УДК 519.21

Р. В. Бойко

Поведение ветвящихся процессов с иммиграцией в стимулирующей среде

1. Введение. Статья посвящена изучению асимптотического поведения случайных процессов, описывающих динамику численности системы частиц, в которой интенсивности гибели и малых превращений час-

тиц убывают с ростом количества частиц в системе, что может быть обусловлено стимулирующим воздействием внешней среды. Точнее, рассматривается ветвящийся с переменным режимом с иммиграцией процесс $\eta(t)$, описывающий эволюцию количества частиц в популяции, размножающихся следующим образом.

Если в момент t в популяции существует k, $k > 0$, частиц, то за малый промежуток времени Δt каждая частица независимо от своей предыстории и от других частиц с вероятностью $(\pi_m + r_m k^{-1})\,\Delta t + o(\Delta t)$, $r_m > 0$, превращается в $m = 0, 2, 3, \ldots, N$ частиц, с вероятностью $\pi_m \Delta t + o(\Delta t)$ — в $m > N$ частиц (N — некоторое целое положительное число) и не претерпевает изменения с вероятностью $1 + (\pi_1 + r_1 k^{-1})\,\Delta t + o(\Delta t)$, где $\pi_1 = -\sum\limits_{m\neq 1} \pi_m$, $r_1 = -\sum\limits_{m\neq 1} r_m$. Кроме того, независимо от наличия какого-либо числа частиц, за малый промежуток времени Δt с вероятностью $\delta_m^0 + \omega_m \Delta t + o(\Delta t)$ $\left(\delta_m^n \text{ — символ Кронекера, } \sum\limits_{m=0}^{\infty} \omega_m = 0\right)$ возникает m частиц, которые в дальнейшем размножаются по описанной выше схеме. Положим

$$P_m(t) = P\{\eta(t) = m \mid \eta(0) = 0\}, \quad F(t, z) = \sum_{m=0}^{\infty} z^m P_m(t),$$

$$\psi(z) = \sum_{m=0}^{\infty} z^m \pi_m, \quad \psi(z) = \sum_{m=0}^{N} z^m r_m, \quad w(z) = \sum_{m=0}^{\infty} z^m \omega_m.$$

Чтобы не уменьшать общности рассматриваемой модели, в дальнейшем будем считать $N = \infty$.

Для процесса $\eta(t)$ в настоящей работе доказаны следующие утверждения.

Теорема 1. *Если* $\varphi'(1) < 0$, $\varphi''(1) < \infty$, $m'(1) < \infty$, *то существуют пределы* $\lim\limits_{t\to\infty} P_k(t) = p_k$ *для любых* $k \geqslant 0$ *и*

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k p_k = \int_0^z \exp\left\{-\int_v^z \frac{m(u)\,du}{u\varphi(u)}\right\} \frac{\psi(v)\,dv}{v\varphi(v)} \left(\int_0^1 \exp\left\{-\int_v^1 \frac{m(u)\,du}{u\varphi(u)}\right\} \times \right.$$

$$\left. \times \frac{\psi(v)\,dv}{v\varphi(v)}\right)^{-1}.$$

Теорема 2. *Если* $\varphi'(1) = 0$, $m'(1) < 0$, $\varphi''(1) < \infty$, *то существуют пределы* $\lim\limits_{t\to\infty} P_k(t) = p_k$ *для любых* $k \geqslant 0$ *и*

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k p_k = \frac{m'(1)}{\psi'(1)} \int_0^z \exp\left\{-\int_v^z \frac{m(u)\,du}{u\varphi(u)}\right\} \frac{\psi(v)\,dv}{v\varphi(v)}.$$

Теорема 3. *Если* $\varphi'(1) = 0$, $m'(1) = 0$, $m''(1) < \infty$, $\varphi''(1) < \infty$, *то при* $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$

$$\lim_{t\to\infty} P\{\ln \eta(t) \ln^{-1} t < \alpha\} = \alpha.$$

Теорема 4. *Если* $\varphi'(1) = 0$, $m'(1) > 0$, $\varphi''(1) < \infty$, $m''(1) < \infty$, *то*

$$\lim_{t\to\infty} P\left\{\frac{2\eta(t)}{\varphi''(1)\,t} < x\right\} = \Gamma^{-1}\left(\frac{2m'(1)}{\varphi''(1)}\right) \int_0^x \exp\{-y\}\, y^{2m'(1)/\varphi''(1)-1}\,dy.$$

Теорема 5. *Если* $\varphi'(1) > 0$, $\varphi''(1) < \infty$, $m'(1) < \infty$, *то случайная величина* $\eta(t)\exp\{-\varphi'(1)\,t\}$ *слабо сходится при* $t \to \infty$ *к случайной величине* η, *причем*

$$\lim_{t\to\infty} M \exp\{-s\eta(t)\exp\{-\varphi'(1)t\}\} = M\exp\{-s\eta\} = \exp\left\{\int_0^{f(s)} \frac{m(u)\,du}{u\varphi(u)}\right\} - \\ - \int_1^{f(s)} \frac{\psi(v)}{v\varphi(v)} \exp\left\{\int_1^v \frac{m(u)\,du}{u\varphi(u)}\right\} P_0\left(\int_v^{f(s)} \frac{du}{\varphi(u)}\right) dv,$$

где $f(s)$ — решение уравнения

$$1 - f(s) = s\exp\left\{\int_1^{f(s)} \frac{\varphi(x) - \varphi'(1)(x-1)}{\varphi(x)(x-1)}\,dx\right\},$$

$P_0(t)$ определяется следующим соотношением:

$$\int_0^\infty e^{-st}P_0(t)\,dt = \int_0^q \exp\left\{-s\int_0^v \frac{du}{\varphi(u)} - \int_v^q \left(\frac{m(u)}{u\varphi(u)} - \frac{m(q)}{q(u-q)\varphi'(q)}\right)du\right\} \times \\ \times (q-v)^{\frac{m(q)}{q\varphi'(q)}} \frac{dv}{\varphi(v)} \left(\int_0^q \exp\left\{-s\int_0^v \frac{du}{\varphi(u)} - \right.\right. \\ \left.\left. - \int_v^q \left(\frac{m(u)}{u\varphi(u)} - \frac{m(q)}{q(u-q)\varphi'(q)}\right)du\right\} (q-v)^{\frac{m(q)}{q\varphi'(q)}} \frac{\psi(v)}{v\varphi(v)}\,dv\right)^{-1},$$

$s \geqslant |m(q)|q^{-1}$, q — корень уравнения $\varphi(z) = 0$.

2. Доказательство теоремы 1. Из системы уравнений Колмогорова для переходных вероятностей процесса $\eta(t)$ получаем, что $F(t, z)$ удовлетворяет уравнению:

$$\partial F(t, z)/\partial t = \varphi(z)\,\partial F(t, z)/\partial z + z^{-1}m(z)F(t, z) - z^{-1}\psi(z)P_0(t) \tag{1}$$

с начальным условием $F(0, z) = 1$, $m(z) = \psi(z) + zw(z)$.

Применяя стандартный метод решения уравнения (1), из условия ограниченности функции $F(t, z)$ при $z = 0$ находим

$$\tilde F(s, z) = \exp\left\{s\int_0^z \frac{du}{\varphi(u)}\right\} \int_0^z \exp\left\{-\int_v \frac{m(u)\,du}{u\varphi(u)} - s\int_0^v \frac{du}{\varphi(u)}\right\} \times \\ \times \frac{\psi(v)\tilde P_0(s) - v}{v\varphi(v)}\,dv. \tag{2}$$

Здесь $\tilde F(s, z) = \int_0^\infty e^{-st}F(t, z)\,dt$, $\tilde P_0(s) = \int_0^\infty e^{-st}P_0(t)\,dt$. Условие ограниченности функции $\tilde F(s, 1)$ позволяет записать уравнение для $\tilde P_0(s)$, решая которое, получаем

$$\tilde P_0(s) = \int_0^\infty \exp\left\{-st - \int_{\Phi(t,0)}^1 \frac{m(u)\,du}{u\varphi(u)}\right\} dt \times \\ \times \left(\int_0^\infty \exp\left\{-st - \int_{\Phi(t,0)}^1 \frac{m(u)\,du}{u\varphi(u)}\right\} \frac{\psi(\Phi(t, 0))}{\Phi(t, 0)}\,dt\right)^{-1}, \tag{3}$$

где $\Phi(t, z)$ — решение уравнения $\partial\Phi(t, z)/\partial t = \varphi(z)\,\partial\Phi(t, z)/\partial z$, $\Phi(0, z) = z$. Так как $\eta(t)$ — стохастически непрерывный однородный марковский процесс со четным числом состояний, то по теореме Леви [1] существуют пределы $\lim_{t\to\infty} P_k(t)$, $k \geqslant 0$; поэтому, учитывая, что в условиях теоремы при $t \to \infty$

$1-\Phi(t, z)=O(\exp\{\varphi'(1)t\})$, $|z|<1$ (см. [2, с. 55]), из формулы (3) имеем

$$p_0=\lim_{t\to\infty}P_0(t)=\lim_{s\to 0}s\tilde{P}_0(s)=\left(\int_0^1\exp\left\{-\int_v^1\frac{m(u)\,du}{u\varphi(u)}\right\}\frac{\psi(v)\,dv}{v\varphi(v)}\right)^{-1}. \quad (4)$$

Из формулы (2) следует

$$F(z)=\lim_{t\to\infty}F(t, z)=\lim_{s\to 0}s\tilde{F}(s, z)=p_0\int_0^z\exp\left\{-\int_v^z\frac{m(u)\,du}{u\varphi(u)}\right\}\frac{\psi(v)\,dv}{v\varphi(v)},$$

что вместе с (4) доказывает теорему 1.

Аналогично доказывается теорема 2. Особенность доказательства состоит лишь в том, что представление для $\tilde{P}_0(s)$ в условиях теоремы 2 из формулы (2) получается после несложных тождественных преобразований формулы (2), а при нахождении предела $\lim\limits_{t\to\infty}P_0(t)$ требуется знание асимптотики функции $\Phi(t, 0)$ и асимптотики при $s\to 0$ функции $\tilde{P}_0(s)$, которая находится с помощью абелевой теоремы (см. [3, с. 460]).

3. Доказательство теоремы 3. В условиях доказываемой теоремы для $\tilde{P}_0(s)$ имеет место представление (3), которое после интегрирования по частям и очевидных преобразований можно представить так:

$$\tilde{P}_0(s)=(s-\omega_0)^{-1}\left(1-\int_0^\infty h(t, s)\left(w(\Phi(t, 0)-\omega_0)\,dt\,(s-\omega_0)^{-1}\times\right.\right.$$
$$\left.\left.\times\left(\int_0^\infty h(t, s)\,dt\right)^{-1}\right)^{-1}, \quad (5)$$

где $h(t, s)=\exp\left\{-st-\int\limits_{\Phi(t,0)}^1\frac{m(u)\,du}{u\varphi(u)}\right\}$.

Если через $P_0^0(t)$ обозначить распределение момента первого попадания процесса $\eta(t)$, покинувшего начальное состояние, в нулевое состояние, то

$$P_0(t)=\exp\{\omega_0 t\}+\int_0^t P_0(t-u)\,dP_0^0(u), \quad (6)$$

откуда

$$\tilde{P}_0(s)=(s-\omega_0)^{-1}(1-s\tilde{P}_0^0(s))^{-1},\quad \tilde{P}_0^0(s)=\int_0^\infty\exp\{-st\}P_0^0(t)\,dt. \quad (7)$$

Сравнивая формулы (5), (7), получаем

$$\tilde{P}_0^0(s)=\int_0^\infty h(t, s)(w(\Phi(t, 0)-\omega_0)\,dts^{-1}(s-\omega_0)^{-1}\left(\int_0^\infty h(t, s)\,dt\right)^{-1}. \quad (8)$$

Производя с помощью абелевых теорем асимптотический анализ выражения

$$\int_0^\infty\exp\{-st\}t(1-P_0^0(t))\,dt=-\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s}-\tilde{p}_0^0(s)\right),$$

при $s\to 0$ получаем

$$\int_0^\infty\exp\{-st\}t(1-P_0^0(t))\,dt=-\frac{2w'(1)}{\omega_0\varphi''(1)s}+o\left(\frac{1}{s}\right),$$

откуда согласно тауберовой теореме (см. [3, с. 511]) имеем

$$\int_0^t u(1-P_0^0(u))\,du = -\frac{2w'(1)}{\omega_0\varphi''(1)}\,t + o(t).$$

Из этого соотношения, согласно лемме 2 работы [4], следует, что при $t\to\infty$

$$1-P_0^0(t) = -2w'(1)(\omega_0\varphi''(1)\,t)^{-1} + o(t^{-1}). \tag{9}$$

Учитывая, что $P_0(t)$— решение уравнения восстановления (6), функция $\exp\{\omega_0 t\}$ — непосредственно интегрируема по Риману, из (9) и теоремы 3 работы [5] заключаем: при $t\to\infty$

$$P_0(t) = \varphi''(1)(2w'(1)\ln t)^{-1} + o(\ln^{-1}t). \tag{10}$$

Непосредственной проверкой легко убедиться в том, что функцию $F(t, z)$, как решение уравнения (1), можно представить следующим образом:

$$F(t, z) = r(t, z) - \int_0^t r(v, z)\,\Phi^{-1}(v, z)\,\psi(\Phi(v, z))\,P_0(t-v)\,dv, \tag{11}$$

где $r(t, z) = \exp\left\{\int\limits_z^{\Phi(t,z)} m(u)\,u^{-1}\varphi^{-1}(u)\,du\right\}$. Тогда для произвольного $\alpha\geqslant 0$

$$M\exp\{-s\eta(t)\,t^{-\alpha}\} = F(t, z_t), \tag{12}$$

где $z_t = \exp\{-st^{-\alpha}\}$. Так как в условиях теоремы при $0<s<\infty$, $t\to\infty$

$$\int_0^{z_t}\frac{du}{\varphi(u)} = \frac{2}{\varphi''(1)(1-z_t)}\,(1+o(1)),$$

то из соотношений (см. [2])

$$\Phi(t, z) = \Phi\left(t + \int_0^z\frac{du}{\varphi(u)},\ 0\right),\quad 1-\Phi(t, 0) = 2(\varphi''(1)\,t)^{-1}(1+o(1))$$

следует, что при всех $\alpha>0$

$$1-\Phi(t, z_t) = 2(\varphi''(1)(t+2(\varphi''(1)(1-z_t))^{-1})^{-1}(1+o(1)),\quad \lim_{t\to\infty} r(t, z_t) = 1. \tag{13}$$

Пусть $\alpha\in(0, 1]$. В этом случае

$$\lim_{t\to\infty}\int_{t/2}^t r(v, z_t)\,\psi(\Phi(v, z_t))\,\Phi^{-1}(v, z_t)\,P_0(t-v)\,dv = 0, \tag{14}$$

так как

$$\sup_{t/2\leqslant v\leqslant t} r(v, z_t)\,\psi(\Phi(v, z_t))\,\Phi^{-1}(v, z_t) = O(1/t),\quad \lim_{t\to\infty} t^{-1}\int_0^t P_0(u)\,du = 0$$

в силу оценки (10). Далее, учитывая (10), (13), применяя формулу Тейлора и теорему о среднем, при $t\to\infty$ получаем

$$\int_0^{t/2} r(v, z_t)\,\psi(\Phi(v, z_t))\,\Phi(v, z_t)\,P_0(t-v)\,dv = \varphi''(1)\ln^{-1}t\,(1+o(1))\times$$

$$\times\int_0^{t/2}(\varphi''(1)\,v + 2s^{-1}t^{\alpha})^{-1}dv = (1-\alpha)(1+o(1)). \tag{15}$$

При $\alpha = 0$ из (2), (10) следует

$$\lim_{t\to\infty} M \exp\{-s\eta(t)\} = \lim_{s\to 0} s\tilde{F}(s, z) = 0, \tag{16}$$

поэтому из (11) — (16) при $\alpha \in [0, 1]$ находим $\lim\limits_{t\to\infty} M \exp\{-s\eta(t)\, t^{-\alpha}\} = \alpha$.

Таким образом, для любого $x > 0$, $\alpha \in [0, 1]$ $\lim\limits_{t\to\infty} P\{\eta(t)\, t^{-\alpha} < x\} = \alpha$, что эквивалентно утверждению теоремы 3.

4. Доказательство теоремы 4. Докажем предварительно следующее вспомогательное утверждение.

Лемма. *В условиях теоремы* 4 *при* $t \to \infty$

$$\int_0^\infty P_0(u)\, du = o(t).$$

Доказательство. Из условия ограниченности функции $\tilde{F}(s, z)$, задаваемой равенством (2), получаем следующее представление для $\tilde{P}_0(s)$ в условиях теоремы 4:

$$\tilde{P}_0(s) = \int_0^\infty \rho(s, t)(1 - \Phi(t, 0))^\gamma dt \left(\int_0^\infty \rho(s, t)(1 - \Phi(t, 0))^\gamma\, \psi(\Phi(t, 0))\, \Phi^{-1}(t, 0)\, dt\right)^{-1}, \tag{17}$$

где $\rho(s, t) = \exp\left\{-st - \int\limits_{\Phi(t,0)}^{1} \left(\frac{m(u)}{u\varphi(u)} + \frac{\gamma}{(1-u)}\right) du,\right.$ $\gamma = \frac{2m'(1)}{\varphi''(1)}$.

Пусть $\gamma > 1$, тогда из (17) следует, что при $s \to 0$ $\tilde{P}_0(s) = c_1 + o(1)$, поэтому по тауберовой теореме

$$\int_0^t P_0(u)\, du = c_1 + o(1). \tag{18}$$

При $\gamma = 1$ из (17) получаем, что при $s \to 0$ $\tilde{P}_0(s) = c_2 \ln 1/s + o(\ln 1/s)$. Отсюда

$$\int_0^t P_0(u)\, du = c_2 \ln t + o(\ln t). \tag{19}$$

Аналогично при $\gamma < 1$ из (17) находим, что при $s \to 0$ $\tilde{P}_0(s) = c_3 s^{-(1-\gamma)} \times (1 + o(1))$, откуда следует, что при $t \to \infty$

$$\int_0^t P_0(u)\, du = c_4 t^{1-\gamma}(1 + o(1)), \tag{20}$$

где c_i, $i = \overline{1, 4}$, — некоторые константы. Из соотношений (18) — (20) следует утверждение леммы.

Для доказательства теоремы 4 рассмотрим выражение $M \exp\{-s\eta(t) \times (at)^{-1}\}$, $a = \varphi''(1)/2$, которое в силу формулы (11) может быть записано так:

$$M \exp\{-s\eta(t)(at)^{-1}\} = F(t, z(t)) = r(t, z(t)) -$$

$$- \int_0^t r(v, z(t))\, \Phi^{-1}(v, z(t))\, \psi(\Phi(v, z(t)))\, P_0(t - v)\, dv, \tag{21}$$

где $z(t) = \exp\{-s(at)^{-1}\}$, $P_0(t)$ задана соотношением (17). Так как при $t \to \infty$, $z(t) \to 1$ $\Phi(t, z(t)) \to 1$, то в условиях теоремы 4

$$r(t, z(t)) = \gamma \ln(1 - \Phi(t, z(t)))(1 - z(t))^{-1}(1 + o(1)).$$

Из соотношений (19) получаем $\lim\limits_{t\to\infty} \ln(1-\Phi(t, z(t)))(1-z(t))^{-1} = -\ln(1+s)$, поэтому

$$\lim_{t\to\infty} r(t, z(t)) = (1+s)^{-\gamma}. \tag{22}$$

В силу (16) $\sup\limits_{0\leqslant v\leqslant t} r(t, z(t))\,\psi(\Phi(v, z(t)))\,\Phi(v, z(t)) = O(1/t)$, поэтому из леммы следует

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^\infty r(v, z(t))\,\psi(\Phi(v, z(t))\,\Phi(v, z(t))\,P_0(t-v)\,dv = 0. \tag{23}$$

В силу теоремы непрерывности соотношения (21) — (23) доказывают теорему 4.

5. Доказательство теоремы 5. Рассуждения, аналогичные приведенным выше, позволяют найти представление для $\tilde{P}_0(s)$ в условиях теоремы 5 в таком виде: при $s \geqslant |m(q)|q^{-1}$, где q — наименьший неотрицательный корень уравнения $\varphi(z) = 0$,

$$\tilde{P}_0(s) = \int_0^q \alpha(s, v)(q-v)^\beta \varphi^{-1}(v)\,dv \left(\int_0^q \alpha(s, v)(q-v)^\beta \psi(v)\,v^{-1}\varphi^{-1}(v)\,dv\right)^{-1}, \tag{24}$$

$$\alpha(s, v) = \exp\left\{-s\int_0^v \frac{du}{\varphi(u)} - \int_v^q \left(\frac{m(u)}{u\varphi(u)} - \frac{m(q)}{q(u-q)\varphi'(q)}\right)du\right\},\quad \beta = \frac{m(q)}{q\varphi'(q)}.$$

В условиях теоремы 5 для z, близких к единице, решение уравнения (1) можно записать следующим образом:

$$F(t, z) = \exp\left\{\int_z^{\Phi(t,z)} \frac{m(u)\,du}{u\varphi(u)}\right\} - \int_z^{\Phi(t,z)} \frac{\psi(v)}{v\varphi(v)} \exp\left\{\int_z^v \frac{m(u)\,du}{u\varphi(u)}\right\} \times$$
$$\times P_0\left(\int_v^{\Phi(t,z)} \frac{du}{\varphi(u)}\right)dv. \tag{25}$$

Здесь функция $P_0(t)$ определяется соотношением (24). Известно (см. [2, с. 80]), что в условиях теоремы

$$\lim_{t\to\infty} \Phi(t, z(t)) = f(s),\quad z_t = \exp\{-s\exp\{-\varphi'(1)\,t\}\},$$

где $f(s)$ — функция, удовлетворяющая уравнению

$$1 - f(s) = s\exp\left\{\int_1^{f(s)} \frac{\varphi(x) - \varphi'(1)(x-1)}{\varphi(x)(x-1)}\,dx\right\},$$

а так как $M\exp\{-s\eta(t)\exp\{-\varphi'(1)\,t\}\} = F(t, z_t)$, то в силу ограниченности и непрерывности функций в (25) получаем

$$\lim_{t\to\infty} M\exp\{-s\eta(t)\exp\{-\varphi'(1)\,t\}\} = \exp\left\{\int_1^{f(s)} \frac{m(u)\,du}{u\varphi(u)}\right\} -$$
$$- \int_1^{f(s)} \frac{\psi(v)}{v\varphi(v)} \exp\left\{\int_1^v \frac{m(u)\,du}{u\varphi(u)}\right\} P_0\left(\int_v^{f(s)} \frac{du}{\varphi(u)}\right)dv.$$

Теорема доказана.

1. *Levy P.* Sustems Markoviens et stationnaires. Cas denombrable.— Ann. sci. Ecole norm. supér., 1954, 69, p. 327—363.
2. *Севастьянов Б. А.* Ветвящиеся процессы.— М. : Наука, 1971.— 436 с.
3. *Doetsch G.* Handbuch der Laplase-transformations.— Berlin, 1951.— Bd 1, 581 S.

4. *Бойко Р. В.* Об асимптотике вероятности вырождения ветвящегося процесса с переменным режимом (критический случай).— В кн.: Исследования по теории случайных процессов. Киев : Ин-т математики АН УССР, 1976, с. 21—30.
5. *Erickson K. B.* Strong renewal theorems with infinite mean.— Trans. Amer. Math. Soc., 1970, **51**, N1, p. 263—291.

Ин-т математики АН УССР, Киев Получено 15.06.83