УДК 519.21

Т. В. Кравец

Слабая сходимость однородных процессов с независимыми приращениями, переключаемых полумарковскими процессами, в схеме фазового укрупнения

В настоящей работе изучается слабая сходимость (в смысле сходимости распределений в пространстве $D_E\,[0, \infty)$) однородных процессов с независимыми приращениями (ОПНП), переключаемых полумарковскими процессами (ПМП), в схеме асимптотического фазового укрупнения. Для доказательства предельной теоремы используется аппарат, разработанный в [1]. Сходимость конечномерных распределений исследуемых процессов рассматривал В. В. Королюк [2].

Пусть задано семейство стохастически непрерывных ОПНП $Y(t, x)$, независимых в совокупности при различных $x \in E_I \subset E$ (E_I — конечное множество, $Y(0, x) = 0$) со значением на числовой прямой R, $t \geqslant 0$, и кумулянтами

$$\Psi(x, z) = t^{-1} \ln \mathbf{M} \exp\{izY(t, x)\}.$$

Пусть задано семейство ПМП $\xi_\varepsilon(t)$, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, с траекториями в $D_E\,[0, \infty)$ ($(E, \mathfrak{B})$ — измеримое пространство) и полумарковским ядром

$$Q_\varepsilon(x, t, dy) = P_\varepsilon(x, dy)\, G_{xy}(t), \quad P_\varepsilon(x, dy) = P_0(x, dy) - \varepsilon V(x, dy).$$

Стохастическое ядро $P_0(x, A)$ согласовано с расщеплением фазового пространства $E = \bigcup\limits_{\alpha \in \widehat{E}} E_\alpha$ условием

$$p_0(x, E_\alpha) = J_\alpha(x) = \begin{cases} 1, & x \in E_\alpha; \\ 0, & x \overline{\in} E_\alpha. \end{cases}$$

Предполагается, что невозмущенные цепи Маркова, определяемые стохастическим ядром $P_0(x, A)$,— равномерно эргодические равномерно по $\alpha \in \widetilde{E}$ со стационарными мерами $\rho_\alpha(dx)$, $\alpha \in \widehat{E}$.

Введем проекционный оператор Π_0 [3] в банаховом пространстве $B(E, \mathfrak{B})$ $\mathfrak{B}$-измеримых функций на E с sup-нормой $\Pi_0 f(x) = f_{\alpha(x)} = \int\limits_{E_\alpha} \rho_\alpha(dx) f(x)$ для $\alpha \in \widehat{E}$, $x \in E_\alpha$ и функции укрупнения $\alpha: E \to \widehat{E}$ вида $\alpha(x) = \alpha$ при $x \in E_\alpha$, $\alpha \in \widehat{E}$.

Известно [1], что при определенных условиях укрупненный ПМП $\hat{\xi}_\varepsilon(t) = \alpha(\xi_\varepsilon(t/\varepsilon))$ слабо сходится к однородному марковскому процессу (ОМП) $\hat{\xi}(t)$ с траекториями в $D_{\widehat{E}}\,[0, \infty)$ ($(\widehat{E}, \widehat{\mathfrak{B}})$ — укрупненное фазовое пространство), производящим оператором

$$Af_\alpha = -m_\alpha^{-1} \left\{ b(\alpha) f_\alpha - \int\limits_{\widehat{E}} b(\alpha, d\alpha') f_{\alpha'} \right\}$$

и начальным распределением

$$\widehat{P}(\Gamma) = P\Big(\bigcup_{\alpha \in \Gamma} E_\alpha\Big), \ \Gamma \in \widehat{\mathfrak{B}}.$$

Здесь $P(A)$ — начальное распределение ПМП $\xi_\varepsilon(t)$,

$$b(\alpha) = \int\limits_{E_\alpha} \rho_\alpha(dx)\, V(x, E_\alpha), \quad b(\alpha, \Gamma) = -\int\limits_{E_\alpha} \rho_\alpha(dx)\, V(x, E_\Gamma), \quad x \overline{\in} E_\Gamma,$$

$$E_\Gamma = \bigcup_{\alpha \in \Gamma} E_\alpha,$$

$$m_\alpha = \int_{E_\alpha} m(x)\,\rho_\alpha(dx), \qquad m(x) = \int_0^\infty t\,dG_x(t),$$

$$G_x(t) = Q_\varepsilon(t, x, E).$$

Определим переключаемый процесс соотношениями

$$Y_\varepsilon(t) = Y(t - \varepsilon\tau^\varepsilon_{\nu_\varepsilon(t/\varepsilon)}, \xi_\varepsilon(t/\varepsilon)) + Y^{(1)}_\varepsilon(t), \qquad Y^{(1)}_\varepsilon(t) = \sum_{k=1}^{\nu_\varepsilon(t/\varepsilon)} Y(\varepsilon\theta^\varepsilon_k, \xi^\varepsilon_{k-1}),$$

где τ^ε_n — моменты скачков ПМП $\xi_\varepsilon(t)$, $\xi^\varepsilon_n = \xi_\varepsilon(\tau^\varepsilon_n)$ — вложенная цепь Маркова, $\nu_\varepsilon(t) = \max\{n : \tau^\varepsilon_n \leqslant t\}$ — считающий процесс, θ^ε_k — время пребывания $\xi_\varepsilon(t)$ в состоянии ξ^ε_k.

Введем ПМП $\overset{0}{\xi}_\varepsilon(t)$ на $(E, \mathfrak{B})$ с оператором переходных вероятностей

$$\overset{0}{Q}_\varepsilon(t) = \Pi_0 Q_\varepsilon(t)\,\Pi_0, \quad \overset{0}{Q}_\varepsilon(t) f(x) = \int_{E_\alpha} \rho_\alpha(dx) \int_{E_\alpha} Q_\varepsilon(x, t, dy)\, f_{\alpha(y)} -$$

$$- \varepsilon \int_{E_\alpha} \rho_\alpha(dx) \int_{E \setminus E_\alpha} V(x, dy)\, G_{xy}(t)\, f_{\alpha(y)}, \quad x \in E_\alpha.$$

Заметим, что вероятности перехода $\overset{0}{\xi}_\varepsilon(t)$ определяются классами состояний E_{α_1} и E_{α_2} независимо от конкретных значений $x \in E_{\alpha_1}$, $y \in E_{\alpha_2}$.

Изучим поведение случайного процесса

$$\overset{0}{Y}_\varepsilon(t) = Y(t - \varepsilon\overset{0}{\tau}{}^\varepsilon_{\nu_\varepsilon(t/\varepsilon)}, \overset{0}{\xi}_\varepsilon(t/\varepsilon)) + \overset{0}{Y}{}^{(1)}_\varepsilon(t), \quad \overset{0}{Y}{}^{(1)}_\varepsilon(t) = \sum_{k=1}^{\nu_\varepsilon(t/\varepsilon)} Y(\varepsilon\overset{0}{\theta}{}^\varepsilon_k, \overset{0}{\xi}{}^\varepsilon_{k-1}).$$

Здесь $\overset{0}{\tau}{}^\varepsilon_k, \overset{0}{\xi}{}^\varepsilon_k, \overset{0}{\nu}_\varepsilon(t), \overset{0}{\theta}{}^\varepsilon_k$ — моменты скачков, вложенная цепь Маркова (ВЦМ), считающий процесс, время пребывания в состоянии $\overset{0}{\xi}{}^\varepsilon_k$ процесса $\overset{0}{\xi}_\varepsilon(t)$.

Определим ОПНП $\hat{Y}(t, \alpha)$, $\alpha \in \hat{E}$, с кумулянтами $\Psi_\alpha = \Psi_\alpha(z) = m_\alpha^{-1} \int_{E_\alpha} \rho_\alpha(dx)\, m(x)\, \Psi(x, z)$. Введем процесс с марковскими переключениями

$$\hat{Y}(t) = \hat{Y}(t - \hat{\tau}_{\hat{\nu}(t)}, \hat{\xi}(t)) + \hat{Y}_1(t), \qquad \hat{Y}_1(t) = \sum_{k=1}^{\hat{\nu}(t)} \hat{Y}(\hat{\theta}_k, \hat{\xi}_{k-1}),$$

где $\hat{\xi}_k$ — ВЦМ, $\hat{\theta}_k$ — время пребывания МП $\hat{\xi}(t)$ в состоянии $\hat{\xi}_k$, $\hat{\tau}_k$ — моменты скачков $\hat{\xi}(t)$, $\hat{\nu}(t) = \max\{n : \hat{\tau}_n \leqslant t\}$.

Обозначим $u_\varepsilon(t) = t - \sup\{s \leqslant t, \xi_\varepsilon(t) \neq \xi_\varepsilon(s)\}$, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, $\lambda_{xy}(\tau) = -[1 - G_{xy}(\tau)]^{-1} \frac{d}{d\tau}[1 - G_{xy}(\tau)]$.

Теорема. *Пусть:*

1) *невозмущенные ЦМ с переходными вероятностями $P_0(x, A)$ равномерно эргодические в классах E_α равномерно по $\alpha \in E$;*

2) $0 < m_\alpha < \infty$, $\alpha \in \hat{E}$;

3) $\limsup_{t\to\infty} \sup_{\alpha\in\hat{E}} \sup_{x\in E_\alpha} | P\{\xi_0(t) \in dy,\ u_0(t) \leqslant s / \xi_0(0) = x,\ u_0(0) = \tau\} - m_\alpha^{-1}\rho_\alpha(dy) \times$
$\times \int_0^s [1 - G_y(t_1)]\, dt_1 | = 0, \quad s > 0;$

4) $\forall T < \infty \sup_{x,y\in E} \sup_{\tau\leqslant T} |\lambda_{xy}(\tau)| < \infty$;

5) $\exists \alpha \in \hat{E}$, что $b(\alpha) \neq 0$;

6) $\sup_{\alpha\in\hat{E}} |\Psi_\alpha(z)| < \infty$.

Тогда $\overset{0}{Y}_\varepsilon(t)$ слабо сходится при $\varepsilon \to 0$ к $\hat{Y}(t)$.

Доказательство. Можно считать, что ПМП $\xi_\varepsilon(t)$ имеет полумарковское ядро вида [1]

$$Q_\varepsilon(x, t, A) = P_\varepsilon(x, A)\, G_x(t).$$

Рассмотрим МП $\zeta_\varepsilon(t) = \{\xi_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t), Y_\varepsilon(\varepsilon t)\}$ с фазовым пространством $(\mathbf{Z}, Z)$, $\mathbf{Z} = E \times [0, \infty) \times R$.

Лемма. *Инфинитезимальный оператор* A_ε *процесса* $\zeta_\varepsilon(t)$ *имеет вид*

$$A_\varepsilon f(x, u, y) = [A_0 - \varepsilon B]\, f(x, u, y), \quad f \in D(A_\varepsilon) \in B(\mathbf{Z}, Z), \tag{1}$$

$$A_0 f(x, u, y) = \lambda_x(u) \int_E [f(z, 0, y) - f(x, u, y)]\, P_0(x, dz) + \frac{\partial}{\partial u} f(x, u, y), \tag{2}$$

$$Bf(x, u, y) = \lambda_x(u) \int_E f(z, 0, y)\, V(x, dz) - A_x f(x, u, y), \tag{3}$$

где A_x — *производящий оператор МП, соответствующего ОПНП* $Y(t, x)$,

$$\lambda_x(u) = -[1 - G_x(u)]^{-1} \frac{d}{du} [1 - G_x(u)].$$

Доказательство. Обозначим через τ момент первого обращения в нуль $u_\varepsilon(t)$, $\tau_\delta = \min[\tau, \delta]$ для любого $\delta > 0$.

По определению инфинитезимального оператора [4, с. 196]

$$A_\varepsilon f(x, u, y) = \lim_{\delta \downarrow 0} [\mathbf{M}_{x,u,y}\tau_\delta]^{-1} [\mathbf{M}_{x,u,y} f(\xi_\varepsilon(\tau_\delta), u + \tau_\delta, Y_\varepsilon(\varepsilon\tau_\delta)) - f(x, u, y)]. \tag{4}$$

Обозначим

$$P_{x,u,y}\{\xi_\varepsilon(\tau) \in B, \tau < \delta, Y_\varepsilon(\varepsilon\tau) \in A\} = \Phi_{x,u,y}(B, \delta, A).$$

Тогда

$$\mathbf{M}_{x,u,y}\tau_\delta = \delta P_{x,u}\{\tau > \delta\} + \int_0^\delta s\, d_s \Phi_{x,u,y}(E, s, R).$$

Из непрерывности процесса $\xi_\varepsilon(t)$ справа следует

$$P_{x,u}\{\tau \leqslant \delta\} \downarrow 0 \text{ при } \delta \downarrow 0. \tag{5}$$

Поэтому $\mathbf{M}_{x,v,y}\tau_\delta \sim \delta$. Далее имеем

$$\mathbf{M}_{x,u,y} f(\xi_\varepsilon(\tau_\delta), u + \tau_\delta, Y_\varepsilon(\varepsilon\tau_\delta)) = \mathbf{M}_{x,u,y} f(x, u + \delta, Y_\varepsilon(\varepsilon\delta))\, \chi\{\tau > \delta\} + \\ + \mathbf{M}_{x,u,y} f(\xi_\varepsilon(\tau), 0, Y_\varepsilon(\varepsilon\tau))\, \chi\{\tau \leqslant \delta\}. \tag{6}$$

Перепишем (4) с учетом (5), (6):

$$A_\varepsilon f(x, u, y) = \lim_{\delta \downarrow 0} \frac{1}{\delta} \Big\{ \iint_{ER} \Phi_{x,u,y}(dx_1, \delta, dy_1)\, [f(x_1, 0, y_1) - f(x, u, y)] + \\ + P_{x,u}\{\tau > \delta\} \int_R P\{Y(\varepsilon\delta, x) - Y(0, x) + y \in dy_1\}\, [f(x, u + \delta, y_1) - f(x, u, y)] \Big\}. \tag{7}$$

Заметим, что ОПНП $Y(t, x)$ соответствует ОМП с вероятностью перехода

$$P_x(y, t, dy_1) = P\{Y(t, x) - Y(0, x) + y \in dy_1\}, \tag{8}$$

полугруппой линейных операторов

$$T_x(t) f(y) = \int_R f(y_1)\, P_x(y, t, dy_1) \tag{9}$$

и инфинитезимальным оператором A_x. С учетом марковости находим

$$P_{x,u}\{\tau > \delta\} = [P_{x,0}\{\tau > u\}]^{-1}[1 - G_x(u+\delta)], \quad (1$$

$$P_{x,0}\{\tau > u\} = [1 - G_x(u)]. \quad (1$$

Учитывая (8) — (11), из (7) получаем

$$A_\varepsilon f(x, u, y) = \lim_{\delta \downarrow 0} \frac{1}{\delta}[1 - G_x(u)]^{-1}\left\{\int_E \int_0^\delta T_x(\varepsilon t)[f(x_1, 0, y) - f(x, u, y)] \times \right.$$

$$\times d_t G_x(t+u) P_\varepsilon(x, dx_1) + T_x(\varepsilon\delta)[f(x, u+\delta, y) - f(x, u, y)][1 - G_x(u+\delta)]$$

$$(1$$

В силу непрерывности $T_x(t)$ имеем

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \frac{1}{\delta}\int_0^\delta T_x(\varepsilon t)[f(x_1, 0, y) - f(x, u, y)] d_t G_x(t+u) = \frac{d}{du} G_x(u)[f(x_1\, 0, y) -$$

$$- f(x, u, y)]. \quad (1$$

Рассмотрим второе слагаемое в (12):

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \frac{1}{\delta} T_x(\varepsilon\delta)[f(x, u+\delta, y) - f(x, u, y)][1 - G_x(u+\delta)] =$$

$$= \left[\varepsilon A_x f(x, u, y) + \frac{\partial}{\partial u} f(x, u, y)\right][1 - G_x(u)]. \quad (1$$

Подставляя (13), (14) в (12), находим

$$A_\varepsilon f(x, u, y) = [1 - G_x(u)]^{-1} \frac{d}{du} G_x(u) \int_E [f(x_1, 0, y) - f(x, u, y)] P_\varepsilon(x, dx_1) -$$

$$+ \frac{\partial}{\partial u} f(x, u, y) + \varepsilon A_x f(x, u, y).$$

Лемма доказана.

Введем проектор П на $B(\mathbf{Z}, Z)$, соответствующий оператору A_0. Д. $x \in E_\alpha$, $\alpha \in \hat{E}$

$$\Pi f(x, u, y) = m_\alpha^{-1} \int_{E_\alpha} \int_0^\infty f(z, \tau, y)[1 - G_z(\tau)] \rho_\alpha(dz)\, d\tau. \quad (1$$

Обозначим

$$N = \{f_{\alpha, y} : f_{\alpha(x), y} = \Pi f(x, u, y),\ x \in E_\alpha\}. \quad (1$$

Вычислим ПВП, учитывая (3), (15), (16):

$$\Pi B \Pi f(x, u, y) = \Pi B f_{\alpha(x), y} = m_\alpha^{-1} \int_{E_\alpha} \int_0^\infty \int_E \lambda_z(\tau) f_{\alpha(z_1), y} V(z, dz_1)[1 - G_z(\tau)] \times$$

$$\times \rho_\alpha(dz)\, d\tau - m_\alpha^{-1} \int_{E_\alpha} \int_0^\infty A_z f_{\alpha(z), y}[1 - G_z(\tau)] \rho_\alpha(dz)\, d\tau =$$

$$= m_\alpha^{-1}\left\{\int_{E_\alpha} \int_E f_{\alpha(z_1), y} V(z, dz_1) \rho_\alpha(dz) - \int_{E_\alpha} A_z f_{\alpha(z), y} m(z) \rho_\alpha(dz)\right\}. \quad (1$$

Сужение — ПВП на N имеет вид

$$-\widehat{\Pi B \Pi} f_{\alpha, y} = A f_{\alpha, y} + \hat{A}_\alpha f_{\alpha, y},$$

$$\hat{A}_\alpha f_{\alpha, y} = m_\alpha^{-1} \int_{E_\alpha} A_z f_{\alpha(z), y} m(z) \rho_\alpha(dz).$$

В силу теоремы 2 [1, с. 25] укрупненный МП $\hat{\zeta}_\varepsilon(t) = \{\hat{\xi}_\varepsilon(t), \hat{u}_\varepsilon(t), \overset{0}{Y}_\varepsilon(t)\}$ слабо сходится при $\varepsilon \to 0$ к ОМП $\hat{\zeta}(t)$ в укрупненном фазовом пространстве $(\hat{\mathbf{Z}}, \hat{Z})$, $\hat{\mathbf{Z}} = \hat{E} \times [0, \infty) \times R$ с инфинитезимальным оператором $\hat{A}$ вида (17). Несложно показать, что инфинитезимальный оператор процесса $\{\hat{\xi}(t), \hat{u}(t), \hat{Y}(t)\}$ совпадает с $\hat{A}$.

В условиях теоремы $\hat{\xi}_\varepsilon(t)$ слабо сходится к $\hat{\xi}(t)$, следовательно, и $\overset{0}{Y}_\varepsilon(t)$ слабо сходится к $\hat{Y}(t)$.

1. *Королюк В. С., Чмиль Т. В.* Слабая сходимость полумарковских процессов в схеме фазового укрупнения.— В кн.: Предельные теоремы в схеме асимптотического фазового укрупнения. Киев, 1984, с. 21—31. (Препринт / АН УССР, Ин-т математики; 84.16)
2. *Королюк В. В.* Стохастические системы с полумарковскими переключениями.— Киев, 1983.— 38 с.— (Препринт / АН УССР, Ин-т кибернетики; 83-35)
3. *Королюк В. С., Турбин А. Ф.* Математические основы фазового укрупнения сложных систем.— Киев : Наук. думка, 1978.— 218 с.
4. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Теория случайных процессов.— М. : Наука, 1973.— Т. 2. 639 с.

Киев. ун-т Получено 26.12.84