УДК 519.21

В. С. Королюк, Ю. В. Боровских

Разложения для U-статистик и функционалов Мизеса

Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — независимые случайные величины, которые принимают свои значения в измеримом пространстве $(\mathfrak{X}, A)$ и имеют на нем одно и то же распределение P. Введем в рассмотрение U-статистику

$$U_n = \binom{n}{m}^{-1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_m \leqslant n} \Phi(X_{i_1}, \ldots, X_{i_m}) \tag{1}$$

и функционал Мизеса

$$\theta_n = n^{-m} \sum_{(i_1, \ldots, i_m)=1}^{n} \Phi(X_{i_1}, \ldots, X_{i_m}), \tag{2}$$

где $\Phi: (x_1, \ldots, x_m) \to \Phi(x_1, \ldots, x_m)$ — симметрическая функция m переменных, $n \geqslant m$. Предположим, что $E\Phi = 0$ и обозначим $g(x) = E(\Phi(X_1, \ldots, X_m) \mid X_1 = x)$, $\sigma_1^2 = Eg^2(X_1) < \infty$.

В данной работе изучается вопрос об оценке скорости сходимости в форме асимптотических разложений для случайных величин (1), (2). Теорема 1 относится к U-статистикам в случае $\sigma_1 > 0$ и имеет дело с функцией распределения (1). В теореме 2 приводятся асимптотические оценки для моментов функционала Мизеса (2) с ядром Φ, которое определяется как скалярное произведение в сепарабельном вещественном гильбертовом пространстве $\mathfrak{X}$. В этой ситуации $\sigma_1 = 0$. Задаче оценки скорости сходимости распределений U-статистик и функционалов Мизеса посвящены работы [1—7]. Однако в этих работах асимптотические разложения приводятся при излишних условиях на ядро Φ, и одна из целей нашей работы состоит в том, чтобы ослабить эти условия, в частности вместо условий на моменты ядра Φ ввести более слабое условие на моменты функции g, если $\sigma_1 > 0$. Задача об оценке моментов $E \mid U_n \mid^q$ и $E \mid \theta_n \mid^q$ в некоторых ситуациях изучалась в работах [7 — 12]. В отличие от работ [9—12] наш метод оценки $E \| S_n \|^q$ является развитием метода работы фон Бара [13], по которому сначала выводится интегральное представление для $E \| S_n \|^q$, содержащее характеристическую функцию случайной величины $\| S_n \|^q$. Таким образом, этот подход дает возможность применить метод характеристических функций для оценки $E \| S_n \|^q$ в несколько ином плане, чем в работах В. В. Сазонова и Б. А. Залесского [9—11].

1. О функции распределения. Введем следующие обозначения:

$$S = \frac{1}{\sigma_1 \sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n} g(X_j), \qquad \hat{\sigma}^2 = \frac{m^2}{n} Eg^2(X_1), \quad \sigma^2 = EU_n^2,$$

$$Y = Y_{1,2,\dots,m} = Y(x_1, x_2, \dots, x_m) = \Phi(x_1, x_2, \dots, x_m) - \sum_{j=1}^{m} g(x_j),$$

$$\delta = \binom{n}{m}^{-1} \hat{\sigma}^{-1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \dots < i_m \leqslant n} Y(X_{i_1}, \dots, X_{i_m}),$$

$$\delta_1 = \binom{n}{m}^{-1} \hat{\sigma}^{-1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \dots < i_m \leqslant k} Y(X_{i_1}, \dots, X_{i_m}), \quad k = n - [\sqrt{n}].$$

Кроме того, пусть $\varphi(t) = E \exp(itg(X_1))$ — характеристическая функция случайной величины $g(X_1)$,

$$G(x) = \Phi(x) + \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{h_m}{\sqrt{2\pi}} (1 - x^2) \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right), \quad x \in R,$$

$$g_n(t) = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}} (it)^3 h_m\right) \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right), \quad t \in R,$$

где $\Phi(x)$ — стандартная нормальная функция распределения,

$$h_m = \frac{1}{6} \sigma_1^{-3} E(g(X_1))^3 + (2m\sigma_1^3)^{-1} E\left(Y\left(\sum_{k=1}^{m} g(X_k)\right)^2\right).$$

Теорема 1. *Пусть выполнено условие Крамера*

$$\lim_{|t| \to \infty} \sup |\varphi(t)| < 1 \tag{3}$$

и моментные условия

$$\sigma_1 > 0, \quad E|g(X_1)|^4 < \infty, \quad E|\Phi|^3 < \infty. \tag{4}$$

Тогда при $n \to \infty$

$$\sup_x |P(\sigma^{-1} U_n < x) - G(x)| = O(n^{-3/5}). \tag{5}$$

Доказательство. Очевидно, что

$$\sup_x |P(\sigma^{-1} U_n < x) - G(x)| = \sup_x \left| P(S + \delta < x) - G\left(x \frac{\hat{\sigma}}{\sigma}\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_x \left| G\left(x \frac{\hat{\sigma}}{\sigma}\right) - G(x)\right| + \sup_x |G(x) - G(x + n^{-3/5})| +$$

$$+ P(|\delta - \delta_1| \geqslant n^{-3/5}) + \sup_x |P(S + \delta_1 < x) - G(x)|. \tag{6}$$

Справа в (6) первые три слагаемые оцениваются как $O(n^{-3/5})$, причем эта оценка для первых двух слагаемых вытекает из свойств функции $G(x)$, а вероятность $P(|\delta - \delta_1| \geqslant n^{-3,5})$ при условии (4) оценивается с помощью неравенства Чебышева и неравенства (42) из [1, с. 38] при $l = 3$. Четвертое слагаемое справа в (6) оцениваем по известному неравенству Эссеена (см. [1]).

2. О моментах. Пусть далее $\mathfrak{X}$ — сепарабельное вещественное гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$ и нормой $\|\cdot\|$. Пусть в (1), (2) $m = 2$ и в качестве ядра Φ выберем скалярное произведение в $\mathfrak{X}$, т. е. $\Phi(x, y) = (x, y)$, $x, y \in \mathfrak{X}$.

Рассмотрим вопрос об оценке моментов $E\|S_n\|^q$, где $q > 0$, $S_n = n^{-1/2}(X_1 + X_2 + \dots + X_n)$, а $X_1, X_2, \dots, X_n$ — независимые $\mathfrak{X}$-значные случайные величины. Пусть сначала $q = 2r$, r — натуральное число, и предполагаем, что $E\|X_1\|^{2r} < \infty$, $EX_1 = 0$. Представим $\|S_n\|^{2r}$ в виде функционала Мизеса (2). В соответствии с определением имеем

$$\|S_n\|^{2r} = \frac{1}{n^r}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(X_i, X_j)\right)^r = \frac{1}{n^r}\sum_{(i_1, \dots, i_{2r})=1}^{n} \Psi(X_{i_1}, \dots, X_{i_{2r}}), \tag{7}$$

где $\Psi(x_1, x_2, \ldots, x_{2r-1}, x_{2r}) = (x_1, x_2) \ldots (x_{2r-1}, x_{2r})$. В (7) ядро Ψ не обладает свойством симметрии. Для того чтобы его симметризовать, воспользуемся формулой Гефдинга [14]

$$\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_{2r}) = \frac{1}{(2r)!} \sum_{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2r})} \Psi(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \ldots, x_{\alpha_{2r}}). \tag{8}$$

Здесь $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2r})$ — перестановка чисел $(1, 2, \ldots, 2r)$. Например, при $r=2$

$$\Phi(x_1, \ldots, x_4) = \frac{1}{3}\{(x_1, x_2)(x_3, x_4) + (x_1, x_3)(x_2, x_4) + (x_1, x_4)(x_2, x_3)\}.$$

Стало быть, при любом натуральном r

$$\| S_n \|^{2r} = \frac{1}{n^r} \sum_{(i_1, \ldots, i_{2r})=1}^{n} \Phi(X_{i_1}, \ldots, X_{i_{2r}}) \tag{9}$$

с симметрическим ядром (8).

По формуле Беннера — Киршнера [15] (см. также [2, с. 33]) любой функционал Мизеса представляется в виде линейной комбинации определенных U-статистик. Поэтому (9) можно записать так:

$$\| S_n \|^{2r} = \sum_{k=1}^{2r} \binom{n}{k} n^{-r} U_n^{(k)}, \tag{10}$$

где $n \geqslant 2r$,

$$U_n^{(k)} = \binom{n}{k}^{-1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} \Phi_k(X_{i_1}, \ldots, X_{i_k}).$$

При этом

$$\Phi_k(x_1, \ldots, x_k) = \sum_{\substack{\nu_1 + \ldots + \nu_k = 2r \\ \nu_j \geqslant 1}} \frac{(2r)!}{\nu_1! \ldots \nu_k!} \Phi(\overbrace{x_1, \ldots, x_1}^{\nu_1 \text{ раз}}, \ldots, \overbrace{x_k, \ldots, x_k}^{\nu_k \text{ раз}})$$

с функцией Φ из (8).

Из (8) и (10) при условии $E\| X_1 \|^{2r} < \infty$ следует

$$E\| S_n \|^{2r} = \sum_{j=0}^{r-1} c_j n^{-j}, \tag{11}$$

где c_j не зависят от n.

Коэффициенты c_j запишем в другом виде. Для этого введем следующие обозначения. Сначала определим формальные кумулянтные полиномы $\varkappa_j = \varkappa_j(d_2, \ldots, d_j)$, $j \geqslant 2$, от переменных d_j с помощью формального степенного ряда

$$\sum_{j=2}^{\infty} \varkappa_j(d_2, \ldots, d_j) \frac{t^j}{j!} = \ln\left(1 + \sum_{j=2}^{\infty} d_j \frac{t^j}{j!}\right)$$

и полиномы $P_j = P_j(d_2, \ldots, d_{j+2})$, $j \geqslant 0$, с помощью ряда

$$\sum_{j=0}^{\infty} P_j(d_2, \ldots, d_{j+2}) t^j = \exp\left(\sum_{j=1}^{\infty} \varkappa_{j+2} \frac{t^j}{(j+2)!}\right).$$

Затем в полиноме P_j каждое выражение $d_{i_1} d_{i_2} \ldots d_{i_k}$ заменим на частные производные

$$D_\eta = \frac{\partial^{i_1}}{\partial \eta_1^{i_1}} \ldots \frac{\partial^{i_k}}{\partial \eta_k^{i_k}}, \quad \eta = (\eta_1, \ldots, \eta_k).$$

В результате получим дифференциальный оператор $P_j(D_\eta)$, порядок которого заключен между j и $3j$. Далее с помощью $P_j(D_\eta)$ определим функции

$$\Phi_j(x) = P_j(D_\eta)(P(\|\tau + \eta_1 X_1 + \ldots + \eta_s X_s\|^2 < x))|_{\eta_1=\ldots=\eta_s=0}, \qquad (12)$$

где $x \in R^+ = [0, \infty)$, τ — гауссова $\mathfrak{X}$-значная случайная величина с распределением N, имеющим такую же ковариационную структуру, что и распределение X_1. В (12) предполагаем, что число s не меньше порядка дифференциального оператора $P_j(D_\eta)$.

Сравнивая (11) и теорему 3.5 из [16, с. 854], видим, что

$$c_j = \int_0^\infty x^{2r} d\Phi_{2j}(x). \qquad (13)$$

Пусть, далее, $q > 0$, $q \neq 2r$, r — натуральное. Известно (см. [13, с. 811]), что при таких q для всех $x \in R$ справедлива формула

$$|x|^q = \frac{1}{\pi}\Gamma(1+q)\cos\left(\frac{\pi(1+q)}{2}\right)\int_{-\infty}^{\infty}\left(\cos(xt) - \sum_{j=0}^{\nu}\frac{(-1)^j}{(2j)!}(xt)^{2j}\right)\times$$
$$\times |t|^{-1-q}dt, \qquad (14)$$

где $\nu = \left[\frac{q}{2}\right]$, $\Gamma(z)$ — гамма-функция.

Метод работы фон Бара [13] по существу основан на этой формуле. В (14) в качестве x можно выбирать любую случайную величину, имеющую математическое ожидание порядка q. Тогда после соответствующего усреднения справа в (14) в явном виде будет выделяться характеристическая функция выбранной случайной величины. Так что согласно (14) для оценки моментов можно приспособить метод характеристических функций. Фон Бар [13] в (14) полагал $x = n^{-1/2}(X_1 + \ldots + X_n)$, $X_i \in R$. Очевидно, если в (14) положить $x = U_n$ или $x = \theta_n$ из (1), (2), то можно получить интегральные представления для моментов $E\,|\,U_n|^q$ и $E\,|\,\theta_n|^q$.

Пользуясь данным подходом, оценим $E\|S_n\|^q$. Будем предполагать, что $E\|X_1\|^p < \infty$, где $p = \max(2, q)$. Обозначим $S_n' = n^{-1/2}(X_1' + \ldots + X_n')$, где $X_j' = X_j 1_{\{\|X_j\| \leqslant \sqrt{n}\}}$, 1_A — индикаторная функция множества $A \in \mathcal{A}$. Всюду в дальнейшем предполагаем, что число ненулевых собственных чисел $\{\lambda_j\}$ ковариационного оператора S меры P бесконечно.

Очевидно, что

$$E\|S_n\|^q - E\|\tau\|^q = \Delta_1(q) + \Delta_2(q), \qquad (15)$$

где

$$\Delta_1(q) = E\|S_n\|^q - E\|S_n'\|^q, \quad \Delta_2(q) = E\|S_n'\|^q - E\|\tau\|^q.$$

Относительно $\Delta_1(q)$ в [9, с. 252] доказано, что

$$|\Delta_1(q)| \leqslant c(q) B_n(q), \qquad (16)$$

где $c(q)$ зависит только от q,

$$B_n(q) = nP(\|X_1\| > \sqrt{n})E\|X_1\|^q + n^{-(q-2)/2}\int_{\|x\|>\sqrt{n}}\|x\|^q P(dx).$$

Оценка (16) справедлива при всех $q > 0$. Рассмотрим величину $\Delta_2(q)$ и пусть для простоты $0 < q < 4$. В соответствии с (14) имеем

$$E\|S_n'\|^q = -\frac{2}{\pi}\Gamma\left(1+\frac{q}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi q}{4}\right)\int_{-\infty}^{\infty}(E\cos(\|S_n'\|^2 t) - 1)|t|^{-1-q/2}dt. \quad (17)$$

Представление, аналогичное (17), справедливо и для $E\|\tau\|^q$. Стало быть, при $0 < q < 4$, $q \neq 2$

$$\Delta_2(q) = -\frac{2}{\pi}\Gamma\left(1+\frac{q}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi q}{4}\right)\int_{-\infty}^{\infty}(E\cos(\|S_n'\|^2 t) - E\cos(\|\tau\|^2 t))\frac{dt}{|t|^{1+q/2}}. \tag{18}$$

Обозначим $\varphi_n(t) = E\exp(it\|S_n'\|^2)$, $\varphi(t) = E\exp(it\|\tau\|^2)$, $\psi_n(t) = \varphi_n(t) - \varphi(t)$. Тогда (18) можно представить в виде

$$\Delta_2(q) = -\frac{1}{\pi}\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi q}{4}\right)\int_{-\infty}^{\infty}(\psi_n(t) + \psi_n(-t))|t|^{-1-q/2}dt. \tag{19}$$

И если в (19) $0 < q < 2$, то

$$\Delta_2(q) = -\frac{2}{\pi}\Gamma\left(1+\frac{q}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi q}{4}\right)\int_{-\infty}^{\infty}\psi_n(t)|t|^{-1-q/2}dt. \tag{20}$$

В (20) интеграл по области $|t| \leqslant n^{1-\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, оценим с помощью известной оценки (см., например, [9, с. 255] или [3, с. 13—15])

$$|\varphi_n(t) - \varphi(t)| \leqslant |t|(C_1(1+|t|)^{-q_1} + C_2 n^{-q_2})A_n, \tag{21}$$

где $C_i > 0$ — постоянные, $q_i > 0$ — произвольно большие числа,

$$A_n = \int_{\|x\| > \sqrt{n}}\|x\|^2 P(dx) + \frac{1}{n}\int_{\|x\| \leqslant \sqrt{n}}\|x\|^4 P(dx).$$

Таким образом, при $0 < q < 2$

$$\left|\int_{-n^{1-\varepsilon}}^{n^{1-\varepsilon}}\psi_n(t)|t|^{-1-q/2}dt\right| \leqslant a(q)A_n, \tag{22}$$

где $\lim_{q\to 0} a(q) = a(0) < \infty$.

Кроме того, в (20) интеграл по области $|t| \geqslant n^{1-\varepsilon}$ от функции $\varphi(t)$ можно оценить как

$$\int_{|t| \geqslant n^{1-\varepsilon}}|\varphi(t)||t|^{-1-q/2}dt = O(n^{-q_2}) \tag{23}$$

в силу того, что число ненулевых собственных чисел $\{\lambda_j\}$ S-оператора предполагается бесконечным.

Теперь перейдем к оценке интеграла в (20) по области $|t| \geqslant n^{1-\varepsilon}$ от функции $\varphi_n(t)$.

Лемма. *Пусть при любом $\beta > 2$ выполнено условие*

$$E\|X_1\|^\beta < \infty. \tag{24}$$

Тогда, если $\alpha > 0$, то при $n \to \infty$

$$\left|\int_{n^{1-\varepsilon}}^{\infty}\frac{\varphi_n(t)}{t^{1+\alpha}}dt\right| = O(n^{-q_3}), \tag{25}$$

где $q_3 > 0$ — произвольно большое число, $\varepsilon > 0$; если $\alpha = 0$, то

$$\left|\int_{n^{1-\varepsilon}}^{n^{q_4}}\frac{\varphi_n(t)}{t}dt\right| = O(n^{-q_3}), \tag{26}$$

где $q_4 \geqslant 2q_3$.

Если вместо (24) предполагать только, что $E\|X_1\|^2 < \infty$, то тогда при всех $\alpha \geqslant 0$

$$\left|\int_{n^{1-\varepsilon}}^{n^{q_4}}\frac{\varphi_n(t)}{t^{1+\alpha}}dt\right| = O(n^{-1-\varepsilon_0}),\ \varepsilon_0 > 0. \tag{27}$$

Доказательство. Проделаем подробные выкладки, приводящие к (25) при условии (24). Оценки (26) и (27) получаются в результате аналогичных рассуждений. Пусть $\varepsilon_i > 0$ — малые числа, которые в последующем должным образом фиксируются, целое число k удовлетворяет неравенству $n^{\varepsilon_1} < k < n - n^{\varepsilon_2}$ и $\delta = ((n-k)\,n^{-1})^{1/2}$. Обозначим $E_k = \{a, b \in \mathfrak{X}: n^{-\varepsilon_3} \leqslant \leqslant \| a \| \leqslant n^{\varepsilon_4},\ n^{-\varepsilon_3} \leqslant \| b \| \leqslant n^{\varepsilon_4}\}$, где $a = k^{-1/2}(X_1' + \ldots + X_k')$, $b = (n - - k)^{-1/2}(X_{k+1}' + \ldots + X_n')$. Запишем $\varphi_n(t)$ в (25) как

$$\varphi_n(t) = \int\limits_{\mathfrak{X}} \int\limits_{\mathfrak{X}} e^{it\|a+\delta b\|^2} H_1(da)\, H_2(db), \tag{28}$$

где H_1 и H_2 — распределения случайных величин a и b соответственно.

Пусть $k \sim n - n^{\varepsilon_2}$ и в (24) $\beta \sim q_3 \varepsilon_4^{-1} + 2$. Тогда по неравенству Чебышева

$$H_1(\| a \| > n^{\varepsilon_4}) = O(n^{-q_3-\varepsilon_5}),\ H_2(\| b \| > n^{\varepsilon_4}) = O(n^{-q_3-\varepsilon_5}). \tag{29}$$

Вновь по неравенству Чебышева имеем

$$H_1(\| a \| < n^{-\varepsilon_3}) \leqslant cE \exp(-n^{2\varepsilon_3} \| a \|^2),$$

$$H_2(\| b \| < n^{-\varepsilon_3}) \leqslant cE \exp(-n^{2\varepsilon_3} \| b \|^2). \tag{30}$$

Математические ожидания справа в (30) оценим по неравенству (49) из [3, с. 32]. В результате получим

$$H_1(\| a \| < n^{-\varepsilon_3}) = O(n^{-q_3-\varepsilon_6}),\ H_2(\| b \| < n^{-\varepsilon_3}) = O(n^{-q_3-\varepsilon_6}). \tag{31}$$

Из (28)—(31) следует, что $\varphi_n(t)$ можно записать следующим образом:

$$\varphi_n(t) = \iint\limits_{E_k} e^{it\|a+\delta b\|^2} H_1(da)\, H_2(db) + O(n^{-q_3-\varepsilon_7}). \tag{32}$$

С помощью (32) интеграл в (25) проводится к виду

$$\mathscr{I}_n = \int\limits_{n^{1-\varepsilon}}^{\infty} \frac{\varphi_n(t)}{t^{1+\alpha}}\, dt = \iint\limits_{E_k} \left\{ \int\limits_{n^{1-\varepsilon}}^{\infty} e^{it\|a+\delta b\|^2} \frac{dt}{t^{1+\alpha}} \right\} H_1(da)\, H_2(db) + O(n^{-q_3}). \tag{33}$$

В (33) интеграл по переменной t, заключенный в фигурных скобках, проинтегрируем по частям $2q_3$ раз. Тогда

$$\mathscr{I}_n = \sum_{j=1}^{2q_3} c_j n^{-j(1-\varepsilon)-\alpha} \iint\limits_{E_k} \| a + \delta b \|^{-2j} e^{in^{1-\varepsilon}\|a+\delta b\|^2} H_1(da)\, H_2(db) + O(n^{-q_3}), \tag{34}$$

где c_j — некоторые постоянные, причем в (34) для $a, b \in E_k$ и $n \to \infty$ выполняются соотношения

$$\| a + \delta b \|^2 = \| a \|^2 + 2\delta(a, b) + \delta^2 \| b \|^2 = \| a \|^2 (1 + \lambda_n) \geqslant$$

$$\geqslant \| a \|^2 (1 - \varepsilon_7 n^{-\varepsilon_8}) \geqslant n^{-2\varepsilon_3}(1 - \varepsilon_7 n^{-\varepsilon_8}), \tag{35}$$

где

$$\lambda_n = 2\delta(a, b) \| a \|^{-2} + \delta^2 \| b \|^2 \| a \|^{-2}$$

и

$$| \lambda_n | \leqslant \varepsilon_7 n^{-\varepsilon_8}. \tag{36}$$

Выберем целое число r порядка $r \sim q_3 \varepsilon_8^{-1}$. Затем с учетом (35) и (36) получим

$$\| a + \delta b \|^{-2j} = \| a \|^{-2j} (1 + \lambda_n)^{-j} = \| a \|^{-2j} \sum_{s=0}^{\infty} d_{j,s} \lambda_n^s =$$

$$= \sum_{s=0}^{r} d_{j,s} \sigma_{j,s}(a, b) + O(n^{-q_3}), \tag{37}$$

где $\sigma_{j,s}(a, b)$ — линейная комбинация членов вида $\|a\|^{-2p_1}\|b\|^{-2p_2}(a, b)^{p_3}$, $p_j \geqslant 0$, с коэффициентами, зависящими полиномиально от δ. В (34) сделаем замену по (37). Тогда

$$\mathcal{I}_n = \sum_{j=1}^{2q_3}\sum_{s=0}^{r} d_{j,s}c_j n^{-j(1-\varepsilon)-\alpha} \iint_{E_k} \sigma_{j,s}(a, b)\, e^{in^{1-\varepsilon}\|a+\delta b\|^2} H_1(da)\, H_2(db) + O(n^{-q_3}). \quad (38$$

Оценим интеграл в (38). Для этого воспользуемся леммой из [3, с. 6] По этой лемме (см. неравенство (13) в [3, с. 6] и его доказательство) при $n \to \infty$ имеем

$$\left|\iint_{E_k} \sigma_{j,s}(a, b)\, e^{in^{1-\varepsilon}\|a+\delta b\|^2} H_1(da)\, H_2(db)\right| = O(n^{-q_3}) \quad (39$$

равномерно по всем j и s в силу того предположения, что число ненулевых собственных чисел $\{\lambda_j\}$ S-оператора бесконечно. Из (38) и (39) вытекает (25). Аналогично доказываются и (26), (27).

Объединяя все полученные оценки, касающиеся $\Delta_2(q)$, видим, что при $0 < q < 2$ и $n \to \infty$

$$|\Delta_2(q)| \leqslant d \sin(\pi q/4)\, A_n,$$

где постоянная $d > 0$ не зависит от q.

1. *Боровских Ю. В.* Проблема аппроксимации распределений U-статистик и функционало Мизеса. I.— Киев, 1980.— 52 с.— (Препринт / АН УССР, Ин-т математики; 80.(
2. *Боровских Ю. В.* Проблема аппроксимации распределений U-статистик и функционало Мизеса. II.— Киев, 1980.— 56 с.— (Препринт / АН УССР, Ин-т математики; 80.:
3. *Боровских Ю. В.* Аппроксимация вероятностных распределений в бесконечномерны пространствах.—Киев, 1983.— 56 с.— (Препринт / АН УССР, Ин-т математики; 83.4:
4. *Callaert H., Jansseen P., Veraverbeke N.* An Edgeworth expansion for U-statistics.— Anı Statist., 1980, **8**, N 2, p. 299—312.
5. *Götze F.* Asymptotic Expansions for Bivariate von Mises Functionals.—Z. Wahrshein l chkeitstheor. und verw. Geb., 1979, **50**, N 3, p. 333—355.
6. *Götze F.* Expansions for von Mises functionals.— Prepr. Statist. Univ. Cologne, 1982, N 7(Dec., p. 1—43.
7. *Bhattacharya R. N., Puri M. L.* On the order of magnitude of cumulants of von Mises Fun(tionals and related statistics.— Ann. Probab., 1983, **11**, N 2, p. 346—354.
8. *Ронжин А. Ф.* Асимптотические формулы для моментов U-статистик с вырожденны ядром.— Теория вероятностей и ее применения, 1982, **27**, № 1, с. 47—56.
9. *Залесский Б. А., Сазонов В. В.* О близости моментов при нормальной аппроксимации гильбертовом пространстве.— Там же, 1983, **28**, № 2, с. 251—263.
10. *Sazonov V. V., Zalesskii B. A.* On the rate of convergence of moments in the central limi theorem in Hilbert space.— Lect. Notes Math., 1983, **1021**, p. 561—575.
11. *Sazonov V. V., Zalesskii B. A.* On the central limit theorem in Hilbert space.— Techr Rep./ Center stochast. processes. Dep. Statist., Univ. North Carolina, chapel Hill, Nort Carolina, 1983, N 35, June, p. 1—32.
12. *Бенткус В. Ю.* Асимптотика моментов в центральной предельной теореме в банаховы пространствах.— Докл. АН СССР, 1983, **272**, N 1, с. 17—19.
13. *Bahr von B.* On the convergence of moments in the central limit theorem.— Ann. Matł Statist., 1965, **36**, N 3, p. 808—818.
14. *Hoeffding W.* A class of statistics with asymptotically normal distribution.— Ibid., 194 **19**, N 3, p. 293—325.
15. *Bönner N., Kirschner H.-P.* Note on conditions for weak convergence of von Mises' diffe rentiable statistical functions.— Ann. Statist., 1977, **5**, N 2, p. 405—407.
16. *Götze F.* On Edgeworth expansions in Banach spaces. — Ann. Probab., 1981, **9**, N 5 p. 852—859.

Ин-т математики АН УССР, Киев,
Ленингр. ин-т текстильной и легкой пром-сти

Получено 17.07.8