УДК 517.928

Б. И. Голец, В. Л. Голец, Р. И. Петришин

Усреднение по быстрым переменным в трехчастотных системах второго приближения

В данной работе исследуются нелинейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений, которые описывают медленные и быстрые движения, вида

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon a(x) + \varepsilon^2 A(x, \varphi), \quad \frac{d\varphi}{dt} = \omega(x) + \varepsilon B(x, \varphi). \tag{1}$$

Здесь n-мерный вектор $x = (x_1, \ldots, x_n)$ принадлежит ограниченной области $\mathscr{D}$ из евклидового пространства R^n; $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \in R^3$; $\varepsilon \in (0, \varepsilon^\circ)$— малый положительный параметр; действительные вектор-функции $A(x, \varphi)$, $B(x, \varphi)$, $a(x)$, $\omega(x)$ принадлежат некоторым классам гладких и 2π-периодических по угловым переменным φ функций в области $D \times R^3 = G_{n+3}$.

По принятой терминологии [1] система (1) является системой второго приближения для колебательной системы более общего вида

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(x, \varphi, \varepsilon), \quad \frac{d\varphi}{dt} = \Phi(x, \varphi, \varepsilon). \tag{2}$$

Для системы (1) мы изучаем вопросы обоснования метода усреднения по всем быстрым переменным φ на временном отрезке $t \in [0, \varepsilon^{-1}]$. Основная трудность, которая возникает при этом, — появление резонансных соотношений между компонентами вектора частот $\omega(x) = (\omega_1(x), \omega_2(x), \omega_3(x))$.

Некоторые результаты по обоснованию метода усреднения для уравнений (2) получены в работах [2 — 9].

Предположим, что F — оператор усреднения, действующий на функцию $f(x, \varphi)$ по закону

$$F[f] = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x, \varphi)\, d\varphi_1 d\varphi_2 d\varphi_3 \equiv \bar{f}(x).$$

Тогда системе (1) поставим в соответствие усредненную систему

$$d\xi/dt = \varepsilon a(\xi) + \varepsilon^2 \overline{A}(\xi),\ d\theta/dt = \omega(\xi) + \varepsilon \overline{B}(\xi), \tag{3}$$
$$\xi(0) = x(0),\ \theta(0) = \varphi(0).$$

Изучим условия применимости и оценку погрешности метода усреднения. Для этого введем следующие обозначения:

$$\Delta(\xi, \varepsilon) = \begin{vmatrix} \omega_1(\xi) & \omega_2(\xi) & \omega_3(\xi) \\ \dot{\omega}_1(\xi) & \dot{\omega}_2(\xi) & \dot{\omega}_3(\xi) \\ \ddot{\omega}_1(\xi) & \ddot{\omega}_2(\xi) & \ddot{\omega}_3(\xi) \end{vmatrix},$$

$$\Delta_1(\xi, \varepsilon) = \omega_2(\xi)\dot{\omega}_3(\xi) - \dot{\omega}_2(\xi)\omega_3(\xi),$$
$$\Delta_2(\xi, \varepsilon) = \omega_1(\xi)\dot{\omega}_3(\xi) - \dot{\omega}_1(\xi)\omega_3(\xi),$$
$$\Delta_3(\xi, \varepsilon) = \omega_1\dot{\omega}_2 - \dot{\omega}_1\omega_2,$$
$$\delta_1(\xi, \varepsilon) = \dddot{\omega}_2\omega_3 - \ddot{\omega}_2\dot{\omega}_3,\quad \delta_2(\xi, \varepsilon) = \dddot{\omega}_1\omega_3 - \dddot{\omega}_1\omega_3,$$
$$\delta_3(\xi, \varepsilon) = \dddot{\omega}_1\omega_2 - \dddot{\omega}_1\omega_2.$$

Здесь производные по времени от функций $\omega_j(\xi)$, $j = 1, 2, 3$, вычисляются в силу усредненной системы (3).

Пусть $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ и $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ — целочисленные векторы с неотрицательными компонентами. Для таких векторов рассмотрим множества $C_\varphi^p(G_{n+3})$ $(C_x^p(G_{n+3}))$ скалярных функций $g(x, \varphi)$, непрерывных вместе со своими частными производными $D_\varphi^\alpha g(x, \varphi)$ $(D_x^\beta g(x, \varphi))$, $|\alpha| \leqslant p$ $(|\beta| \leqslant p)$ в области G_{n+3}. Здесь p — целое неотрицательное число, $|\alpha| = \sum\limits_{i=1}^{3} |\alpha_i|$, $|\beta| = \sum\limits_{i=1}^{m} |\beta_i|$, $D_\varphi^\alpha g(x, \varphi) = \dfrac{\partial^{|\alpha|} g(x, \varphi)}{\partial\varphi_1^{\alpha_1}\partial\varphi_2^{\alpha_2}\partial\varphi_3^{\alpha_3}}$, $D_x^\beta g(x, \varphi) = \dfrac{\partial^{|\beta|} g(x, \varphi)}{\partial x_1^{\beta_1} \ldots \partial x_n^{\beta_n}}$. Совокупность функций $g(x, \varphi) \in C_\varphi^p(G_{n+3})$ $(g(x, \varphi) \in C_x^p(G_{n+3}))$, для которых

$$\max_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant p} \sup_{G_{n+3}} |D_\varphi^\alpha g| \leqslant \sigma \ \ (\max_{0 \leqslant |\beta| \leqslant p} \sup_{G_{n+3}} |D_x^\beta g| \leqslant \sigma),$$

обозначим через $C_\varphi^p(G_{n+3}, \sigma)$ $(C_x^p(G_{n+3}, \sigma))$. Потребуем, чтобы

$$A_i(x, \varphi) \in C_\varphi^{l_1}(G_{n+3}, \sigma_1) \cap C_x^{\overline{l}_1}(G_{n+3}, \sigma_1),$$
$$B_j(x, \varphi) \in C_\varphi^{l_1}(G_{n+3}, \sigma_2) \cap C_x^{\overline{l}_1}(G_{n+3}, \sigma_2), \tag{4}$$
$$a_i(x) \in C_x^2(\mathscr{D}, \sigma_3),\ \omega_j(x) \in C_x^2(\mathscr{D}, \sigma_4),$$

где $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, 3}$, $B = (B_1, B_2, B_3)$, $A = (A_1, \ldots, A_n)$, $a = (a_1, \ldots, a_n)$, $\sigma_s = \text{const}$, $s = \overline{1, 4}$.

Предположим, что для всех $\xi \in \mathscr{D}$, $\varepsilon \in [0, \varepsilon^0)$ выполняется неравенство

$$|\Delta(\xi, \varepsilon)| \geqslant \varepsilon^3\sigma_5,\ \sigma_5 = \text{const} > 0. \tag{5}$$

Ниже мы покажем, что условие (5) обеспечивает «незастревание» решения исходной системы уравнений в резонансной области.

Возьмем произвольную точку $\xi^0 \in \mathscr{D}$. Из условий (4) и (5) следует, что хотя бы одно из чисел $\Delta_{i_0}(\xi^0, \varepsilon)$, $i_0 = 1, 2, 3$, удовлетворяет неравенству

$$|\Delta_{i_0}(\xi^0, \varepsilon)| \geqslant \frac{\sigma_5\varepsilon}{6n^2\sigma_4(\sigma_3 + \varepsilon_0\sigma_1)^2} = 2\sigma_6\varepsilon.$$

В силу непрерывности функции $\Delta_{i_0}(\xi, \varepsilon)$ в области $\mathscr{D}$ можно утверждать, что существует $\rho = \dfrac{\sigma_6}{6n^3\sigma_4^2(\sigma_3 + \varepsilon_0\sigma_1)^2}$ окрестность точки $\xi^0 : T(\xi^0) = \{\xi : \xi \in \mathscr{D}, \|\xi - \xi^0\| \leqslant \rho\}$, в каждой точке которой

$$|\Delta_{i_0}(\xi, \varepsilon)| \geqslant \sigma_6\varepsilon. \tag{6}$$

Рассмотрим, далее, произвольный ненулевой целочисленный вектор $k = (k_1, k_2, k_3)$.

Лемма 1. *Существуют числа* $l_1^{(k)}, l_2^{(k)}, l_3^{(k)}$, *для которых* $|k_1 l_1^{(k)} - k_2 l_2^{(k)} + k_3 l_3^{(k)}| \geqslant 1$ *и*

$$\varepsilon\sigma_6 \leqslant |\Omega_k(\xi, \varepsilon)| \leqslant \frac{1}{\sigma_6}(8\sigma_4^2 + 3\sigma_6)\,2\sigma_4^2\varepsilon, \tag{7}$$

где $\Omega_k(\xi, \varepsilon) = l_1^{(k)}\Delta_1 - l_2^{(k)}\Delta_2 + l_3^{(k)}\Delta_3$, $\xi \in T(\xi^0)$.

Доказательство. Если $k_{i_0} \neq 0$, то можно положить $l_i^{(k)} = 0$ при $i \neq i_0$ и $l_{i_0}^{(k)} = 1$. Тогда $\Omega_k(\xi, \varepsilon) = \Delta_{i_0}$, поэтому неравенства (7) выполняются. Пусть теперь $k_{i_0} = 0$. Положим $l_i^{(k)} = l_j^{(k)} = 1$, $i \neq i_0$, $j \neq i_0$, при $|k_i| = |k_j|$ и $l_i^{(k)} = 1$, $l_j^{(k)} = 2$, $i \neq i_0$, $j \neq i_0$, при $|k_j| = |k_i|$. В обоих случаях при $l_{i_0}^{(k)} = \dfrac{8}{\sigma_6}\sigma_4$ $|k_1 l_1^{(k)} - k_2 l_2^{(k)} + k_3 l_3^{(k)}| \geqslant 1$ и Ω_k удовлетворяет условию (7). Лемма доказана.

Легко убедиться, что для $i = 1, 2, 3$ выполняются равенства

$$(-1)^{i+1}\Delta(\xi, \varepsilon) = \frac{d^2(k, \omega(\xi))}{dt^2}\,\Delta_i - \frac{d(k, \omega(\xi))}{dt}\,\frac{d\Delta_i}{dt} + (k, \omega(\xi))\,\delta_i. \tag{8}$$

Умножая i-е уравнение в (8) на $l_i^{(k)}$ и складывая эти уравнения, получаем

$$\left|\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{\Omega_k}\,\frac{d(k, \omega)}{dt}\right]\right| \geqslant \frac{\sigma_5\sigma_6^2}{8\sigma_4^4(8\sigma_4^2 + 3\sigma_6)^2}\,\varepsilon. \tag{9}$$

Последнее неравенство имеет место для всех $\xi \in T(\xi^0) \cap \mathscr{D}_\mu^k$ и $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$, где $\varepsilon_1 = \min\left\{\varepsilon^0, \dfrac{\sigma_1}{\sigma_3}\right\}$, $\mu = \dfrac{\sigma_3^{-3}\sigma_4^{-2}\sigma_5\sigma_6}{16n^2(n+1)(3\sigma_6 + 8\sigma_4)}$, $\mathscr{D}_\mu^k = \{\xi : \xi \in \mathscr{D}, |(k, \omega(\xi))| \equiv |k_1\omega_1(\xi) + k_2\omega_2(\xi) + k_3\omega_3(\xi)| \leqslant \mu\}$.

Пусть при $t \in [t_1, t_2] \subset [0, \varepsilon^{-1}]$ решение $(\xi(t); \theta(t))$ усредненной системы (3) не выходит из области $T(\xi^0) \cup \mathscr{D}_\mu^k \times R^3$, а при $t \in [\tau_1, \tau_2]$ — из области $T(\xi^0) \times R^3$. Тогда, в силу (9) на отрезке $[t_1, t_2]$ существует не более одной точки t_0, в которой функция $\dfrac{d}{dt}(k, \omega(\xi(t)))$ обращается в нуль, причем

$$\left|\frac{d}{dt}(k, \omega(\xi(t)))\right| \geqslant \varepsilon^2\,\frac{\sigma_5\sigma_6^3}{8\sigma_4^4(8\sigma_4^2 + 3\sigma_6)^2}\,|t - t_0|. \tag{10}$$

Лемма 2. *За время* $t \in [\tau_1, \tau_2]$ *кривая* $\xi = \xi(t)$ *может войти в область* $\mathscr{D}_{\frac{1}{2}\mu}^k$ *не более чем* σ_7 *раз, где* $\sigma_7 = E\{24n\sigma_3\sigma_4|k|/\mu\} + 1$, $E\{a\}$ — *целая часть числа* a, *а* $|k| = |k_1| + |k_2| + |k_3|$.

Доказательство. Из неравенства (10) следует, что $\xi = \xi(t)$ может войти в область $\mathscr{D}_{\frac{1}{2}\mu}^k$, не выходя из области $\mathscr{D}_\mu^k$, не более чем два раза.

Пусть $|(k, \omega(\xi(\bar{t}_1)))| = \mu$, $|(k, \omega(\xi(\bar{t}_2)))| = \dfrac{1}{2}\mu$, $\bar{t}_2 > \bar{t}_1$. Тогда для $\bar{t}_2 - \bar{t}_1$ получим оценку снизу:

$$\bar{t}_2 - \bar{t}_1 \geqslant \frac{\mu - \frac{1}{2}\mu}{\varepsilon|k|\,6n\sigma_3\sigma_4} = \frac{\mu\varepsilon^{-1}}{12n|k|\sigma_3\sigma_4}.$$

Отсюда находим, что за время $t \in [\tau_1, \tau_2] \subset [0, \varepsilon^{-1}]$ кривая $\xi(t)$ может войти в область $\mathcal{D}^k_{\frac{1}{2}\mu}$ не более чем σ_7 раз.

Лемма 3. *За время* $\Delta t = |t_3 - t_4| \leqslant \nu\varepsilon^{-1}\sigma_8$ *кривая* $\xi = \xi(t)$ *выйдет из каждой резонансной области* $\mathcal{D}^k_{\nu^2}$. *Здесь* $|(k, \omega(\xi(t_3)))| < \nu^2$, $|(k, \omega(\xi(t_4)))| > \nu^2$, $[t_3, t_4] \subset [\tau_1, \tau_2]$, $\sigma_8 = 2 + 32\dfrac{\sigma_4^4(8\sigma_4^2 + 2\sigma_6)^2}{\sigma_5\sigma_6^3}$, $\nu^2 < \mu$.

Доказательство. Пусть $t_4 - t_3 > \sigma_8\nu\varepsilon^{-1}$. Отрезок $[t_3, t_4]$ разобьем на два множества M и N отрезков. Множество M состоит из не более чем одного отрезка, длина которого $2\nu\varepsilon^{-1}$. Множество N состоит из не более чем двух отрезков, на каждом из которых согласно (10) справедливо неравенство

$$\left|\frac{d}{dt}(k, \omega(\xi(t)))\right| \geqslant \varepsilon\nu\frac{\sigma_5\sigma_6}{8\sigma_4^4(8\sigma_4^2 + 3\sigma_6)^2}.$$

Тогда согласно предположению множество N содержит по крайней мере один отрезок $[\bar{t}_3, \bar{t}_4] \subset [t_3, t_4]$ такой, что $\bar{t}_4 - \bar{t}_3 > (\sigma_8/2 - 1)\nu\varepsilon^{-1}$.

С другой стороны

$$2\nu^2 > |(k, \omega(\xi(\bar{t}_4))) - (k, \omega(\xi(t_3)))| = \left|\int_{\bar{t}_3}^{\bar{t}_4}\frac{d}{d\tau}(k, \omega(\xi(\tau)))\,d\tau\right| \geqslant$$

$$\geqslant (\bar{t}_4 - \bar{t}_3)\frac{\sigma_5\sigma_6^3}{8\sigma_4^4(8\sigma_4^2 + 3\sigma_6)^2}\varepsilon\nu,$$

откуда $\bar{t}_4 - \bar{t}_3 < (\sigma_8/2 - 1)\nu\varepsilon^{-1}$.

Получено противоречие. Лемма доказана.

Теорема. *Пусть система уравнений* (1) *такова, что*:

1) *выполняются условия* (4), (5);

2) *решение* $(\xi(t); \theta(t))$ *усредненной системы* (3) *лежит в области* G_{n+3} *вместе со своей* δ*-окрестностью*;

3) $l_1 \geqslant 7$, $\bar{l}_1 \geqslant 4$.

Тогда существуют такие постоянные C *и* $\bar{\varepsilon}$, *что для всех* $t \in [0, \varepsilon^{-1}]$ *и* $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon})$ *имеет место оценка*

$$z(t) \equiv \|x(t) - \xi(t)\| + \varepsilon\|\varphi(t) - \theta(t)\| \leqslant c\varepsilon^{5/4}.$$

Здесь и в дальнейшем под нормой вектора $r = (r_1, \ldots, r_s)$ будем понимать выражение

$$\|r\| = \sum_{i=1}^{s}|r_i|.$$

Доказательство. Из уравнений (1) и (3) находим, что $\forall t \in [0, \varepsilon^{-1}]$

$$x(t) - \xi(t) = \varepsilon\int_0^t[a(x) - a(\xi)]\,d\tau + \varepsilon^2\int_0^t[\bar{A}(x) - \bar{A}(\xi)]\,d\tau +$$

$$+ \varepsilon^2\int_0^t[A(x, \varphi) - \bar{A}(x)]\,d\tau,$$

$$\varepsilon(\varphi(t) - \theta(t)) = \varepsilon\int_0^t[\omega(x) + \varepsilon\bar{B}(x) - \omega(\xi) - \varepsilon\bar{B}(\xi)]\,d\tau +$$

$$+ \varepsilon^2\int_0^t[B(x, \varphi) - \bar{B}(x)]\,d\tau$$

или, применяя лемму Гронуолла—Беллмана, имеем

$$z(t) \leqslant e^{\varepsilon t\sigma_9}\varepsilon^2 \sup_{t\in[0,\varepsilon^{-1}]} \left\| \int_0^t [C(x;\varphi) - \overline{C}(x)]\, d\tau \right\|,$$

где $\sigma_9 = n(n\sigma_3 + 3\sigma_4) + \varepsilon_1 n(n\sigma_1 + 3\sigma_2)$, $C(x;\varphi) = (A(x,\varphi); B(x,\varphi))$, $\overline{C}(x) = (\overline{A}(x); \overline{B}(x))$. Последнее неравенство представим в виде

$$z(t) \leqslant e^{\sigma_9\varepsilon t}\varepsilon^2 \sup_{t\in[0,\varepsilon^{-1}]} \sum_{|k|>0} \left\| \int_0^t C_k(x)\, e^{i(k,\varphi)} d\tau \right\|. \qquad (11)$$

При этом $C_k(x)$ — коэффициенты Фурье функции $C(x,\varphi)$. Оценим теперь каждое слагаемое под знаком суммы в правой части (11). Для этого разобьем временной отрезок $[0,t] \subset [0,\varepsilon^{-1}]$ на части следующим образом. Рассмотрим область $T(\xi(0))$. Пусть $\|\xi(0) - \xi(t_1+0)\| > \rho$, причем при $0 \leqslant t \leqslant t_1$ $\xi(t) \in T(\xi(0))$. Рассмотрим теперь область $T(\xi(t_1))$. Пусть $\|\xi(t_1) - \xi(t_2+0)\| > \rho$, причем при $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ $\xi(t) \in T(\xi(t_1))$ и т. д. Таким образом, $[0,t] = \bigcup_{i=0}^{s-1} [t_i, t_{i+1}]$, $t_0 = 0$, $t_s = t$. При этом $\xi(t) \in T(\xi(t_i))$ при $t_i \leqslant t \leqslant t_{i+1}$. Из (3) и (4) следует, что $s \leqslant n(\sigma_3 + \varepsilon_0\sigma_1)/\rho$. Разобьем отрезок $[t_i, t_{i+1}]$ на два множества: резонансное и нерезонансное. К резонансному множеству отнесем значения τ, для которых $|(k, \omega(\xi(\tau)))| < \nu^2$, а к нерезонансному — все остальные значения времени из отрезка $[t_i, t_{i+1}]$. Согласно леммам 2 и 3 при $\nu^2 < \mu/2$ мера резонансного множества не превышает $\sigma_7\nu\varepsilon^{-1}\sigma_8 \leqslant \sigma_{10}\nu\varepsilon^{-1}|k|$, где $\sigma_{10} = \sigma_8\left(1 + \frac{1}{\mu} 24n\sigma_3\sigma_4\right)$. Тогда

$$\left\| \int_0^t C_k(x)\, e^{i(k,\varphi)} d\tau \right\| \leqslant \sum_{i=0}^{s-1} \left[\sigma_{10}\nu\varepsilon^{-1}|k| \sup_{\mathscr{D}} \left\| C_k(x) \right\| + \right.$$

$$\left. + \left\| \sum_{l=1}^{p_i} \int_{\tau_l^{(i)}}^{\overline{\tau}_l^{(i)}} C_k(x)\, e^{i(k,\varphi)} d\tau \right\| \right]. \qquad (12)$$

При этом каждый из отрезков $[\tau_l^{(i)}, \overline{\tau}_l^{(i)}] \subset [t_i, t_{i+1}]$ принадлежит нерезонансному множеству, а $p_i \leqslant \sigma_{10}|k| + 1 \leqslant |k|(\sigma_{10} + 1)$.

Пусть $t \in [\tau_l^{(i)}, \overline{\tau}_l^{(i)}]$. Применяя формулу интегрирования по частям, получаем

$$\left\| \int_{\tau_l^{(i)}}^{\overline{\tau}_l^{(i)}} C_k(x)\, e^{i(k,\varphi)} d\tau \right\| = \left\| \frac{C_k(x)\, e^{i(k,\varphi)}}{i(k, \omega(x) + \varepsilon B(x,\varphi))} \Bigg|_{\tau_l^{(i)}}^{\overline{\tau}_l^{(i)}} - \right.$$

$$- \int_{\tau_s^{(i)}}^{\overline{\tau}_s^{(i)}} e^{i(k,\varphi)} \left[\frac{\partial C_k}{\partial x} (\varepsilon a(x) + \varepsilon^2 A(x,\varphi)) \frac{1}{(k, \omega(x) + \varepsilon B(x,\varphi)} - \right.$$

$$\left.\left. - C_k(x) \frac{\left(k, \frac{\partial\omega}{\partial x} + \varepsilon\frac{\partial B}{\partial x}\right)(\varepsilon a(x) + \varepsilon^2 A(x,\varphi)) + \left(k, \varepsilon\frac{\partial B}{\partial\varphi}\right)(\omega + \varepsilon B)}{(k, \omega(x) + \varepsilon B(x,\varphi))^2} \right] d\tau \right\|. \qquad (13)$$

В дальнейшем нам понадобится априорная оценка для $\|x(t) - \xi(t)\|$. Из неравенства (11) следует, что $\forall t \in [0, \varepsilon^{-1}]$ имеет место оценка

$$\|x(t) - \xi(t)\| \leqslant e^{\sigma_9} 2(n\sigma_1 + 3\sigma_2)\varepsilon.$$

Из априорной оценки находим, что $\forall\, t\in[0, \varepsilon^{-1}]$ при $6n\sigma_4(n\sigma_1+3\sigma_2)\times e^{\sigma_9}|k|\varepsilon<\frac{\nu^2}{2}$

$$|(k, \omega(x))-(k, \omega(\xi))|<\frac{1}{2}\nu^2.$$

Предположим также, что ε настолько мало, что $\frac{1}{4}\nu^2-\varepsilon|k|3n\sigma_2\geqslant 0$

Тогда $\forall\, t\in[\tau_l^{(i)}, \bar\tau_l^{(i)}]$

$$|(k, \omega(x(t)))|\geqslant\frac{1}{2}\nu^2,$$

$$|(k, \omega(x)+\varepsilon B(x, \varphi))|\geqslant\frac{1}{2}|(k, \omega(x))|\geqslant\frac{\nu^2}{4}.$$

Используя эти замечания, из условия (13) получаем следующее нера венство:

$$\left\|\int\limits_{\tau_l^{(i)}}^{\bar\tau_l^{(i)}} C_k(x)\, e^{i(k,\varphi)}d\tau\right\|\leqslant\frac{8}{\nu^2}\sup_{\mathscr{D}}\|C_k(x)\|+\frac{4}{\nu^2}\sup_{\mathscr{D}}\left\|\frac{\partial C_k}{\partial x}\right\|(n\sigma_3+\varepsilon_0 n\sigma_1)\times$$
$$\times\varepsilon(\bar\tau_l^{(i)}-\tau_l^{(i)})+[n^2(n\sigma_3+3\varepsilon\sigma_2)(\sigma_3+\varepsilon_0\sigma_1)+$$
$$+27\sigma_2(\sigma_4+\varepsilon_0\sigma_2)\,8\sup_{\mathscr{D}}\|C_k(x)\|\,\varepsilon|k|\int\limits_{\tau_l^{(i)}}^{\bar\tau_l^{(i)}}\frac{d\tau}{(k, \omega(\xi))^2}. \qquad (14$$

Как и в работе [9], можно показать, что имеет место оценка

$$\int\limits_{\tau_l^{(i)}}^{\bar\tau_l^{(i)}}\frac{dt}{(k, \omega(\xi))^2}\leqslant\frac{4}{\mu^2}(\bar\tau_l^{(i)}-\tau_l^{(i)})+\sigma_7\sigma_{11}\varepsilon^{-1}\nu^{-3}, \qquad (15$$

где $\sigma_{11}=2+\frac{16}{\sigma_5\sigma_6^3}\sigma_4^4(8\sigma_4^2+3\sigma_6)^2$.

Объединяя, наконец, неравенства (12) — (15), $\forall\, t\in[0, \varepsilon^{-1}]$ выводим неравенство

$$z(t)\leqslant e^{\sigma_9}\varepsilon^2\sum_{0<|k|\leqslant N}\left\{\left[\frac{\nu}{\varepsilon}+\frac{1}{\nu^3}\right]|k|^3\sup_{\mathscr{D}}\|C_k(x)\|\,\sigma_{12}+\right.$$
$$\left.+4n(\sigma_3+\varepsilon_0\sigma_1)\nu^{-2}\sup_{\mathscr{D}}\left\|\frac{\partial C_k}{\partial x}\right\|\right\}\frac{n(\sigma_3+\varepsilon_0\sigma_1)}{\rho}+e^{\sigma_9}\varepsilon\sum_{|k|>N}\sup_{\mathscr{D}}\|C_k(x)\|, \qquad (16)$$

где

$$\sigma_{12}=\sigma_{10}+8\left[\left(2+\frac{1}{\mu}24n\sigma_3\sigma_4\right)(\sigma_{10}+1)\sigma_{11}\sigma_7+\frac{4}{\mu^2}\nu^3\right][n^2(n\sigma_3+$$
$$+3\varepsilon_0\sigma_2)(\sigma_3+\varepsilon_0\sigma_1)+27\sigma_2(\sigma_4+\varepsilon\sigma_2)]+8\nu(1+\sigma_{10}).$$

Известно [1], что

$$\sup_{\mathscr{D}}\|C_k(x)\|\leqslant(n\sigma_1+3\sigma_2)3^{l_1}|k|^{-l_1},\quad |k|>0.$$

Тогда при $l_1\geqslant 4$

$$\sum_{|k|>N}\sup_{\mathscr{D}}\|C_k\|\leqslant(n\sigma_1+3\sigma_2)3^{l_1}\sum_{|k|>N}|k|^{l_1}\leqslant(n\sigma_1+3\sigma_2)3^{l_1}8\sum_{s=N+1}^{\infty}s^{2-l_1}\leqslant$$
$$\leqslant 8(n\sigma_1+3\sigma_2)3^{l_1}\int\limits_N^{\infty}x^{2-l_1}dx=\frac{8(n\sigma_1+3\sigma_2)3^{l_1}}{l_1-3}N^{3-l_1}.$$

При выводе последнего неравенства мы воспользовались тем, что количество m-мерных целочисленных векторов k, норма которых равна s, не превышает $2^m s^{m-1}$ [4].

Аналогично можно показать, что при $l_1 \geqslant 7$, $\bar{l}_1 \geqslant 4$

$$\sum_{0<|k|\leqslant N} |k|^3 \sup_{\mathscr{D}} \| C_k(x) \| \leqslant 8(n\sigma_1 + 3\sigma_2)\, 3^{l_1}\left(1 + \frac{1}{l_1 - 6}\right),$$

$$\sum_{0<|k|\leqslant N} \sup_{\mathscr{D}} \left\| \frac{\partial C_k}{\partial x} \right\| \leqslant 8(n\sigma_1 + 3\sigma_2)\, n 3^{\bar{l}_1}\left(1 + \frac{1}{\bar{l}_1 - 3}\right).$$

Положим $\nu = \varepsilon^{1/4}$, $N = E\{\varepsilon^{-\frac{3}{4(l_1-3)}}\}$, $\bar{\varepsilon} = \min\left\{\varepsilon_0, \frac{\sigma_1}{\sigma_3}, \frac{\mu^2}{4}, (12n\sigma_2)^{\frac{4(l_1-3)}{9-2l_1}},\right.$ $\left.(12n\sigma_4(n\sigma_1 + 3\sigma_2)e^{\sigma_9})^{\frac{4(l_1-3)}{9-2l_1}}, \left(\frac{\delta}{c}\right)^{\frac{4}{5}}\right\}$, $c = e^{\sigma_9}\left[16\sigma_{12}(n\sigma_1 + 3\sigma_2)\, 3^{l_1}\left(1 + \frac{1}{l_1 - 6}\right) + \right.$ $\left. + 32n^2(n\sigma_1 + 3\sigma_2)\, 3^{l_1}(\sigma_3 + \varepsilon_0\sigma_1)\, \varepsilon_0^{1/4}\left(1 + \frac{1}{\bar{l}_1 - 3}\right) + \frac{8(n\sigma_1 + 3\sigma_2)}{l_1 - 3}\, 3^{l_1}\right]$.

Тогда для всех $t \in [0, \varepsilon^{-1}]$, $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon})$, получим оценку

$$z(t) < c\varepsilon^{5/4}.$$

Теорема доказана.

1. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А., Самойленко А. М.* Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике.— Киев : Наук. думка, 1969.— 244 с.
2. *Самойленко А. М.* Об асимптотических разложениях систем нелинейной механики.— В кн.: IX Междунар. конф. по нелинейн. колебаниям, Киев, 30 авг.— 6 сент. 1981 г. : Тез. докл. Киев : Ин-т математики АН УССР, 1981, с. 288-289.
3. *Попова Н. И.* Об усреднении по быстрым переменным в многочастотных системах, допускающих резонансы.— М., 1977.— 30 с.— (Препринт / АН СССР. Ин-т теорет. и эксперим. физики; № 70).
4. *Гребеников Е. А., Рябов Ю. А.* Конструктивные методы анализа нелинейных систем.— М. : Наука, 1979.— 432 с.
5. *Хапаев М. М.* Об усреднении и исследовании на устойчивость в многочастотных системах обыкновенных дифференциальных уравнений.— В кн. : Проблемы математической физики и вычислительной математики. М. : Наука, 1977, с. 298—307.
6. *Арнольд В. И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений.— М. : Наука, 1979.— 304 с.
7. *Нейштадт А. И.* Об усреднении в многочастотных системах.— Докл. АН СССР, 1976, **226**, № 6, с. 1295—1298.
8. *Нехорошев Н. Н.* Экспоненциальная оценка времени устойчивости гамильтоновых систем, близких к интегрируемым.— Успехи мат. наук, 1977, **32**, вып. 6, с. 5—66.
9. *Петришин Р. И.* Усреднение с учетом резонансных соотношений между частотами в колебательных системах. — Укр. мат. журн., 1981, **33**, № 2, с. 262—267.

Черновиц. ун-т | Получено 11.07.84