УДК 517.944

А. Е. Шишков

О существовании растущих на бесконечности обобщенных решений краевых задач для линейных и квазилинейных параболических уравнений

1. При изучении вопросов единственности обобщенных решений краевых задач для эллиптических и параболических уравнений в неограниченных областях важную роль играют априорные оценки решений, имеющие вид принципа Сен-Венана в теории упругости. Как оказалось, эти оценки могут быть использованы и при доказательстве существования растущих обобщенных решений граничных задач для линейных и квазилинейных эллиптических уравнений [1], стационарных уравнений Стокса и Навье-Стокса [2]. В настоящей работе указанной методикой доказывается существование решения с неограниченным интегралом энергии начально-краевой задачи с граничным условием Дирихле в области с некомпактной границей для линейных и квазилинейных параболических уравнений второго порядка. Некоторые результаты работы анонсированы в [3].

2. Пусть $Q = \Omega \times (0,\ T)$, где Ω — неограниченная область в R^n с некомпактной кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$. Рассмотрим в Q начально-краевую задачу:

$$Lu = u_t - (a^{kj}(x,\ t)\, u_{x_k})_{x_j} - b^k(x,\ t)\, u_{x_k} - c(x,\ t)\, u = f(x,\ t), \tag{1}$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad u_0(x) \in L_2^{\mathrm{loc}}(\Omega), \tag{2}$$

$$u|_{\partial\Omega\times(0,T)=\Gamma} = \psi_1(x,\ t), \quad \psi_1 \in L_2^{\mathrm{loc}}(\Gamma). \tag{3}$$

Здесь $a^{kj}(x,\ t)\xi_k\xi_j > 0$ при всех $\xi \in R^n$, $a^{kj}(x,\ t) \equiv a^{jk}(x,\ t)$, функции a^{kj}, $b^k_{x_k}$, c, b^k измеримы и ограничены в любой конечной подобласти Q. Следуя [4], введем следующие определения и обозначения.

Пусть $\{Q_\tau\} = \{\Omega_\tau \times (0,\ T)\}$ — семейство конечных подобластей области Q, зависящее от параметра τ; $0 < \tau < \tau_0$; $Q_\tau \subset Q_{\tau'}$ при $\tau < \tau'$. $S_\tau \equiv \partial Q_\tau \setminus \partial Q$ — гладкая n-мерная гиперповерхность, $\partial S_\tau \subset \partial Q$.

Пусть $h(x,\ t)$ — такая функция, что для любой непрерывно дифференцируемой функции $v(x,\ t,\ \tau)$ справедливо равенство

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\int\limits_{Q_\tau} v(x,\ t,\ \tau)\, dxdt = \int\limits_{Q_\tau} \frac{\partial v}{\partial\tau}\, dxdt + \int\limits_{S_\tau} v(x,\ t,\ \tau)\, h(x,\ t)\, dS, \tag{4}$$

$$q(\tau) = \sup_{S_\tau} |a^{kj}\nu_k\nu_j h^{-1}|^{\frac{1}{2}}, \quad c_1(\tau) = \inf_{S_\tau}(2^{-1}b^k_{x_k} - c), \quad p(\tau) = \sup_{S_\tau} B(x,\ t),$$

где $\nu = (\nu_1, \ldots \nu_n)$ — единичный вектор внешней нормали к $\partial\Omega_\tau$, $B(x,\ t) = \max\limits_{(x,t)\in S_\tau}\left\{\dfrac{b^k\nu_k}{2},\ 0\right\}$. Рассматривается функция $\mu(\tau)$, такая, что $\mu > 0$, $\dfrac{\partial\mu}{\partial\tau} \geqslant 0$, $c_1(\tau) + \mu^2(\tau) > 0$ при $0 < \tau < \tau_0$. Положим $Q(u,\ u) \equiv a^{kj}u_{x_k}u_{x_j} + (2^{-1}b^k_{x_k} - c)\, u^2$, $\lambda_\delta(\tau) = \inf\left\{\left[\int\limits_{S_\tau}(Q(v,\ v) + \mu^2(\tau)\, v^2)\, h\exp\{-2\mu^2(\tau)(t + \delta)\}\, dS\right]\left[\int\limits_{S_\tau} v^2\exp\{-2\mu^2(\tau)(t+\delta)\}\, dS\right]^{-1}\right\}$, где инфимум берется по всем непрерывно дифференцируемым в окрестности S_τ функциям $v(x,\ t)$, равным нулю на ∂S_τ, $\delta \geqslant 0$. Предполагается, что существует непрерывная положительная функция $A(\tau)$, удовлетворяющая условию

$$2\,[q(\tau)\,\lambda_\delta(\tau)^{-1/2} + p(\tau)\,\lambda_\delta(\tau)^{-1}] \leqslant A(\tau), \quad 0 < \tau < \tau_0, \tag{5}$$

и уравнение

$$\frac{d\tau}{d\alpha} = A(\tau) \tag{6}$$

имеет решение $\tau(\alpha)$ ($\tau(0) = 0$), причем функция $\tau(\alpha)$ имеет обратную $\alpha = \alpha(\tau)$. Предполагается также, что выполняется соотношение

$$4A(\tau)\mu\frac{\partial\mu}{\partial\tau}(T+\delta) < 1. \tag{7}$$

Лемма 1. *Пусть* $u(x, t)$ — *обобщенное решение из пространства* $\overset{0}{V}{}^{1,0}_{2,\mathrm{loc}}(Q)$ [5] *задачи* (1) — (3), *причем* $f \equiv 0$ *в* Q_{τ_0}, $u_0 \equiv 0$ *в* Ω_{τ_0}, $\psi_1 \equiv 0$ *на* $\Gamma \cap \overline{Q}_{\tau_0}$. *Тогда при любых* R_1, R_2 *таких, что* $0 < \tau(R_1) < \tau(R_2) < \tau_0$, *имеет место оценка:*

$$F_{\alpha,\delta,u}(\tau(R_1)) < e^{R_1 - R_2} F_{\alpha,\delta,u}(\tau(R_2)), \tag{8}$$

где $F_{\alpha,\delta,u}(\tau) = \dfrac{\alpha}{2}\displaystyle\int_{\Omega_\tau} u^2 \exp\{-2\mu^2(\tau)(T+\delta)\}\,dx + \iint_{Q_\tau} [Q(u, u) + \mu^2(\tau)u^2] \times \exp\{-2\mu^2(\tau)(t+\delta)\}\,dxdt$.

Это неравенство в [4] доказано для обобщенных решений из $W^1_{2,\mathrm{loc}}(Q)$ задачи (1) — (3) при $\alpha = 0$ в случае гладкости коэффициентов a^{kj} по x.

Доказательство леммы. По определению обобщенного решения из $\overset{0}{V}{}^{1,0}_{2,\mathrm{loc}}(Q)$ справедливо равенство:

$$\iint_Q u\eta_t\,dxdt - \iint_Q (a^{kj}u_{x_k}\eta_{x_j} - b^k u_{x_k}\eta - cu\eta)\,dxdt = 0 \tag{9}$$

$\forall \eta \in \overset{0}{W}{}^{1,1}_2(Q)$, $\eta(x, 0) = \eta(x, T) = 0$. Положим в (9) $\eta = (\hat{\eta})_h = \dfrac{1}{h}\displaystyle\int_{t-h}^{t} \hat{\eta}(x, \xi)\,d\xi$, где $\hat{\eta}$ — произвольный элемент из $\overset{0}{W}{}^{1,1}_2(Q^{-h,T})$ ($Q^{\alpha,\beta} = \Omega \times (\alpha, \beta)$), равный нулю при $t > T - h$ и при $t \leqslant 0$. Аналогично [5, с. 167] показываем, что справедливо тождество

$$\int_0^{t_1}\int_\Omega [u_{ht}\hat{\eta} + (a^{kj}u_{x_k})_h\hat{\eta}_{x_j} - (b^k u_{x_k} + cu)_h\hat{\eta}]\,dxdt \tag{10}$$

для произвольного $t_1 \leqslant T - h$ и произвольной функции $\hat{\eta} \in \overset{0}{V}{}^{1,0}_2(Q^{0,t_1})$.

Следуя [4], введем в рассмотрение срезающую функцию $\psi_\gamma(x, \hat{\tau})$, зависящую от параметра γ, непрерывно дифференцируемую по аргументам $(x, \hat{\tau})$ и такую, что $\psi_\gamma(x, \hat{\tau}) = 0$ при $(x, t) \in S_\tau$, $\tau > \hat{\tau}$, и $\psi_\gamma(x, \hat{\tau}) = 1$ при $(x, t) \in S_\tau$, $\tau \leqslant \hat{\tau} - 2\gamma$. Пусть $\{u_m(x, t)\}$ — последовательность функций из $C^2(Q_{\hat{\tau}})$, $u_m|_{\Gamma\cap\partial Q_{\hat{\tau}}} = 0$, $u_m \to u$ в норме пространства $\overset{0}{V}{}^{1,0}_2(Q_{\hat{\tau}})$. Возьмем в (10) $\hat{\eta} = u_{m,h}\psi_\gamma \exp\{-2\mu^2(\hat{\tau})(t+\delta)\}$. Предположим пока, что $a^{kj}(x, t)$ — дифференцируемые функции. Получим после несложных преобразований

$$\int_0^{t_1}\int_{\Omega_{\hat{\tau}}} [Q(u_{m,h}, u_{m,h}) + \mu^2(\hat{\tau})u^2_{m,h}] \exp\{-2\mu^2(\hat{\tau})(t+\delta)\}\,dxdt +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_{\Omega_{\hat{\tau}}} u^2_{m,h} \exp\{-2\mu^2(\hat{\tau})(t_1+\delta)\}\,dx < \int_{S_{\hat{\tau}}} B(u_{m,h})^2 \exp\{-2\mu^2(\hat{\tau})(t+\delta)\}\,dS +$$

$$+ \Big(\int_{S_\tau} a^{kj}u_{m,h,x_k}u_{m,h,x_j}h(x)\exp\{-2\mu^2(\hat{\tau})(t+\delta)\}\,dS\Big)^{1/2}\Big(\int_{S_{\hat{\tau}}} a^{kj}\nu_k\nu_j\cdot \tag{11}$$

$$\cdot|u_{m,h}|^2 h^{-1}\exp\{-2\mu^2(\hat{\tau})(t+\delta)\}\,dS\Big)^{1/2} + \varepsilon_{m,\gamma,h}(\hat{\tau}) + E_{m,\gamma,h}(\hat{\tau}),$$

где $\varepsilon_{m,\gamma,h}(\hat{\tau})$ при достаточно больших m, достаточно малых h и достаточно малых $\gamma = \gamma(m, h)$ может быть сделано как угодно малым, $E_{m,\gamma,h}(\hat{\tau}) = \iint\limits_{Q_{\hat{\tau}}} a^{kj}(u - u_{m,h})_{x_k} u_{m,h} \psi_{\gamma x_j} \exp\{-2\mu^2(\hat{\tau})(t+\delta)\}\, dxdt$.

Используя выше введенные обозначения и равенство

$$\frac{\partial}{\partial\hat{\tau}} F_{\alpha,\delta,u_{m,h}}(\hat{\tau}) = \int\limits_{S_{\hat{\tau}}} [Q(u_{m,h}, u_{m,h}) + \mu^2(\hat{\tau})\, u_{m,h}^2] \exp\{-2\mu^2(\hat{\tau})(t+\delta)\}\, hdS +$$

$$+ 2\mu \frac{d\mu}{d\hat{\tau}} \int\limits_0^{t_1} \int\limits_{\Omega_{\hat{\tau}}} u_{m,h}^2 \exp\{-2\mu^2(\hat{\tau})(t+\delta)\}\, dxdt - \int\limits_0^{t_1} \int\limits_{\Omega_{\hat{\tau}}} 4\mu \frac{d\mu}{d\hat{\tau}} (t+\delta) \times$$

$$\times [Q(u_{m,h}, u_{m,h}) + \mu^2(\hat{\tau})\, u_{mh}^2] \exp\{-2\mu^2(\hat{\tau})(t+\delta)\}\, dxdt + \tag{12}$$

$$+ \frac{\alpha}{2} \int\limits_{\partial\Omega_{\hat{\tau}} \cap \Omega} u_{m,h}^2 \exp\{-2\mu^2(\hat{\tau})(t_1+\delta)\}\, hdS' - 2\alpha \iint\limits_{\Omega_{\hat{\tau}}} u_{m,h}^2 \exp\{-2\mu^2(\hat{\tau})(t_1 +$$

$$+ \delta)\, \mu(\hat{\tau}) \frac{d\mu}{d\hat{\tau}} (t_1+\delta)\, dx,$$

получаем

$$F_{\alpha,\delta,u_{m,h}}(\hat{\tau}) < \frac{A(\hat{\tau})}{2} \left[\frac{\partial}{\partial\hat{\tau}} F_{\alpha,\delta,u_{m,h}} + 4\mu \frac{d\mu}{d\hat{\tau}} (t_1+\delta) + \iint\limits_{Q_{\hat{\tau}}} [Q(u_{m,h}, u_{m,h}) + \right.$$

$$+ \mu^2 u_{m,h}^2] \exp\{-2\mu^2(t+\delta)\}\, dxdt + 2\alpha\mu \frac{d\mu}{d\hat{\tau}} (t_1+\delta) \iint\limits_{\Omega_{\hat{\tau}}} u_{m,h}^2 \exp\{-2\mu^2 \times$$

$$\times (t_1+\delta)\}\, dx + \varepsilon_{m,\gamma,h} + E_{m,\gamma,h} < \frac{A(\hat{\tau})}{2} \frac{\partial}{\partial\hat{\tau}} F_{\alpha,\delta,u_{m,h}} + 4\mu \frac{d\mu}{d\hat{\tau}} (T+\delta) \times$$

$$\times \frac{A(\hat{\tau})}{2} F_{\alpha,\delta,u_{m,h}} + \varepsilon_{m,\gamma,h} + E_{m,\gamma,h},$$

откуда, в силу (7) и (6), полагая $\hat{\tau} = \tau(\alpha)$, находим

$$F_{\alpha,\delta,u_{m,h}}(\tau(\alpha)) < \frac{\partial}{\partial\tau} F_{\alpha,\delta,u_{m,h}} \frac{d\tau}{d\alpha} + 2|\varepsilon_{m,\gamma,h}| + 2|E_{m,\gamma,h}|. \tag{13}$$

Из последнего неравенства теми же рассуждениями, что и в [4], получаем неравенство (8). При этом по сравнению с [4] требуется сделать один лишний предельный переход при $h \to 0$, что не представляет трудностей. Осталось рассмотреть лишь случай негладких коэффициентов a^{kj}. Итак, пусть функции $a^{kj}(x, t)$ измеримы и ограничены на ограниченных множествах. Выберем последовательность непрерывно дифференцируемых функций $\{a_n^{kj}(x, t)\}$, сходящуюся почти всюду на Q_{τ_0} к $a^{kj}(x, t)$. Интегральное тождество (10) запишем в виде

$$\int\limits^{t_1} \int\limits_{\Omega} [u_{ht}\hat{\eta} + (a_n^{kj} u_{x_k})_h \hat{\eta}_{x_j} + (b^k u_{x_k} + cu)_h \hat{\eta}]\, dxdt = \int\limits_0^{t_1} \int\limits_{\Omega} [(a_n^{kj} - a^{kj}) u_{x_k}]_h \hat{\eta}_{x_j} dxdt. \tag{14}$$

Подставим теперь в (14) $\hat{\eta} = u_{m,h}(x, t)\, \psi_\gamma(x, \hat{\tau}) \exp\{-2\mu^2(\hat{\tau})(t+\delta)\}$. Правая часть (14) запишется в виде

$$\int\limits_0^{t_1} \int\limits_{\Omega} [(a_n^{kj} - a^{kj})\, u_{x_k}]_h u_{m,h x_j} \psi_\gamma \exp\{-2\mu^2(\hat{\tau})(t+\delta)\}\, dxdt +$$

$$+\int_0^{t_1}\int_\Omega [(a_n^{kj}-a^{kj})\,u_{x_k}]_h u_{m,h}\psi_{\gamma x_j}\exp\{-2\mu^2(t+\delta)\}\,dxdt=I_1+I_2.$$

I_1 оценивается так же, как $\varepsilon_{m,\gamma,h}$, и может быть сделан при больших n за счет сходимости a_n^{kj} по мере к a^{kj} меньше любого наперед заданного $\varepsilon>0$. Преобразуя левую часть (14) так же, как левую часть тождества (10) и проводя соответствующие оценки, получим:

$$F^{(n)}_{\alpha,\delta,u_{m,h}}(\tau(\alpha))<\frac{\partial}{\partial\tau}F^{(n)}_{\alpha,\delta,u_{m,h}}\frac{d\tau}{d\alpha}+2\,|\,\varepsilon^{(n)}_{m,\gamma,h}\,|+2\,|\,E^{(n)}_{m,\gamma,h}\,|+2\,|\,I_2(\tau(\alpha))\,|.$$

Умножая обе части этого неравенства на $e^{-\alpha}$ и интегрируя по α от R_1 до R_2, получаем

$$F^{(n)}_{\alpha,\delta,u_{m,h}}(\tau(R_1))<\exp(R_1-R_2)\,F^{(n)}_{\alpha,\delta,u_{m,h}}(\tau(R_2))+2e^{R_1}\int_{R_1}^{R_2}(\varepsilon^{(n)}_{m,\gamma,h}(\tau(\alpha))+$$
$$+E^{(n)}_{m,\gamma,h}(\tau(\alpha))+I_2(\tau(\alpha))\,d\alpha. \tag{15}$$

Стремление к нулю при $m\to\infty$, $h\to 0$, $\gamma(m,h)\to 0$ интегралов от первых двух слагаемых в правой части (15) следует из выше изложенного:

$$\int_{R_1}^{R_2} I_2(\tau(\alpha))\,e^{-\alpha}d\alpha<\int_{R_1}^{R_2}\left|\int_0^{t_1}\int_{\Omega_{\hat\tau}}[\,|\,a_n^{kj}-a^{kj}\,|\,u_{x_k}]_h\,u_{m,n}\psi_{\gamma x_j}(x,\hat\tau)\exp\{-2\mu^2(t+\right.$$
$$\left.+\delta)\}\,dxdt\,\right|e^{-\alpha}d\alpha<k\int_{R_1}^{R_2}\left(\int_0^{t_1}\int_{\Omega_{\hat\tau}}|\,a^{kj}-a_n^{kj}|\,|\,u_{x_k}|\cdot|\,u_{m,h}\,|\,\psi_{\gamma x_j}(x,\tau(\alpha))\,|\,dxdt\right)d\alpha<$$
$$<k\int_0^{t_1}\int_{\Omega_{\hat\tau}}|\,a^{kj}-a_n^{kj}\,|\,|\,u_{x_k}\|\,u_{n,h}\,|\left(\int_{R_1}^{R_2}\psi_{\gamma x_j}(x,\ \tau(\alpha))\,d\alpha\right)dxdt. \tag{16}$$

В [4] показано, что равномерно относительно γ последний интеграл в (15) ограничен сверху. Отсюда и из сходимости по мере $a_n^{kj}\to a^{kj}$ следует стремление к нулю при $n\to\infty$ интеграла от последнего слагаемого в (15), и, тем самым, справедливость неравенства (8) в общем случае. Лемма доказана.

3. Выберем теперь расширяющуюся последовательность областей $\{Q_m\equiv\equiv Q_{\hat\tau_m}\}$. Обозначим $\mu_m=\mu(\hat\tau_m)$. Рассмотрим семейство задач

$$Lu=f(x,\ t),\quad (x,\ t)\in Q_m, \tag{17}$$

$$u|_{t=0}=0;\quad u|_{\partial\Omega_m\times(0,T)=\Gamma_m}=0. \tag{18}$$

Как следует из [5], каждая из этих задач имеет единственное решение $u_m\in \overset{0}{V}{}_2^{1,0}(Q_m)$. Следуя методике [1], получаем априорную оценку $\|\,u_m\|$. Полагаем в интегральном тождестве, соответствующем задаче (17), (18), $\eta=(\hat\eta\exp\{-2\mu^2_{m-i}(t+\delta)\})_h$, где $\hat\eta=u_{m,h}(x,\ t)$ при $0<t<T-h$ и $\hat\eta==0$ при $t>T-h$. После несложных преобразований и предельных переходов получим:

$$\langle u_m\rangle^2_{m,m-i}\equiv\int_0^T\int_{\Omega_m}[a^{kj}u_{mx_k}u_{mx_j}+(\mu^2_{m-i}-c+2^{-1}b^k_{x_k})\,u_m^2]\exp\{-2\mu^2_{m-i}(t+$$
$$+\delta)\}\,dxdt+2^{-1}\int_{\Omega_m}u_m^2\exp\{-2\mu^2_{m-i}(T+\delta)\}\,dx< \tag{19}$$

$$< \Lambda_{m,m-i}^{-1} \int_0^T \int_{\Omega_m} f^2 \exp\{-2\mu_{m-i}^2 (t+\delta)\}\, dxdt,$$

где

$$\Lambda_{m,m-i} = \inf \Big[\iint_{Q_m} [a^{kj} v_{x_k} v_{x_j} + (\mu_{m-i}^2 - c + 2^{-1} b_{x_k}^k) v^2] \exp\{-2\mu_{m-i}^2 \times$$

$$\times (t+\delta)\, dxdt \Big] \Big[\iint_{Q_m} v^2 \exp\{-2\mu_{m-i}^2 (t+\delta)\}\, dxdt \Big]^{-1}; \quad \langle v \rangle_{k,k} \equiv \langle v \rangle_k.$$

Здесь инфимум берется по всем $v(x,\ t) \in \overset{0}{V}{}_2^{1,0}(Q_m)$.

4. Докажем разрешимость задачи (1) — (3). Для упрощения выкладок положим $u_0(x) = 0$, $\psi_1(x,\ t) = 0$. Пусть последовательность областей Q_m выбрана так, что $\bigcup_{m=1}^{\infty} Q_m = Q$ и для произвольного решения $v(x,\ t) \in V_2^{1,0}(Q_{m+1})$ уравнения $Lu = 0$ в области Q_{m+1}, удовлетворяющего условию $v|_{\Gamma_{m+1} \cap \Gamma} = 0$, имеют место неравенства:

$$\iint_{Q_m} [Q(v,\ v) + \mu_m^2 v^2] \exp\{-2\mu_m^2 (t+\delta)\}\, dxdt + \frac{1}{2} \int_{\Omega_m} v^2 \exp\{-2\mu_m^2 (T+\delta)\}\, dx <$$

$$< e^{-1} \Big[\iint_{Q_{m+1}} [Q(v,\ v) + \mu_{m+1}^2 v^2] \exp\{-2\mu_{m+1}^2 (t+\delta)\}\, dxdt + \tag{20}$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{\Omega_{m+1}} v^2 \exp\{-2\mu_{m+1}^2 (T+\delta)\}\, dx \Big], \quad m = 1,\ 2, \ldots .$$

Возможность такого выбора областей Q_m следует из (8). Пусть $\{u_m\}$ — последовательность решений задач (17), (18) из п. 3. Зафиксируем произвольное натуральное k и оценим $\langle u_{k+m} + u_{k+m+m'} \rangle_k$ при $m,\ m' \to \infty$. На основании соотношения (20)

$$\langle u_{k+m} - u_{k+m+1} \rangle_k < \exp(-m/2) \langle u_{k+m} + u_{k+m+1} \rangle_{k+m} < \exp(-m/2)(\langle u_{k+m} \rangle_{k+m} +$$

$$+ \langle u_{k+m+1} \rangle_{k+m}), \quad \langle u_{k+m+1} \rangle_{k+m} < \langle u_{k+m+1} \rangle_{k+m+1,k+m} <$$

$$< \Lambda_{k+m+1,k+m}^{-1/2} \Big(\iint_{Q_{k+m+1}} f^2 \exp\{-2\mu_{k+m}^2 (t+\delta)\}\, dxdt \Big)^{1/2}.$$

Следовательно,

$$\langle u_{k+m} - u_{k+m+m'} \rangle_k < \sum_{i=0}^{m'-1} \exp(-(m+i)/2) [\langle u_{k+m+i} \rangle_{k+m+i} +$$

$$+ \langle u_{k+m+i+1} \rangle_{k+m+i+1,k+m+i}]. \tag{21}$$

Предположим выполненными условия на рост $f(x,\ t)$:

$$\iint_{Q_l} f^2 \exp\{-2\mu_l^2 (t+\delta)\}\, dxdt\ \Lambda_l^{-1} < M_1 \exp\{(1-\varepsilon)\, l\},$$

$$\iint_{Q_{l+1}} f^2 \exp\{-2\mu_l^2 (t+\delta)\}\, dxdt\ \Lambda_{l+1,l}^{-1} < M_2 \exp\{(1-\varepsilon)\, l\} \tag{22}$$

для какого-нибудь $\varepsilon > 0$ и произвольных натуральных l.

Используя (22), выведем из неравенства (21)

$$\langle u_{k+m} - u_{k+m+m'} \rangle_k < (M_1^{1/2} + M_2^{1/2}) \exp((1-\varepsilon)\, k 2^{-1}) \sum_{i=0}^{m'-1} \exp\{-2^{-1} \varepsilon (m+i)\} <$$

$$< M \exp(2^{-1}(1-\varepsilon)\, k) \exp(-\varepsilon m/2); \quad \langle u_{k+m} - u_{k+m+m'} \rangle_k \xrightarrow[m,m' \to \infty]{} 0. \tag{23}$$

Пусть теперь выполнено условие эллиптичности

$$a^{ij}(x, t)\xi_i\xi_j > \nu_l |\xi|^2, \quad \nu_l > 0, \quad (x, t) \in Q_l, \quad l = 1, 2, \dots, \tag{24}$$

а также следующее ограничение на рост коэффициентов:

$$\mu_k^2 - c(x, t) + 2^{-1} b^k_{x_k} > 0; \quad (x, t) \in Q_k, \quad k = 1, 2, \dots . \tag{25}$$

Тогда, используя (23) и произвольность выбора $T > 0$ во всех приведенных оценках, получаем фундаментальность последовательности $\{u_n\}$ в пространстве $V_2^{1,0}(Q_k)$ при произвольном k. Предел этой последовательности $u(x, t)$, очевидно, и будет искомым решением задачи (1)—(3). Используя лемму 1, легко доказать единственность этого решения.

Простые оценки, использующие неравенства (23) и (19), дают поведение найденного решения на бесконечности:

$$\begin{aligned}\langle u\rangle_k &= \lim_{m\to\infty}\langle u_{k+m} - u_k + u_k\rangle_k \leqslant \lim_{m\to\infty}\langle u_{k+m} - u_k\rangle_k + \langle u_k\rangle_k < C\exp(2^{-1}(1-\varepsilon)k) + \\ &+ \langle u_k\rangle_k < C\exp(2^{-1}(1-\varepsilon)k) + M_1^{1/2}\exp(2^{-1}(1-\varepsilon)k).\end{aligned} \tag{26}$$

Тем самым доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Задача* (1) — (3) *при выполнении условий* (5) — (7), (24), (25) *имеет единственное решение* $u(x, t) \in V_{2, \text{loc}}^{1,0}(Q)$, *и для него выполняется оценка* (26).

Замечание 1. Теорема 1 справедлива и для более общих правых частей уравнения (1) вида $F(x, t) = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} + f$, где $f_i(x, t) \in L_2^{\text{loc}}(Q)$. При этом условие роста на $F(x, t)$ принимает вид:

$$\begin{aligned}&\iint\limits_{Q_l}\sum_{i=1}^{n} f_i^2\exp\{-2\mu_l^2(t+\delta)\}\,dxdt + \iint\limits_{Q_l} f^2\exp\{-2\mu_l^2(t+\delta)\}\,dxdt \times \\ &\times \Lambda_l^{-1} < M_1\exp\{(1-\varepsilon)l\},\end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned}&\iint\limits_{Q_{l+1}}\sum_{i=1}^{n} f_i^2\exp\{-2\mu_l^2(t+\delta)\}\,dxdt + \iint\limits_{Q_{l+1}} f^2\exp\{-2\mu_l^2(t+\delta)\}\,dxdt \times \\ &\times \Lambda_{l+1,l}^{-1} < M_2\exp\{(1-\varepsilon)l\}.\end{aligned}$$

Замечание 2. Аналогично, несколько изменяя получение априорной оценки $u_n(x, t)$, можно доказать теорему существования и при меньшей, естественной гладкости $F(x, t)$, а именно когда $f(x, t) \in L_{q,r}^{\text{loc}}(Q)$ (см. [5]). На этом же пути доказывается теорема существования при наличии неоднородных начальных и граничных условий (2).

5. Рассмотрим начально-краевую задачу для квазилинейного параболического уравнения:

$$Lu = u_t - (a_i(x, t, u, \nabla u))_{x_i} - b^k(x, t)u_{x_k} - b_0(x, t, u) = f(x, t), \quad f \in L_2^{\text{loc}}(Q), \tag{28}$$

$$u|_\Gamma = 0, \quad u|_{t=0} = h_0(x), \quad h_0(x) \in L_2^{\text{loc}}(\Omega); \tag{29}$$

здесь Ω — неограниченная область в R^n с некомпактной границей. Пусть выполнены условия из [5, с. 480], которые обеспечивают разрешимость в $V_2^{1,0}(Q')$ задачи (28), (29) для любой конечной подобласти $Q' = \Omega' \times (0, T) \subset Q$. В дальнейшем мы наложим на уравнение (28) более жесткие ограничения, поэтому указанные условия из [5] не приводим. Доказательство разрешимости задачи (28), (29) будем проводить по той же схеме, что и в линейном случае.

6. Найдем априорную оценку типа неравенства Сен-Венана для разности возможных решений задачи (28), (29). Предположим выполненными условия:

1) $a_i(x, t, u, p)$, $b_0(x, t, u)$ — измеримые функции, непрерывные по (u, p);

2) $a_i(x, t, u, p) < r_1(x, t) + r_2(x, t)(|u| + |p|)$, $r_1 \in L_2^{\mathrm{loc}}(Q)$, r_2 ограничена на ограниченных подмножествах;

3) $\sum\limits_{i=1}^{n} |a_i(x, t, u, p) - a_i(x, t, v, q)|^2 < k_1(x) \sum\limits_{i=1}^{n} (a_i(x, t, u, p) - a_i(x, t, v, q))(p_i - q_i) + k_2(x)|u - v|^2$ для достаточно больших $|x|$;

4) $|b_0(x, t, u) - b_0(x, t, v)| < c(x, t)|u - v|$;

5) $b^k(x, t)$ и $c(x, t)$ такие же, как в п. 2.

Пусть $u(x, t), v(x, t) \in V_2^{1,0}(Q_m)$ — два решения уравнения (28) в Q_m, удовлетворяющие условиям (29) на $\partial Q_m \cap \partial Q$. Для их разности $\varphi = u - v$ справедливо интегральное тождество

$$-\iint\limits_{Q_m} (u - v)\eta_t dxdt + \iint\limits_{Q_m} [(a_i(u) - a_i(v))\eta_{x_i} - b^k\varphi_{x_k}\eta - (b_0(x, t, u) - \tag{30}$$
$$- b_0(x, t, v))\eta]\, dxdt \quad \forall \eta \in \overset{0}{W}{}_2^{1,1}(Q_m), \quad \eta(x, T) = 0.$$

Здесь $a_i(u) \equiv a_i(x, t, u, \nabla u)$. Полагая, как ранее, $\eta = (\hat{\eta}\exp\{-2\mu^2(\tau)t\} \times \psi_\gamma(x, t))_h$ и выбирая $\hat{\eta} = \varphi_{n,h}$ при $t < T - h$ и $\hat{\eta} = 0$ при $t > T - h$, где $\{\varphi_n\}$ $(\varphi_n = u_n - v_n)$ — последовательность функций из $C^2(Q_m)$, приближающих φ в норме $V_2^{1,0}(Q_m)$, $\varphi_n = 0$ на соответствующей части ∂Q_m, получаем в силу условий 1) — 5):

$$2^{-1}\int\limits_{\Omega_{\hat{\tau}}} |\varphi_{n,h}|^2 \exp\{-2\mu^2(\hat{\tau})(T - h)\}\, dx + \iint\limits_{Q_{\hat{\tau}}} [\mu^2(\hat{\tau})\varphi_{n,h}^2 + (a_i(u_{n,h}) -$$
$$- a_i(v_{n,h}))\varphi_{n,hx_i} - b^k\varphi_{n,hx_k}\varphi_{n,h} - (b_0(x, t, u) - b_0(x, t, v))\varphi_{n,h}] \times$$
$$\times \exp\{-2\mu^2(\hat{\tau})t\}\, dxdt = \int\limits_{S_{\hat{\tau}}} (a_i(u_{n,h}) - a_i(v_{n,h}))\varphi_{n,h}\nu_i \exp\{-2\mu^2(\hat{\tau})t\}\, dS +$$
$$+ E_{n,\gamma,h}(\hat{\tau}) + \varepsilon_{n,\gamma,h}(\hat{\tau}), \tag{31}$$

где $E_{n,\gamma,h}(\hat{\tau})$ и $\varepsilon_{n,\gamma,h}(\hat{\tau})$ оцениваются так же, как и в линейном случае. Здесь мы временно предположили, что $a_i(x, t, u, p)$ — дифференцируемые по всем аргументам функции. Обозначим

$$p(\tau) = \max\left(\sup_{(x,t)\in S_{\hat{\tau}}}\left(-\frac{1}{2}b^i\nu_i\right), 0\right), \quad q(\hat{\tau}) = \sup_{(x,t)\in S_{\hat{\tau}}} [h^{-1}(x)k_1(x)]^{1/2},$$

$$Q(u, v, u - v) = (a_i(u) - a_i(v))(u - v)_{x_i} + (2^{-1}b^k_{x_k} - c)(u - v)^2,$$

$$\lambda(\tau) = \inf\left\{\Big[\int\limits_{S_{\hat{\tau}}} Q(f, g, f - g) + \mu^2(\hat{\tau})(f - g)^2 h(x)\, dS\Big]\Big[\int\limits_{S_{\hat{\tau}}} (f - g)^2\, dS\Big]^{-1}\right\},$$

где нижняя грань берется по всем функциям $f, g \in \overset{0}{C}{}^2(Q)$. Предположим выполненными условия (5) — (7), а также условие

$$k_2(x, t)k_1^{-1}(x, t) < \mu^2(\tau) + 2^{-1}b^k_{x_k} - c(x), \quad (x, t) \in S_\tau. \tag{32}$$

Продолжая так же, как при доказательстве леммы 1, устанавливаем неравенство (8) для функции $F_{\alpha,u,v}(\tau(\alpha)) \equiv \dfrac{\alpha}{2}\int\limits_{\Omega_\tau} (u - v)^2 \exp\{-2\mu^2(\tau)T\}\, dx +$

$$+ \iint\limits_{Q_\tau} (Q(u, v, u - v) + \mu^2(\tau)(u - v)^2)\exp\{-2\mu^2(\tau)t\}\, dxdt.$$

7. Получим априорную оценку в $V_2^{1,0}(Q_m)$ приближенных решений $u_m(x, t)$. Пусть для произвольных $(x, t, u, p) \in Q \times R^{n+1}$ выполнено:

$$a_i(x, t, u, p)p_i + [b^k(x, t)p_k + b_0(x, t, u)]u > e(x)|p|^2 - d(x)(1+u^2). \tag{33}$$

Выберем снова расходящуюся последовательность областей $\{Q_m \equiv Q_{\tau_m}\}$. Как следует из [5], в каждой области Q_m уравнение (28) имеет решение $u_m(x, t) \in \overset{0}{V}{}_2^{1,0}(Q_m)$, удовлетворяющее начальному условию $u|_{t=0} = h_0(x)$ (положим для сокращения выкладок $h_0 = 0$). Выбирая в интегральном тождестве, определяющем $u_m(x, t)$, пробные функции теми же, что и в линейном случае, получаем серию оценок:

$$2^{-1}\int\limits_{\Omega_m} u_m^2 \exp(-2\mu_{m-i}^2 T)dx + \iint\limits_{Q_m} [e(x)|\nabla u|^2 + (\mu_{m-i}^2 - d(x))u_m^2 \exp \times$$
$$\times(-2\mu_{m-i}^2 t)\,dxdt < 2\left[\Lambda_{m,m-i}^{-1}\iint\limits_{Q_m} f^2 \exp(-2\mu_{m-i}^2 t)\,dxdt + \iint\limits_{Q_m} d(x)\exp \times\right.$$
$$\left.\times(-2\mu_{m-i}^2 t)\,dxdt\right], \tag{34}$$

где $\Lambda_{m,m-i} = \inf\limits_{v}\left\{\left[\iint\limits_{Q_m}[e(x)|\nabla v|^2 + (\mu_{m-i}^2 - d)v^2]\exp(-2\mu_{m-i}^2 t)dxdt\right] \times\right.$
$$\left.\times\left[\iint\limits_{Q_m} v^2 \exp(-2\mu_{m-i}^2 t)\,dxdt\right]^{-1}\right\}, \quad \Lambda_{m,m} = \Lambda_m.$$

8. Покажем разрешимость задачи (28), (29). Пусть снова области $Q_m = Q_{\tau_m}$ выбраны так, что для произвольных решений u, v уравнения $L\varphi = 0$ в области Q_{m+1}, удовлетворяющих условию $u|_{\Gamma\cap\Gamma_{m+1}} = v|_{\Gamma\cap\Gamma_{m+1}} = 0$, имеют место неравенства вида (20) с заменой $Q(v, v)$ на $Q(u, v, u-v)$.

Обозначим $\langle u, v\rangle_{m,m-i}^2 \equiv \dfrac{1}{2}\int\limits_{\Omega_m}|u-v|^2\exp(-2\mu_{m-i}^2 T)dx + \iint\limits_{Q_m}[Q(u, v, u - v) + \mu_{m-i}^2|u-v|^2]\exp(-2\mu_{m-i}^2 t)\,dxdt$, $\langle u, v\rangle_{l,l} = \langle u, v\rangle_l$. Пусть $\{u_m\}$ — последовательность решений из п. 7, а последовательности постоянных $\{h_m\}$, $\{g_m\}$ оределяются из неравенств:

$$\iint\limits_{Q_m}[k_1(x)|\nabla u_m|^2 + (k_2(x) - c + 2^{-1}b_{x_k}^k + \mu_m^2)u_m^2]\exp(-2\mu_m^2 t)\,dxdt <$$
$$< h_m\iint\limits_{Q_m}[e(x)|\nabla u_m|^2 + (\mu_m^2 - d(x))u_m^2]\exp(-2\mu_m^2 t)\,dxdt;$$
$$\iint\limits_{Q_{m+1}}[k_1(x)|\nabla u_{m+1}|^2 + (k_2(x) - c(x) + 2^{-1}b_{x_k}^k + \mu_m^2)u_{m+1}^2\exp(-2\mu_m^2 t)\,dxdt <$$
$$< g_m\iint\limits_{Q_{m+1}}[e(x)|\nabla u_{m+1}|^2 + (\mu_m^2 - d(x))u_{m+1}^2]\exp(-2\mu_m^2 t)\,dxdt.$$

Тогда так же, как в линейном случае, доказывается, что $\lim\limits_{m,m'\to\infty}\langle u_{k+m}, u_{k+m+m'}\rangle_k = 0$ для всякого натурального k при условии, что выполняются ограничения на рост функций $f(x, t)$ и $d(x)$:

$$h_l\left[\Lambda_l^{-1}\iint\limits_{Q_l} f^2\exp(-2\mu_l^2 t)\,dxdt + \iint\limits_{Q_l} d(x)\exp(-2\mu_l^2 t)\,dxdt\right] <$$
$$< M_1\exp((1-\varepsilon)l); \quad g_l\left[\Lambda_{l+1,l}^{-1}\iint\limits_{Q_l} f^2\exp(-2\mu_l^2 t)\,dxdt + \right.$$
$$\left. + \iint\limits_{Q_l} d(x)\exp(-2\mu_l^2 t)\,dxdt\right] < M_2\exp((1-\varepsilon)l). \tag{35}$$

Предположив теперь, что $\exists m_0 > 0$:

$$s_1(x)\,|p-q|^2 - s_2(x)\,|u-v|^2 < (a_i(x, t, u, p) - a_i(x, t, v, q))(p_i - q_i), \tag{36}$$

$$s_1(x) > 0,\ x \in \bar{Q}_m;\quad \sup_{x\in Q_m} s_2(x) < \mu_m^2 + 2^{-1} b_{x_k}^k - c\ \ \forall m > m_0,$$

получим фундаментальность последовательности $\{u_n\}$ в пространстве $V_2^{1,0}(Q_k)$ для любого k. Отсюда следует справедливость следующей теоремы.

Теорема 2. *Задача* (28), (29) *при выполнении условий* 1) — 5), (33) — (36) *имеет решение* $u(x, t) \in V_{2,\mathrm{loc}}^{1,0}(Q)$.

Так же, как в линейном случае, легко доказать единственность этого решения и получить оценку его на бесконечности.

1. *Oleinik O. A., Yosifjan G. A.* Boundary value problems for second order elliptic equtions in unbounded domains and Saint-Venant's principle. — Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa. Ser. **4**, 1977, **2**, p. 269—290.
2. *Ладыженская О. А., Солонников В. А.* О нахождении решений краевых задач для стационарных уравнений Стокса и Навье—Стокса, имеющих неограниченный интеграл Дирихле.— Зап. науч. семинара Ленингр. отд-ния Мат. ин-та, 1980, **96**, N 2, с. 117—160.
3. *Шишков А. Е.* О растущих обобщенных решениях краевых задач для линейных и квазилинейных параболических уравнений в неограниченных областях.— В кн.: Тез. Респ. конф. по нелинейн. задачам мат. физики. Донецк, 1983, с. 196.
4. *Олейник О. А., Иосифьян Г. А.* Аналог принципа Сен-Венана и единственность решений краевых задач в неограниченных областях для параболических уравнений.— Успехи мат. наук, 1976, **31**, № 6, с. 142—166.
5. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа.— М. : Наука, 1967.— 736 с.

Ин-т прикл. математики и механики
АН УССР, Донецк

Получено 12.07.83