УДК 517.946

К. Ю. Казаков, С. Ф. Морозов

Об определении неизвестной линии разрыва решения смешанной задачи для квазилинейной гиперболической системы

Задача об определении неизвестной линии разрыва гидродинамических параметров потока жидкости или газа является одной из основных проблем газовой динамики и теории аэроупругости [1 — 4]. Ее математическая постановка сводится к изучению смешанной задачи дл квазилинейной системы гиперболического типа в области с одной ил несколькими свободными границами. В случае линеаризованной систем одномерной газовой динамики, линейной гиперболической системы пе вого порядка, полулинейного гиперболического уравнения второго поря ка она исследована в [4 — 8].

В настоящей работе устанавливается теорема существования и еди ственности в малом кусочно-гладкого решения смешанной задачи д квазилинейной гиперболической системы с двумя независимыми пер менными, линия разрыва которого удовлетворяет обыкновенному ди ференциальному уравнению с правой частью, зависящей от решен системы.

1. Пусть $G(T)$ — криволинейный четырехугольник в плоскости xC ограниченный линиями $t=0$, $t=T>0$, $x=S_1(t)$, $x=S_2(t)$ $(S_1(0)=\ldots$ $S_2(0)=a_2$, $S_1(t)<S_2(t)$ для всех $t\in[0,T]$). Пусть, кроме того, неизвестн линия $x=\Psi(t)$ $(S_1(t)<\Psi(t)<S_2(t)$ для всех $t\in[0,T])$ разбивает $G(T)$ две компоненты $G^-(T)\equiv\{(x,t)\,|\,S_1(t)\leqslant x\leqslant\Psi(t),\ 0\leqslant t\leqslant T\}$, $G^+(T)$ $\equiv\{(x,t)\,|\,\Psi(t)\leqslant x\leqslant S_2(t),\ 0\leqslant t\leqslant T\}$. (В дальнейшем знаком «+» или «– будем обозначать значения соответствующих функций в $G^-(T)$ и $G^+(T)$.

Рассмотрим в $G(T)\equiv G^-(T)\cup G^+(T)$ квазилинейную систему, гипер лическую в узком смысле [9]:

$$u_{it}+\lambda_i(x,t,u(x,t))\,u_{ix}=F_i(x,t,u(x,t)), \qquad (\ldots$$

где $u\equiv(u_1,u_2,\ldots,u_n)$, с начальными условиями

$$u_i(x,0)=\gamma_i(x),\quad x\in[a_1,a_2],\quad i\in I\equiv\{1,2,3,\ldots,N\}, \qquad (\ldots$$

условиями на линиях $x=S_k(t)$, $k=1,2$,

$$u_j(S_k(t),t)=R_j^k(t,u^k(S_k(t),t)),\ j\in J_k,\ k=1,2,$$

и условиями на свободной границе $x=\Psi(t)$

$$u_j^{\mp}(\Psi(t)\mp 0,t)=R_j^{\mp}(\Psi(t),\Psi^{(1)}(t),\ldots,\Psi^{(m-1)}(t),t,u^-(\Psi(t),t),$$

$$u^+(\Psi(t),t)),\quad j\in J^{\mp}, \qquad (\ldots$$

которая удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^m\Psi}{dt^m}=H(\Psi(t),\Psi^{(1)}(t),\ldots,\Psi^{(m-1)}(t),t,u^-(\Psi(t),t),\quad u^+(\Psi(t),t))$$

и начальным условиям

$$\Psi(0)=\alpha_0\,(a_1<\alpha_0<a_2),\quad \Psi^{(k)}(0)=\alpha_k,\quad k=1,2,\ldots,m-1,$$

где a_1,a_2,α_k, $k=0,1,2,\ldots,m-1$, — фиксированные числа, $u^-=\{u_i|i\in I^-$ $u^+\equiv\{u_i\,|\,i\in I^+\}$, $u^k\equiv\{u_i\,|\,i\in I_k\}$, $k=1,2$, $I^{\mp}\cup J^{\mp}=I$, $I^k\cup J^k=I$, $k=1$ а множества $I^{\pm}$, I^k, $k=1,2$, определяются следующими соотношениями:

$$\lambda_i(\Psi(t),t,u(\Psi(t)\mp 0,t))-\Psi'(t))>0\,(<0),\quad i\in I^-\quad(i\in I^+);$$

$$(\lambda_i(S_k(t),t)-S_k'(t))(-1)^{k+1}<0,\quad i\in I^k,\quad k=1,2$$

(нетрудно видеть, что если эти соотношения выполняются при $t=0$, то о будут выполняться при всех $t\in[0,\tau]$ таких, что $|S_k(t)-a_k|<\varepsilon$, $|S_k'(t)$ $-S_k'(0)|<\varepsilon$, $|\Psi(t)-\alpha_0|<\varepsilon$, $|\Psi'(t)-\alpha_1|<\varepsilon$, $|u_i(x,t)-\gamma_i(x)|<\varepsilon$, г ε — малое число).

Пусть функции $\lambda_i,F_i:\ [a_1,a_2]\times[0,T]\times R^n\to R^1$, $i\in I$; $H:[a_1,a_2]$ $\times R^{m-1}\times[0,T]\times R^{l-}+R^{l+}\to R^1$; $R_j^k:[0,T]\times R^{l_k}\to R^1$, $j\in J^k$; $R_j^{\mp}:[a_1,a_2]$ $\times R^{m-1}\times[0,T]\times R^{l-}\times R^{l+}\to R^1$, $j\in J^{\mp}$; $\gamma_i(x)$, $i\in I$, $x\in[a_1,\alpha_0]$ $([\alpha_0,a\ldots$

$S_k(t)$, $t \in [0, T]$, $k = 1, 2$, принадлежат классу C^1 в своих областях определения, где l_1, l_2, l_-, l_+ — число элементов множеств I^1, I^2, I^+, I^- соответственно. Поставим задачу о нахождении вектор-функции $u(x, t)$, определенной при $(x, t) \in G^-(T) \cup G^+(T)$, класса $C^1(G^-(T)) \cap C^1(G^+(T))$ и функции $x = \Psi(t)$ класса $C^m[0, T]$, удовлетворяющих уравнениям (1), (5), начальным условиям (2), (6) и граничным условиям (3), (4).

2. Пусть в точках $(a_k, 0)$, $k = 1, 2$, выполняются условия согласования нулевого и первого порядков (см. [9, с. 99]). Справедлива следующая теорема.

Теорема. *Пусть функции $\lambda_i, F_i, S_k, H, R_j^k, R_j^{\mp}$, γ_i удовлетворяют условиям п. 1 и условиям согласования. Тогда, если справедливы неравенства*

$$|\alpha_1 - \lambda_i(\alpha_0, 0, \gamma(\alpha_0 \mp 0))| \geqslant \delta > 0, \tag{7}$$

$$|S_k'(0) - \lambda_i(a_k, 0, \gamma(a_k))| \geqslant \delta > 0, \ k = 1, 2, \ i \in I, \tag{8}$$

то существует ν, $0 < \nu \leqslant T$, такое, что задача (1) — (6) имеет единственное решение $W(x, t) \equiv \{u(x, t), \psi(t)\} \in [C^1(G^-(\nu)) \cap C^1(G^+(\nu))] \times C^m[0, \nu]$.

С целью доказательства теоремы 1 установим априорные оценки для решения задачи (1) — (6). Справедливы следующие леммы.

Лемма 1. *Пусть $\eta(y)$ — функция класса $C^0[0, \infty)$. Тогда для* решений *$y(t)$, $y_1(t)$ задач Коши*

$$dy/dt = \eta(y), \quad y(0) = y_0; \qquad dy_1/dt = \eta(y_0 + y_1), \quad y_1(0) = 0$$

выполняется соотношение $y(t) = y_0 + y_1(t)$.

Доказательство. Будем искать $y(t)$ в виде $y(t) = y_1(t) + y_2(t)$, где $y_1(t)$, $y_2(t)$ удовлетворяют системе $dy_1/dt = \eta(y_2 + y_1)$, $dy_2/dt = 0$ с начальными условиями $y_1(0) = 0$, $y_2(0) = y_0$.

Интегрируя второе уравнение системы, получаем утверждение леммы.

Лемма 2. *Пусть функции $\lambda_i, F_i, S_k, H, R_j^k, R_j^{\mp}, \gamma_i$ удовлетворяют условиям п. 1 и условиям (7), (8). Тогда существует ν, $0 < \nu \leqslant T$, такое, что решение $W(x, t) \equiv \{u(x, t), \Psi(t)\}$ задачи (1) — (6) удовлетворяет оценкам*

$$\|\Psi(\tau)\|_{C^m[0,\, t]} \leqslant N_1(t), \quad t \in [0, \nu], \tag{9}$$

$$|u_i(x, t)| \leqslant N_2(t), \quad |u_{ix}(x, t)| \leqslant N_3(t), \quad (x, t) \in G(\nu), \tag{10}$$

где $N_j(t)$, $j = 1, 2, 3$, — функции, ограниченные при $t \in [0, \nu]$.

Доказательство. Рассмотрим для (1) продолженную систему (см. [9]):

$$u_{it} + \lambda_i(x, t, u(x, t)) u_{ix} = F_i(x, t, u(x, t)), \tag{11}$$

$$\mathcal{P}_{it} + \lambda_i(x, t, u(x, t)) \mathcal{P}_{ix} = \mathcal{F}^i(x, t, u) + \mathcal{F}^i_k(x, t, u)\mathcal{P}_k + \mathcal{F}^i_{k,i}(x, t, u)\mathcal{P}_i \mathcal{P}_k, \tag{12}$$

где $\mathcal{P}_i(x, t) = u_{ix}(x, t)$, $\mathcal{F}^i(x, t, u) = F_{ix}(x, t, u)$, $\mathcal{F}^i_k(x, t, u) = F_{iu_k}(x, t, u)$, $i \neq k$, $\mathcal{F}^i_i(x, t, u) = F_{iu_i}(x, t, u) - \lambda_{ix}(x, t, u)$, $\mathcal{F}^i_{k,i}(x, t, u) = \lambda_{iu_k}(x, t, u)$, $k\, i \in I$.

Введем область $\Omega(T, U, \vec{V}) \equiv \{(x, t), u, \Psi, \Psi^{(1)}, \ldots, \Psi^{(m-1)}) \mid$, $a_1 \leqslant x \leqslant a_2$, $0 \leqslant t \leqslant T$, $\|u\|_{R^n} \leqslant U$, $|\Psi^{(k)}| < V^{(k)}, k = 0, 1, 2, \ldots, m\}$, $\vec{V} \equiv (V^{(0)}, V^{(1)}, \ldots, V^{(m)})$, $V = V^{(0)}$. Определим следующие функции:

$$A_1(t, U, \vec{V}) = \max_{\tau \leqslant t} \max_{\Omega} \max_{j \in J} \max \{|R_j^{1,2}(t, u^{1,2})|, |R_j^{\mp}(\Psi, \Psi^{(1)}, \ldots, \Psi^{(m-1)}, t, u^{\mp})|\},$$

$$A_2(t, U, \vec{V}) = \max_{\tau \leqslant t} \max_{\Omega} |H(\Psi, \Psi^{(1)}, \ldots, \Psi^{(m-1)}, t, u^-, u^+)|,$$

$$\Phi_0(U) = \max_{\Omega} \max_{i \in I} |F_i(x, t, u)|, \quad J = J^1 \cup J^2 \cup J^- \cup J^+.$$

Применяя лемму 1 к уравнениям (5), (11), находим мажорантную систему для системы (11) и уравнения движения свободной границы (5):

$$dU/dt = \Phi_0(\tilde{U}), \tag{13}$$

$$d^mV/dt^m = A_2(t, \tilde{U}, \vec{V}), \tag{14}$$

где $\tilde{U} = U + A_1(t, U, \vec{V})$ с начальными условиями

$$V^{(k)}(0) = |\alpha_k|, \quad k = 0, 1, 2, \dots, m-1, \quad U(0) = \sup_{x \in [a_1, a_1]} \|\gamma(x)\|_{R^n}. \tag{15}$$

Из предположения п. 1 следует, что функции $A_{1,2}(t, U, \vec{V})$, $\Phi_0(U)$, $(t, U, \vec{V}) \in [0, t] \times R_+^1 \times R_+^{m+1}$ принадлежат классу C^0 в своих областях определения. В силу этого существует решение $U(t), \vec{V}(t) \in C^1[0, \nu_1]$, $0 < \nu_1 \leqslant T$, системы (13), (14) с начальными условиями (15), и по теореме сравнения [10] справедливы неравенства

$$\|\Psi(\tau)\|_{C^m[0,t]} \leqslant \|V(\tau)\|_{C^m[0,t]} = N_1(t), \tag{16}$$

$$\sup_{(x,\tau)\in G(t)} \|u_i(x, \tau)\|_{R^n} \leqslant U(t)\sqrt{n} = N_2(t), \quad (x, t) \in G(\nu_1). \tag{17}$$

С целью построения оценок производных $u_{ix}(x, t)$, $i \in I$, продифференцируем соотношения (3), (4) по t и исключим с помощью (1) производные u_{it}. В результате получим

$$\mathcal{P}_j(S_k(t), t) = \frac{L_j^k(t, u(S_k(t), t), \mathcal{P}^k(S_k(t), t))}{S_k'(t) - \lambda_j(S_k(t), t, u(S_k(t), t))} = M_j^k(t, u(S_k(t), t),$$

$$\mathcal{P}^k(S_k(t), t)), \quad j \in J^k, \quad k = 1, 2; \qquad \mathcal{P}^k(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} u^k(x, t); \qquad \mathcal{P}_j(\Psi(t) \mp 0, t) =$$

$$= \frac{L_j^{\mp}(\Psi(t), \Psi^{(1)}(t), \dots, \Psi^{(m-1)}(t), t, u(\Psi(t) \mp 0, t), u^{\pm}(\Psi(t), t), \mathcal{P}^{\pm}(\Psi(t), t))}{\Psi'(t) - \lambda_j(\Psi(t), t, u(\Psi(t) \mp 0, t))} =$$

$$= M_j^{3,4}(\Psi(t), \Psi^{(1)}(t), \dots, \Psi^{(m-1)}(t), t, u(\Psi(t) \mp 0, t), \quad u^{\pm}(\Psi(t), t),$$

$$\mathcal{P}^{\mp}(\Psi(t), t)), \quad j \in J^{\mp}; \qquad \mathcal{P}^{\mp}(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} u^{\mp}(x, t),$$

где $L_j^{1,2}: [0, T] \times R^n \times R^{l_{1,2}} \to R^1$, $L_j^{\mp}: [a_1, a_2] \times R^{m-1}[0, T] \times R^n \times R^{l\pm} \times R^{l\mp} \to R^1$ — функции класса C^0 в своих областях определения.

Из оценок (16), (17) следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует ν_2, $0 < \nu_2 \leqslant \nu_1 \leqslant T$, такое, что

$$|\gamma_i(x) - u_i(x, t)| \leqslant \varepsilon, \quad |\Psi'(t) - \alpha_1| \leqslant \varepsilon,$$

$$|\Psi(t) - \alpha_0| \leqslant \varepsilon, \quad t \in [0, \nu_2], \quad (x, t) \in G(\nu_2).$$

Тогда в силу непрерывной дифференцируемости функций $S_k(t)$, $k = 1, 2$, $\lambda_i(x, t, u)$, $i \in I$, и условий (7), (8) для решения $W(x, t)$ задачи (1) — (6) при $t \in [0, \nu_2]$ выполняются неравенства

$$|\Psi'(t) - \lambda_j(\Psi(t), t, u(\Psi(t) \mp 0, t))| \geqslant \delta, \quad j \in J^{\mp},$$

$$|S_k'(t) - \lambda_j(S_k(t), t, u(S_k(t), t))| \geqslant \delta, \quad j \in J^k, \quad k = 1, 2.$$

Следовательно, функции $M_j^{1,2}: [0, \nu_2] \times R^n \times R^{l_{1,2}} \to R^1$, $M_j^{3,4}: [a_1, a_2] \times R^{m-1} \times [0, \nu_2] \times R^n \times R^{l\pm} \times R^{l\mp} \to R^1$ принадлежат классу C^0 в своих областях определения.

Введем область $\mathfrak{M}(P) \equiv \{(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \dots, \mathcal{P}_n) |, \|\mathcal{P}\|_{R^n} \leqslant P\}$. Определим следующие функции:

$$\Phi_1(U) = \max_{\Omega} \max_{i\in I} |\mathscr{F}^i(x, t, u)|, \quad \Phi_2(U) = \max_{\Omega} \max_{i,k\in I} |\mathscr{F}^i_k(x, t, u)|,$$

$$\Phi_3(U) = \max_{\Omega} \max_{i,k\in I} |\mathscr{F}^i_{k,i}(x, t, u)|, \qquad A_3(t, U, \vec{V}, P) = \max_{\tau\leqslant t} \max_{\Omega\times\mathfrak{M}} \max_{j\in J}$$
$$\max_{\beta=1,2,3,4} |M^\beta_j(\Psi, \Psi^{(1)}, \ldots, \Psi^{(m-1)}, t, u, u^\pm, \mathcal{P}^\mp)|.$$

Согласно предположениям п. 1 и предыдущим рассуждениям, эти функции принадлежат классу C^0 в своих областях определения.

Тогда существует решение $P(t) \in C^1[0, \nu_3]$, $0 < \nu_3 \leqslant \nu_2 \leqslant \nu_1 \leqslant T$, уравнения $dP/dt = \Phi_1(\tilde{U}) + \Phi_2(\tilde{U})\tilde{P} + \Phi_3(\tilde{U})\tilde{P}^2$, мажорирующего систему (12), с начальным условием $P(0) = \sup\limits_{x\in[a_1, a_2]} \|\gamma'(x)\|_{R^n}$, где $\tilde{P} = P + A_3(t, \tilde{U}, \vec{V}, P)$, $\tilde{U}$ определяется решением задачи (13) — (15). Кроме того, по теореме сравнения [10] справедливо неравенство $\|\mathcal{P}(x, t)\|_{R^n} \leqslant P(t) = N_3(t)$, $(x, t) \in G(\nu_3)$. При $\nu = \nu_3$ получаем утверждение леммы.

3. Доказательство теоремы. Построим решение $W(x, t) \equiv \{u(x, t), \Psi(t)\}$ задачи (1) — (6) методом последовательных приближений.

В качестве начального приближения для $\Psi(t)$ возьмем произвольную функцию $x = \Psi_0(t) \in C^m[0, \nu]$, удовлетворяющую условиям (6) и оценке (9). Решение $u_0(x, t) \in C^1(G_0^-(\nu)) \cap C^1(G_0^+(\nu))$ системы (1), где $G_0^-(\nu) \equiv \{(x,t) | S_1(t) \leqslant x \leqslant \Psi_0(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant \nu\}$, $G_0^+(\nu) \equiv \{(x, t) | \Psi_0(t) \leqslant x \leqslant S_2(t), \quad 0 \leqslant \leqslant t \leqslant \nu\}$, с начальными условиями (2), граничными условиями (3) и условиями на линии $x = \Psi_0(t)$

$$u_{j,0}(\Psi_0(t) \mp 0, t) = R_j^\mp(\Psi_0(t), \Psi_0^{(1)}(t), \ldots, \Psi_0^{(m-1)}(t), t, u_0^-(\Psi_0(t), t),$$
$$u_0^+(\Psi_0(t), t)), \quad j \in J^\mp, \tag{18}$$

существует и может быть построено методом последовательных приближений по аналогии с тем, как строится решение задачи Коши для системы (1) (см. [9, с. 62—70]). Кроме того, нетрудно показать, что решение $W_0(x, t)$ удовлетворяет оценкам (10) (см. [9, с. 62—64]).

Возьмем вектор-функцию $W_0(x, t) = \{u_0(x, t), \Psi_0(t)\}$ в качестве начального приближения для решения $W(x, t) = \{u(x, t), \Psi(t)\}$ исходной задачи (1) — (6). Пусть построено приближение $W_n(x, t) \equiv \{u_n(x, t), \quad \Psi_n(t)\} \in \in [C^1(G_n^-(\nu)) \cap C^1(G_n^+(\nu))] \times C^m[0, \nu]$, где $G_n^-(\nu) \equiv \{(x, t) | S_1(t) \leqslant x \leqslant \Psi_n(t)$, $0 \leqslant t \leqslant \nu\}$, $G_n^+(\nu) \equiv \{(x, t) | \Psi_n(t) \leqslant x \leqslant S_2(t), \ 0 \leqslant t \leqslant \nu\}$. Определим $n+1$ приближение для функции $x = \Psi(t)$ как решение $x = \Psi_{m+1}(t) \in C^m[0, \nu]$ уравнения

$$d^m\Psi_{n+1}/dt^m = H(\Psi_{n+1}(t), \Psi_{n+1}^{(1)}(t), \ldots, \Psi_{n+1}^{(m+1)}(t), t, u_n^-(\Psi_n(t), t),$$
$$u_n^+(\Psi_n(t), t)) \tag{19}$$

с начальными условиями (6). Из свойств функций H, $u_n^\mp$, Ψ_n и оценок леммы 2 следует, что такое решение существует, единственно и по теореме сравнения [10] удовлетворяет оценке (9).

Вектор-функцию $u_{n+1}(x, t) \in C^1(G_{n+1}^-(\nu)) \cap C^1(G_{n+1}^+(\nu))$ по аналогии с $u_0(x, t)$ определим как решение системы (1) с начальными условиями (2), граничными условиями (3) и условиями на линии $x = \Psi_{n+1}(t)$

$$u_{j,n+1}(\Psi_{n+1}(t) \mp 0, t) = R_j^\mp(\Psi_{n+1}(t), \Psi_{n+1}^{(1)}(t), \ldots, \Psi_{n+1}^{(m-1)}(t),$$
$$t, u_{n+1}^-(\Psi_{n+1}(t), t), u_{n+1}^+(\Psi_{n+1}(t), t)), \quad j \in J^\mp. \tag{20}$$

Интегрируя уравнения системы (1) и дифференциальную систему первого порядка, эквивалентную уравнению (19), получаем

$$u_{i,n}(x,t)=Q_i(x_i^n,\tau_i^n)+\int\limits_{\tau_i^n}^{t}F_i(x,w,u_n(x,w))\big|_{x=\varphi_i^n(w)}dw, \tag{21}$$

$$\Psi_n^{(m-1)}(t)=\alpha_{m-1}+\int\limits_0^t H(\Psi_n(w),\Psi_n^{(1)}(w),\ldots,\Psi_n^{(m-1)}(w),w,u_{n-1}^{-}(\Psi_{n-1}(w),w),\; u_{n-1}^{+}(\Psi_{n-1}(w),w))\,dw, \tag{22}$$

$$\Psi_n^{(k)}(t)=\alpha_k+\int\limits_0^t\Psi_n^{(k+1)}(w)\,dw,\quad k=0,1,2,\ldots,m-2, \tag{23}$$

где

$$Q_i(x_i^n,\tau_i^n)=\begin{cases}\gamma_i(x_0)\ \text{при}\ \tau_i^n=0,\quad x_0\in[a_1,a_2];\\ R_i^k(\tau_i^n,u_n^k(S_k(\tau_i^n),\tau_i^n))\ \text{при}\ \tau_i^n\neq 0,\quad i\in J^k,\quad x_i^n=S_k(\tau_i^n),\\ \qquad\qquad k=1,2;\\ R_j^{\mp}(\Psi_n(\tau_i^n),\Psi_n^{(1)}(\tau_i^n),\ldots,\Psi_n^{(m-1)}(\tau_i^n),\tau_i^n,u_n^{-}(\Psi_n(\tau_i^n),\tau_i^n),\\ u_n^{+}(\Psi_n(\tau_i^n),\tau_i^n))\ \text{при}\ \tau_i^n\neq 0,\quad i\in J^{\mp},\quad x_i^n=\Psi_n(\tau_i^n),\quad i\in I,\end{cases}$$

(x_i^n,τ_i^n) — точка пересечения характеристики системы (1), удовлетворяющей уравнению

$$d\Phi_i^n/dt=\lambda_i(\Phi_i^n(t),t,u_n(\Phi_i^n(t),t)),\quad i\in I, \tag{24}$$

и условию $\Phi_i^n(t)=x$ с одной из линий $x=S_k(t)$, $k=1,2$, $x=\Psi_n(t)$ при τ_i^n, $0\leqslant\tau_i^n\leqslant t\leqslant\nu$, $n=0,1,2,3,\ldots$.

Для любых $(x,t),(x',t)\in G(\nu)$ имеем

$$|u_{i,n+1}(x,t)-u_{i,n}(x,t)|\leqslant|u_{i,n+1}(x,t)-u_{i,n}(x',t)|+|u_{i,n}(x',t)-u_{i,n}(x,t)|\leqslant$$
$$\leqslant|u_{i,n+1}(x,t)-u_{i,n}(x',t)|+N_3(\nu)|x'-x|. \tag{25}$$

Пусть точки (x',t), (x,t) выбраны так, что характеристики $x=\Phi_i^{n+1}(t)$, $x=\Phi_i^n(t)$, проходящие через точки (x,t) и (x',t) соответственно, пересекают одну из границ областей $G_{n+1}^{\mp}(\nu)$ и $G_n^{\mp}(\nu)$ соответственно при $\tau_i^{n+1}=\tau_i^n=\tau_i$. Тогда, вычитая из интегрального представления для $u_{i,n+1}(x,t)$ представление для $u_{i,n}(x',t)$, получаем

$$|u_{i,n+1}(x,t)-u_{i,n}(x',t)|\leqslant|Q_i(x_i^{n+1},\tau_i)-Q_i(x_i^n,\tau_i)|+$$
$$+\int\limits_{\tau_i}^{t}K_1\left[\sum_{i\in I}|u_{i,n+1}(\Phi_i^{n+1}(w),w)-u_{i,n}(\Phi_i^n(w),w)|+|\Phi_i^{n+1}(w)-\Phi_i^n(w)|\right]dw. \tag{26}$$

Далее, интегрируя (24) для $x=\Phi_i^{n+1}(t)$ и $x=\Phi_i^n(t)$ и вычитая полученные выражения одно из другого, находим

$$|x-x'|\leqslant|\eta_i^{n+1}(\tau_i)-\eta_i^n(\tau_i)|+\int\limits_{\tau_i}^{t}K_2\left[\sum_{i\in I}|u_{i,n}(\Phi_i^{n+1}(w),w)-\right.$$
$$\left.-u_{i,n}(\Phi_i^n(w),w)|+|\Phi_i^{n+1}(w)-\Phi_i^n(w)|\right]dw,\quad i\in I. \tag{27}$$

Здесь

$$\eta_i^n(\tau_i)=\begin{cases}x_0\ \text{при}\ \tau_i=0,\\ S_k(\tau_i)\ \text{при}\ i\in J^k,\quad k=1,2,\quad \tau_i\neq 0,\\ \Psi_n(\tau_i)\ \text{при}\ i\in J^-(J^+),\ \text{если}\ x<\Psi_n(t)\ (>\Psi_n(t)),\end{cases}$$

K_1, K_2 — постоянные, зависящие лишь от $N_j(t)$, $j=1,2,3$.

Вычитая из интегральных представлений (22), (23) для вектор-функции $\{\Psi_{n+1}(t), \Psi_{n+1}^{(1)}(t), \ldots, \Psi_{n+1}^{(m-1)}(t)\}$ интегральные представления для $\{\Psi_n(t), \Psi_n^{(1)}(t), \ldots, \Psi_n^{(m-1)}(t)\}$, имеем

$$|\Psi_{n+1}^{(m-1)}(t) - \Psi_n^{(m-1)}(t)| \leqslant \int_0^t K_3 \Big[\|\Psi_{n+1}(\tau) - \Psi_n(\tau)\|_{C^{m-1}[0,w]} + \sum_{i \in I^{\mp}} |u_{i,n}^{\mp}(\Psi_n(w), w) - u_{i,n-1}^{\mp}(\Psi_{n-1}(w), w)| \Big] dw, \tag{28}$$

$$|\Psi_{n+1}^{(k)}(t) - \Psi_n^{(k)}(t)| \leqslant \int_0^t |\Psi_{n+1}^{(k+1)}(w) - \Psi_n^{(k+1)}(w)|\, dw, \quad k = 0, 1, \ldots, m-2, \tag{29}$$

где K_3 — постоянная, зависящая лишь от $N_j(t)$, $j = 1, 2, 3$. Справедливо неравенство

$$|u_{i,n+1}^{\mp}(\Psi_{n+1}(t), t) - u_{i,n}^{\mp}(\Psi_n(t), t)| \leqslant |u_{i,n+1}^{\mp}(\Psi_{n+1}(t), t) - u_{i,n+1}^{\mp}(y_{n+1}^{\mp}(t), t)| + |u_{i,n+1}^{\mp}(y_{n+1}^{\mp}(t), t) - u_{i,n}^{\mp}(y_{n+1}^{\mp}(t), t)| + |u_{i,n}^{\mp}(y_{n+1}^{\mp}(t), t) - u_{i,n}^{\mp}(\Psi_n(t), t)| \leqslant$$
$$\leqslant 2N_3(\nu)\, |\Psi_{n+1}(t) - \Psi_n(t)| + |u_{i,n+1}^{\mp}(y_{n+1}^{\mp}(t), t) - u_{i,n}^{\mp}(y_{n+1}^{\mp}(t), t)|.$$

Здесь $x = y_{n+1}^{\mp}(t)$ — граница областей $G_{n+1}^{\mp}(\nu) \cap G_n^{\mp}(\nu)$.

Введем функции

$$\theta_n^1(t) = \|\Psi_{n+1}(\tau) - \Psi_n(\tau)\|_{C^{m-1}[0,t]}, \qquad \theta_n^2(t) = \max_{G_n(t)} \|u_{n+1}(x, t) - u_n(x, t)\|_{R^n},$$
$$t \in [0, \nu],$$

где $G_n(t) = [G_n^-(t) \cap G_{n-1}^-(t)] \cup [G_n^+(t) \cap G_{n-1}^+(t)]$. Тогда из соотношений (25) — (30) по лемме Гронуолла [9] следует, что $\theta_n^1(t)$, $\theta_n^2(t) \to 0$, $t \in [0, \nu]$, при $n \to \infty$. Значит, при $n \to \infty$ последовательности $\{\Psi_n(t)\}$, $\{u_{i,n}^{\mp}(\Psi_n(t), t)\}$ равномерно при $t \in [0, \nu]$ сходятся к функциям $\Psi(t) \in C^{m-1}[0, \nu]$, $u^{\mp}(\Psi(t), t) \in C^0[0, \nu]$, а последовательность $\{u_{i,n}(x, t)\}$ сходится поточечно к функции $u_i(x, t)$, ограниченной вместе с производными при $(x, t) \in G(\nu)$.

Кроме того, для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\delta(\varepsilon)$ и номер $n(\varepsilon)$ такие, что $|u_i(x, t) - u_i(x', t')| \leqslant |u_i(x, t) - u_{i,n}(x, t)| + |u_{i,n}(x, t) - u_{i,n}(x', t')| + |u_{i,n}(x', t') - u_i(x', t)| \leqslant 3\varepsilon$, $(x', t'), (x, t) \in G^-(\nu), G^+(\nu)$ при $\|(x, t) - (x', t')\|_{R^2} < \delta(\varepsilon)$, $n > n(\varepsilon)$. Таким образом, $u(x, t) \in C^0(G^-(\nu)) \cap C^0(G^+(\nu))$. Далее, переходя к пределу при $n \to \infty$ в уравнении (19), получаем, что функция $\Psi(t) \in C^m[0, \nu]$ является решением задачи (5), (6).

Непрерывная дифференцируемость вектор-функции $u(x, t)$ при $(x, t) \in G^{\mp}(\nu)$ доказывается так же, как это сделано для задачи Коши (см. [9, с. 69, 70]).

Переходя к пределу при $n \to \infty$ в уравнениях, начальных и граничных условиях, находим, что вектор-функция $W(x, t) \equiv \{u(x, t), \Psi(t)\} \in [C^1(G^-(\nu)) \cap C^1(G^+(\nu))] \times C^m[0, \nu]$ является решением задачи (1) — (6).

Единственность построенного решения следует из соотношений вида (25) — (30) и леммы Гронуолла [9].

1. *Курант Д., Фридрихс К.* Сверхзвуковое течение и ударные волны.— М.: Изд-во иностр. лит., 1950.— 426 с.
2. *Вольмир А. С.* Оболочки в потоке жидкости и газа : Задачи аэроупругости.— М. : Наука, 1976.— 347 с.
3. *Вольмир А. С.* Оболочки в потоке жидкости и газа : Задачи гидроупругости.— М. : Наука, 1978.— 352 с.
4. *Hill C. Denson.* A hyperbolic free boundary problem.— J. Math. Anal. and Appl., 1971, **31**, N 1, p. 117—129.
5. *Мельник Т. Е.* Задача типа Стефана для гиперболической системы первого порядка.— Укр. мат. журн., 1982, **34**, № 3, с. 380—384.
6. *Мельник З. О.* Задача с неизвестными границами для гиперболической системы пер-

вого порядка.— В кн.: Уравнения в частных производных и задачи со свободной границей. Киев : Наук. думка, 1983, с. 77—79.
7. *Мельник З. О.* Смешанная задача с неизвестной границей для общего двумерного гиперболического уравнения второго порядка.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1983, № 8, с. 13—15.
8. *Мельник Т. Е.* Двуфазная задача типа Стефана для общего двумерного гиперболического уравнения второго порядка.— В кн.: Уравнения в частных производных и задачи со свободной границей. Киев : Наук. думка, 1983, с. 79—82.
9. *Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н.* Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике.— М. : Наука, 1978.— 687 с.
10. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения.— М. : Наука, 1970.— 575 с.

Горьк. ун-т Получено 25.04.84