\xi - C(0, t)\,Q_k = q_k(\xi, t), \quad k = \overline{0, N}, \tag{9}$$

где $q_k(\xi, t)$ — некоторая линейная комбинация $Q_j(\xi, t)$ и их производных $(j < k)$, причем $q_0(\xi, t) \equiv 0$. Дополнительные условия для $Q_k(\xi, t)$ задаются так, чтобы функция $Q(\xi, t; \varepsilon) = \sum_{i=0}^{N} \varepsilon^i Q_i(\xi, t)$ в сумме с $v(x, t; \varepsilon)$ удовлетворяла первому условию (3) и была функцией погранслоя в окрестности границы $x = 0$. Эти условия будут иметь вид

$$Q_k(0, t) = -v_k(0, t), \quad Q_k(\xi, t) \underset{\xi \to \infty}{\to} 0, \quad k = \overline{0, N}. \tag{10}$$

В силу условия 2 имеет место оценка $\|Q_k(\xi, t)\| \leqslant M(t) \exp\{-\lambda(t)\xi\}$, $k = \overline{0, N}$, где $\lambda(t) = \min_i \lambda_i(t)$, $\lambda_i(t) = -b(0, t)/2 + (b^2(0, t)/4 + \gamma_i(t))^{1/2}$, $\gamma_i(t)$ — собственные значения матрицы $C(0, t)$. Таким образом, $Q(\xi, t; \varepsilon)$ — функция погранслоя.

Из (9), (10) и условия 3 следует, что

$$\frac{\partial^2 Q_k}{\partial\xi^2}(0, 0) - B(0, 0)\frac{\partial Q_k}{\partial\xi}(0, 0) =$$

$$= \begin{cases} 0, & k = 0, \\ C(0, 0)\,v_1(0, 0) + A(0, 0)\dfrac{\partial v_0}{\partial t}(0, 0), & k = 1, \\ C(0, 0)\,v_k(0, 0) + A(0, 0)\dfrac{\partial v_{k-1}}{\partial t}(0, 0) + \dfrac{\partial^2 v_{k-2}}{\partial t^2}(0, 0), & k = \overline{2, N}. \end{cases} \tag{11}$$

Эти условия потребуются в дальнейшем при построении функций углового погранслоя.

Функция погранслоя в окрестности $x = l$ строится аналогично функции погранслоя в окрестности $x = 0$ с соответствующими изменениями.

Функция погранслоя $\Pi(x, \eta; \varepsilon)$, удовлетворяя в сумме с $v(x, t; \varepsilon)$ условиям (2), вместе с тем вносит невязку на границу $x = 0$. Функция $Q(\xi, t; \varepsilon)$ также вносит невязку на границу $t = 0$. Для того чтобы ликвидировать эти невязки, строим функцию углового погранслоя $P(\xi, \eta; \varepsilon)$. Аналогичная ситуация возникает в угловой точке $(l, 0)$, в которой строится угловой погранслой $P^*(\zeta, \eta; \varepsilon)$. Рассмотрим построение функции углового погранслоя $P(\xi, \eta; \varepsilon)$ ($P^*(\zeta, \eta; \varepsilon)$ строится аналогично, с соответствующими изменениями).

Сделаем в однородной системе (1) регуляризующие преобразования $t = \varepsilon\eta$ и $x = \varepsilon\xi$, разложим коэффициенты в ряд по степеням ε и подставим вместо $u(x, t; \varepsilon)$ выражение $P(\xi, \eta; \varepsilon) = \sum_{i=0}^{N} \varepsilon^i P_i(\xi, \eta)$. Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получаем

$$L_3 P_k(\xi, \eta) \equiv \partial^2 P_k/\partial\eta^2 - \partial^2 P_k/\partial\xi^2 + A(0, 0)\,\partial P_k/\partial\eta + B(0, 0)\,\partial P_k/\partial\xi + C(0, 0)\,P_k = r_k(\xi, \eta), \quad k = \overline{0, N}. \tag{12}$$

Здесь $r_k(\xi, \eta)$ выражаются определенным образом через P_j, $\partial P_j/\partial\xi$, $\partial P_j/\partial\eta$, $k > j$, причем $r_0(\xi, \eta) \equiv 0$ и $r_k(0, 0) \equiv 0$. Учитывая изложенное выше, дополнительные условия для $P_k(\xi, \eta)$ запишем так:

$$P_k(0, \eta) = -\Pi_k(0, \eta), \quad P_k(\xi, 0) = -Q_k(\xi, 0), \quad \frac{\partial P_k}{\partial\eta}(\xi, 0) = -\frac{\partial Q_{k-1}}{\partial t}(\xi, 0), \quad k = \overline{0, N}. \tag{13}$$

Таким образом, $P_k(\xi, \eta)$ ($k = \overline{0, N}$) определяются как решения задач (12), (13), в частности $P_0(\xi, \eta) \equiv 0$. Следует заметить, что в силу (7), (10) начальные и граничные условия (13) оказываются согласованными, а в силу (5), (8), (11) — удовлетворяют (12) в угловой точке (0, 0). Эти условия согласования обеспечивают существование и единственность решений задач (12), (13), имеющих непрерывные частные производные второго порядка, что позволяет провести итерационный процесс построения угловых погранфункций до любого номера N при условии достаточной гладкости коэффициентов системы (12). Решения задач (12), (13) записываются в явном виде, и для них справедлива лемма, доказывающая их погранслойный характер.

Лемма. *Функции $P_k(\xi, \eta)$, $k = \overline{0, N}$, удовлетворяют неравенствам*

$$\| P_k(\xi, \eta) \| \leqslant \begin{cases} M(\xi)\exp\{-\lambda\xi\}, & \xi \geqslant \eta, \\ M(\eta)\exp\{-x\eta\}, & \xi \leqslant \eta, \end{cases}$$

где $\varkappa = \min_i \varkappa_i$, $\lambda = \min_i \lambda_i$,

$$\varkappa_i = \begin{cases} a/2 - D^{1/2}, & d = a^2/4 - b^2/4 - \gamma_i > 0, \quad D = a^2/4 - \gamma_i > 0, \\ (a - b)/2, & d < 0, \quad D \gtrless 0, \end{cases}$$

$$\lambda_i = \begin{cases} -b/2 + (b^2/4 + \gamma_i)^{1/2}, & d > 0, \quad D > 0, \\ (a - b)/2, & d < 0, \quad D \gtrless 0, \end{cases}$$

γ_i — *собственные значения матрицы* $C(0, 0)$, $a = a(0, 0)$, $b = b(0, 0)$.

В системе (12) сделаем замену, аналогичную [3], т. е. приведем матрицу $C(0, 0)$ к жордановой форме. После этого приведем (12) к более простому виду, а условия (13) — к нулевым. Тогда доказательство леммы во многом аналогично доказательству соответствующей леммы из [1].

Методом интегралов энергии [4] для $R_N(x, t; \varepsilon)$ получена оценка

$$\|R_N(x, t; \varepsilon)\|_{L_2(D)} \leqslant C\varepsilon^{N+1/2}. \tag{14}$$

Полученный результат сформулируем в виде теоремы.

Теорема 1. *Пусть выполняются условия 1—4. Тогда при $s = 0$ решение задачи (1)—(3) допускает асимптотическое разложение (4), где*

$v(x, t; \varepsilon)$ — *регулярная часть асимптотики,* $\Pi_i(x, \eta)$, $Q_i(\xi, t)$, $Q_i^*(\zeta, t)$ — *функции обыкновенного погранслоя,* $P_i(\xi, \eta)$, $P_i^*(\zeta, \eta)$ — *функции углового погранслоя,* $R_N(x, t; \varepsilon)$ — *остаточный член, для которого справедлива оценка* (14).

3. Построение асимптотики решения смешанной задачи при $s = 1$ (случай двух малых параметров). Асимптотическое разложение решения задачи ищем в виде

$$u(x, t; \varepsilon, \mu) = \sum_{i+j=0}^{1} \varepsilon^i \mu^j v_{ij}(x, t) + \sum_{i+j=0}^{1} \varepsilon^i \mu^j \prod\nolimits_{ij}(x, \eta) + \mu \sum_{i+j=0}^{1} \varepsilon^i \mu^j Q_{ij}(x, \tau) +$$

$$+ \sum_{i+j=0}^{1} \varepsilon^i \mu^j L_{ij}(\xi, t) + \sum_{i+j=0}^{1} \varepsilon^i \mu^j L_{ij}^*(\zeta, t) + \sum_{i+j=0}^{1} \varepsilon^i \mu^j P_{ij}(\xi, \eta) + \sum_{i+j=0}^{1} \varepsilon^i \mu^j P_{ij}^*(\zeta, \eta) +$$

$$+ R(x, t; \varepsilon, \mu), \tag{15}$$

где $\eta = t/\varepsilon$, $\tau = t/(\varepsilon\mu)$, $\xi = x/\varepsilon$, $\zeta = (l - x)/\varepsilon$, вектор-функции $v_{ij}(x, t)$, $\Pi_{ij}(x, \eta)$, $Q_{ij}(x, \tau)$, $L_{ij}(\xi, t)$, $L_{ij}^*(\zeta, t)$, $P_{ij}(\xi, \eta)$, $P_{ij}^*(\zeta, \eta)$ определяются с помощью рекуррентного процесса, описанного ниже.

Регулярная часть асимптотики $v(x, t; \varepsilon, \mu) = \sum\limits_{i+j=0}^{1} \varepsilon^i \mu^j v_{ij}(x, t)$ определяется из системы, которая получается применением стандартной процедуры метода возмущений:

$$C(x, t) v_{00} = f(x, t), \quad C(x, t) v_{10} = -a(x, t)\, \partial v_{00}/\partial t - b(x, t)\, \partial v_{00}/\partial x, \ v_{01} = 0.$$

Вообще говоря, функция $v(x, t; \varepsilon, \mu)$ ни одному из условий (2), (3) не удовлетворяет.

Функция погранслоя $\Pi(x, \eta; \varepsilon, \mu) = \sum\limits_{i+j=0}^{1} \varepsilon^i \mu^j \Pi_{ij}(x, \eta)$ вместе с $v(x, t; \varepsilon, \mu)$ и $Q(x, \tau; \varepsilon, \mu)$, определенной ниже, удовлетворяют первому начальному условию. Для определения $\Pi_{ij}(x, \eta)$ получаем систему

$$A(x, 0)\, \partial \Pi_{ij}/\partial \eta + C(x, 0)\, \Pi_{ij} = g_{ij}(x, \eta), \quad i, j = 0,1, \tag{16}$$

где $g_{ij}(x, \eta)$ — некоторая линейная комбинация $\Pi_{00}(x, \eta)$ и ее производных, причем $g_{00}(x, \eta) \equiv 0$. Дополнительные условия для $\Pi_{ij}(x, \eta)$ имеют вид

$$\Pi_{ij}(x, 0) = -v_{ij}(x, 0) - Q_{ij-1}(x, 0), \quad i, j = 0,1. \tag{17}$$

Решение задачи (16), (17) легко записать в явном виде, причем, используя условие 3, получаем $\Pi_{00}(0, \eta) = 0$ и $\partial \Pi_{00}/\partial \eta\, (0, \eta) = 0$. А в силу условия 2 $\Pi_{ij}(x, \eta)$ действительно являются функциями погранслоя.

Функция погранслоя $Q(x, \tau; \varepsilon, \mu) = \mu \sum\limits_{i+j=0}^{1} \varepsilon^i \mu^j Q_{ij}(x, \tau)$ вместе с $v(x, t; \varepsilon, \mu)$ и $\Pi(x, \eta; \varepsilon, \mu)$ удовлетворяют второму начальному условию. Для определения $Q_{ij}(x, \tau)$ получаем задачи

$$\frac{\partial^2 Q_{ij}}{\partial \tau^2} + A(x, 0) \frac{\partial Q_{ij}}{\partial \tau} = q_{ij}(x, \tau),$$

$$\frac{\partial Q_{ij}}{\partial \tau}(x, 0) = -\frac{\partial v_{i-1j}}{\partial t}(x, 0) - \frac{\partial \Pi_{ij}}{\partial \eta}(x, 0), \quad Q_{ij}(x, \tau) \underset{\tau \to \infty}{\to} 0, \quad i, j = 0,1.$$

Здесь $q_{ij}(x, \tau)$ определенным образом выражаются через $Q_{00}(x, \tau)$ и ее производные, причем $q_{00}(x, \tau) \equiv 0$. Нетрудно убедиться, что $Q_{00}(x, \tau) \equiv 0$, а в силу условия 2 следует, что $Q_{ij}(x, \tau)$, $i, j = 0,1$, действительно являются функциями погранслоя.

Функция погранслоя $L(\xi, t; \varepsilon, \mu) = \sum\limits_{i+j=0}^{1} \varepsilon^i \mu^j L_{ij}(\xi, t)$ в сумме с $v(x, t; \varepsilon, \mu)$

удовлетворяют первому граничному условию (3). Задачи для определения $L_{ij}(\xi, t)$ получаются стандартным способом и имеют вид

$$B(0, t)\,\partial L_{ij}/\partial\xi + C(0, t)\,L_{ij} = h_{ij}(\xi, t), \quad L_{ij}(0, t) = -v_{ij}(0, t), \quad i, j = 0, 1,$$

где $h_{ij}(\xi, t)$ — некоторая линейная комбинация $L_{00}(\xi, t)$ и ее производных, причем $h_{00}(\xi, t) \equiv 0$. Функции $L_{ij}(\xi, t)$ в силу условия 2 имеют погранслойный характер. В силу условия 3, принимая во внимание структуру решения $L_{00}(\xi, t)$, имеем $L_{00}(\xi, 0) = 0$. Погранслой в окрестности $x = l$ строится аналогично.

Для того чтобы ликвидировать невязки, которые вносят $\Pi_{ij}(x, \eta)$ и $Q_{ij}(x, \tau)$ на границу $x = 0$ и $L_{ij}(\xi, t)$ на границу $t = 0$, строится функция углового погранслоя $P(\xi, \eta; \varepsilon, \mu) = \sum\limits_{i+j=0}^{1} \varepsilon^i \mu^j P_{ij}(\xi, \eta)$. Для определения $P_{ij}(\xi, \eta)$ получим задачи

$$A(0, 0)\,\partial P_{ij}/\partial\eta + B(0, 0)\,\partial P_{ij}/\partial\xi + C(0, 0)\,P_{ij} = 0, \tag{18}$$

$$P_{ij}(\xi, 0) = -L_{ij}(\xi, 0), \quad P_{ij}(0, \eta) = -\Pi_{ij}(0, \eta), \quad i, j = 0,1. \tag{19}$$

Решения задач (18), (19) легко записываются в явном виде, и в силу условий 1—3 эти решения непрерывны и непрерывно дифференцируемые всюду в четверти плоскости, включая границу, и $P_{ij}(\xi, \eta) \to 0$ при $\xi + \eta \to \infty$, $i, j = 0, 1$. Но вторая производная от $P_{10}(\xi, \eta)$ в точке $(0, 0)$ терпит разрыв, если не требовать дополнительных условий согласования. Правая часть уравнения для определения $P_{11}(\xi, \eta)$ выражается через вторую производную от $P_{10}(\xi, \eta)$, и в силу изложенного она разрывна. Только поэтому асимптотическое разложение решения задачи при данных условиях согласования строится до первого порядка. Аналогично определяется угловой погранслой в окрестности точки $(l, 0)$.

Методом интегралов энергии [4] для $R(x, t; \varepsilon, \mu)$ получена оценка

$$\| R(x, t; \varepsilon, \mu) \|_{L_2(D)} \leqslant C(\varepsilon + \mu)^{3/2}. \tag{20}$$

Полученный результат сформулируем в виде теоремы.

Теорема 2. *Пусть выполняются условия* 1 — 4. *Тогда асимптотическое разложение решения задачи* (1) — (3) *при* $s = 1$ *представляется в виде* (15), *где* $v(x, t; \varepsilon, \mu)$ — *регулярная часть асимптотики*, $\Pi_{ij}(x, \eta)$, $Q_{ij}(x, \tau)$, $L_{ij}(\xi, t)$, $L^*_{ij}(\zeta, t)$ — *функции обыкновенного погранслоя*, $P_{ij}(\xi, \eta)$, $P^*_{ij}(\zeta, \eta)$ — *функции углового погранслоя, для остаточного члена справедлива оценка* (20).

Замечание 1. Если в системе (1) $(s = 0)$ $b(x, t) \equiv 0$ и выполняются условия 1—3, то на этот случай распространяется результат работы [1].

Замечание 2. Если в (1) $(s = 1)$ $b(x, t) \equiv 0$ и выполняются условия 1 — 3, то асимптотика решения задачи имеет вид (15), где η и τ прежние, $\xi = \dfrac{x}{\varepsilon\mu^{1/2}}$, $\zeta = \dfrac{l - x}{\varepsilon\mu^{1/2}}$. Для определения функций $\Pi_{ij}(x, \eta)$, $Q_{ij}(x, \tau)$, $L_{ij}(\xi, t)$, $L^*_{ij}(\zeta, t)$ получаются системы обыкновенных дифференциальных уравнений, и в силу условия 1 эти функции достаточно гладкие в рассматриваемой области. Функции $P_{ij}(\xi, \eta)$ и $P^*_{ij}(\zeta, \eta)$ определяются как решения смешанных задач для параболической системы уравнений второго порядка. Но эти решения, начиная с $P_{ij}(\xi, \eta)$ и $P^*_{ij}(\zeta, \eta)$ при $i + j = 1$, не имеют вторых непрерывных производных по η в угловых точках $(0, 0)$ и $(l, 0)$ соответственно. Поэтому не удается построить асимптотику решения данной задачи произвольного порядка, так как эти вторые производные входят в правую часть системы для определения приближения второго порядка. Но при более жестких условиях согласования этого удается избежать.

Замечание 3. Построение формальной асимптотики при соответствующих предположениях легко может быть проведено и для общей гиперболической системы, а не только слабо связанной. Получение же соответствующей оценки остаточного члена является открытым вопросом. -

Замечание 4. Выше указаны причины, по которым нельзя получить асимптотику решения задачи (1)—(3) в случае $s = 1$ до любого порядка методом погранфункций. Возможно, что ее можно получить методом согласования асимптотических разложений. Новый результат в этом направлении для скалярного гиперболического уравнения содержится в работе [5].

1. *Бутузов В. Ф.* Угловой погранслой в смешанных сингулярно возмущенных задачах для гиперболических уравнений.— Мат. сб., 1977, **104**, № 3, с. 460—485.
2. *Цымбал В. Н.* Угловой погранслой в смешанной сингулярно возмущенной задаче для гиперболического уравнения.— В кн.: Аналитические методы нелинейной механики. Киев. : Ин-т математики АН УССР, 1981, с. 148—152.
3. *Бутузов В. Ф., Удодов Ю. П.* Асимптотическое решение системы сингулярно возмущенных уравнений эллиптического типа с угловым погранслоем.— Журн. вычисл. математики и мат. физики, 1981, **21**, № 3, с. 665—677.
4. *Курант Р.* Уравнения с частными производными.— М. : Мир, 1964.— 830 с.
5. *Нестерова Т. Н.* Метод сращивания асимптотических разложений для решения гиперболического уравнения с малым параметром.— Мат. сб., 1983, **120**, № 4, с. 546—555.
6. *Вишик М. И., Люстерник Л. А.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром.— Успехи мат. наук, 1957, **12**, вып. 5, с. 3—122.
7. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений.— М. : Наука, 1973.— 272 с.

Львов. ун-т Получено 27.03.84