УДК 517.91/.93+517.95+517.97

Н. А. Бобылев

Разрешимость краевых задач и признаки минимума интегральных функционалов

1. Постановка задачи. Рассмотрим интегральный функционал

$$F(u) = \int_{\Omega} f(x, u, u_x)\, dx, \quad u|_{\partial\Omega} = 0 \tag{1}$$

и предположим, что он имеет единственную экстремаль $u_*(x)$, т. е. функция $u_*(x)$ является решением задачи Дирихле для уравнения Эйлера

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dx_i} f_{p_i} - f_u = 0, \quad u|_{\partial\Omega} = 0. \tag{2}$$

В ряде задач важно знать, является ли экстремаль $u_*(x)$ точкой минимума функционала (1). В общем случае для ответа на этот вопрос необходимы дополнительные конструкции.

В настоящей работе устанавливается неожиданный, как представляется автору, факт — из условий многих известных теорем (см., например, [1 — 4]) о существовании у задачи (2) единственного решения $u_*(x)$ без дополнительных предположений вытекает, что $u_*(x)$ реализует локальный минимум функционала (1). Анализу связи теорем существования и единственности для задачи (2) с признаками минимума функционала (1) посвящена эта работа.

Для простоты будем считать, что Ω — ограниченная звездная относительно нуля в R^n область, $\partial\Omega \in C^\infty$, а интегрант $f(x, u, p)$, $x \in \overline{\Omega}$, $u \in R^1$, $p \in R^n$, трижды непрерывно дифференцируем по совокупности переменных и регулярен:

$$\sum_{i,j=1}^{n} f_{p_i p_j} \xi_i \xi_j > 0, \quad x \in \overline{\Omega}, \quad u \in R^1, \quad p \in R^n, \quad |\xi| = 1.$$

2. Основная теорема. Положим

$$\Omega(\lambda) = \{x \in R^n : x = \lambda y,\ y \in \Omega,\ 0 < \lambda \leqslant 1\}.$$

Краевую задачу (2) назовем *правильной*, если при каждом $\lambda \in (0, 1]$ задача

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dx_i} f_{p_i} - f_u = 0, \quad u\,|_{\partial\Omega(\lambda)} = 0 \tag{3}$$

имеет единственное классическое решение $u(x; \lambda)$, $x \in \overline{\Omega}(\lambda)$, причем

$$\sup_{0 < \lambda \leqslant 1} \| u(x; \lambda) \|_{C^1(\overline{\Omega}(\lambda))} \leqslant M_0 < \infty \tag{4}$$

(норма в пространстве $C^1(\bar{G})$, где G — ограниченная область в R^n, определяется равенством $\| u \|_{C^1(\overline{G})} = \max\limits_{x \in \overline{G}} | u(x) | + \max\limits_{x \in \overline{G}} | u_x(x) |$).

Теорема 1. *Пусть краевая задача* (2) *правильна. Тогда ее решение* $u_*(x) = u(x; 1)$ *реализует слабый локальный минимум функционала* (1).

Доказательство этой теоремы будем проводить для $n \geqslant 3$ (при $n = 1, 2$ оно упрощается).

3. Вспомогательные утверждения. Рассмотрим трижды непрерывно дифференцируемую по совокупности переменных функцию $f^0(x, u, p)$, $x \in \overline{\Omega}$, $u \in R^1$, $p \in R^n$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$f^0(x, u, p) = f(x, u, p), \quad x \in \overline{\Omega}, \quad |u| + |p| \leqslant M_0 + 1, \tag{5}$$

$$\left\{\begin{aligned} & |f^0| \leqslant C(1 + u^2 + |p|^2), \\ & |f_u^0| + \sum_{i=1}^{n} (|f_{p_i}^0| + |f_{u x_i}^0|) + \sum_{i,j=1}^{n} |f_{p_i x_j}^0| \leqslant C(1 + |u| + |p|), \\ & |f_{uu}^0| + \sum_{i=1}^{n} |f_{u p_i}^0| + \sum_{i,j=1}^{n} |f_{p_i p_j}^0| \leqslant C, \\ & \sum_{i,j=1}^{n} f_{p_i p_j}^0 \xi_i \xi_j \geqslant \alpha \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2, \end{aligned}\right. \tag{6}$$

где $x \in \overline{\Omega}$, $u \in R^1$, $p \in R^n$, α и C — положительные постоянные.

Пусть $C_1^0(\overline{\Omega})$ — банахово пространство непрерывно дифференцируемых на $\overline{\Omega}$ функций $u(x)$, принимающих нулевые значения на $\partial\Omega$; норма в $C_1^0(\overline{\Omega})$

индуцируется нормой в $C^1(\overline{\Omega})$. Рассмотрим в $C_1^0(\overline{\Omega})$ функционал

$$F_0(u) = \int_\Omega f^0(x, u, u_x)\,dx, \quad u \in C_1^0(\overline{\Omega}).$$

Лемма 1. *Функционалы $F(u)$ и $F_0(u)$ совпадают на шаре $\| u \|_{C_1^0(\overline{\Omega})} \leqslant \leqslant M_0 + 1$.*

Доказательство следует из равенства (5).

Рассмотрим пространство Соболева $H_1^0(\Omega)$ функций $u(x) \in L_2(\Omega)$, имеющих нулевой след на $\partial\Omega$ и обобщенные производные $u_{x_i} \in L_2(\Omega)$. Скалярное произведение в $H_1^0(\Omega)$ определяется равенством

$$(u, v)_{H_1^0(\Omega)} = \int_\Omega (u_x, v_x)\,dx.$$

Рассмотрим на $H_1^0(\Omega)$ зависящий от параметра $\lambda \in (0, 1]$ функционал

$$F_0(u; \lambda) = \int_\Omega f^0(\lambda x, u, \lambda^{-1}u_x)\,dx, \quad u \in H_1^0(\Omega).$$

В силу оценок (6) при каждом $\lambda \in (0, 1]$ функционал $F_0(u; \lambda)$ дифференцируем на $H_1^0(\Omega)$; при этом функционал $F_0(u; \lambda)$ и его градиент $\nabla_u F_0(u; \lambda)$ непрерывны по λ равномерно относительно u из каждого шара в $H_1^0(\Omega)$ и градиент $\nabla_u F_0(u; \lambda)$ удовлетворяет условию Липшица на каждом шаре пространства $H_1^0(\Omega)$.

Лемма 2 [5]. *При каждом $\lambda \in (0, 1]$ градиент $\nabla_u F_0(u; \lambda)$ функционала $F_0(u; \lambda)$ обладает (S)-свойством: если последовательность $u_n \in H_1^0(\Omega)$ слабо сходится к $u_0 \in H_1^0(\Omega)$ и*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,(\nabla_u F(u_n; \lambda), u_n - u_0)_{H_1^0(\Omega)} \leqslant 0,$$

то

$$\lim_{n\to\infty} \| u_n - u_0 \|_{H_1^0(\Omega)} = 0.$$

Рассмотрим функцию $v(x; \lambda) = u(\lambda x; \lambda)$, $x \in \overline{\Omega}$. При каждом $\lambda \in (0, 1]$ функция $v(x; \lambda)$ является экстремалью функционала

$$F(u; \lambda) = \int_\Omega f(\lambda x, u, \lambda^{-1}u_x)\,dx, \quad u \in C_1^0(\overline{\Omega}).$$

Так как в силу равенства (5) функционалы $F(u; \lambda)$ и $F_0(u; \lambda)$ совпадают на замыкании области

$$G(\lambda) = \{u \in C_1^0(\overline{\Omega}) : \max_{x\in\overline{\Omega}} |u(x)| + \lambda^{-1} \max_{x\in\overline{\Omega}} |u_x(x)| < M_0 + 1\},$$

а $v(x; \lambda) \in G(\lambda)$, то при каждом $\lambda \in (0, 1]$ функция $v(x; \lambda)$ будет экстремалью функционала $F_0(u; \lambda)$.

Лемма 3. *Существует такое $\lambda_0 \in (0, 1]$, что экстремаль $v_0(x) = = v(x; \lambda_0)$ функционала $F_0(u; \lambda_0)$ реализует его минимум в пространстве $H_1^0(\Omega)$.*

Доказательство. Поскольку при каждом $\lambda \in (0, 1]$ функция $v(x; \lambda)$ является экстремалью функционала $F_0(u; \lambda)$, то при каждом $h \in H_1^0(\Omega)$ $(\nabla_u F_0(v(x; \lambda); \lambda), h)_{H_1^0(\Omega)} = 0$. Поэтому

$$F_0(v(x; \lambda) + h; \lambda) - F_0(v(x; \lambda); \lambda) = \frac{1}{2}\int_\Omega \lambda^{-2} \sum_{i,j=1}^n \tilde{f}^0_{p_ip_j} h_{x_ix_j}\,dx +$$

$$+ \int_\Omega \left(\lambda^{-1}h \sum_{i=1}^n \tilde{f}^0_{p_iu} h_{x_i} + \frac{1}{2}\tilde{f}^0_{uu} h^2\right) dx,$$

где

$$\widetilde{f}^0_{p_ip_j} = f^0_{p_ip_j}(\lambda x,\ v(x;\lambda)+\theta h,\ \lambda^{-1}(v_x(x;\lambda)+\theta h_x)),$$

$$\widetilde{f}^0_{p_iu} = f^0_{p_iu}(\lambda x,\ v(x;\lambda)+\theta h,\ \lambda^{-1}(v_x(x;\lambda)+\theta h_x)),$$

$$\widetilde{f}^0_{uu} = f^0_{uu}(\lambda x,\ v(x;\lambda)+\theta h,\ \lambda^{-1}(v_x(x;\lambda)+\theta h_x)),\quad 0<\theta(x)<1.$$

Из оценок (6) и неравенства

$$\|h\|_{L_2(\Omega)} \leqslant a_0(\operatorname{mes}\Omega)^{1/n}\|h\|_{H^0_1(\Omega)},\quad h\in H^0_1(\Omega),$$

(см., например, [4]) получаем

$$F_0(v(x;\lambda)+h;\lambda) - F_0(v(x;\lambda);\lambda) \geqslant \frac{1}{2}(\lambda^{-2}\alpha - \lambda^{-1}C)\|h\|^2_{H^0_1(\Omega)} -$$

$$-\frac{1}{2}C(\lambda^{-1}n+1)\|h\|^2_{L_2(\Omega)} \geqslant \frac{1}{2}(\lambda^{-2}\alpha + \lambda^{-1}C - C(\lambda^{-1}n+1)\times$$

$$\times\ a_0^2(\operatorname{mes}\Omega)^{2/n})\|h\|^2_{H^0_1(\Omega)}.$$

Поэтому если λ_0 настолько мало, что

$$\lambda_0^{-2}\alpha - \lambda_0^{-1}C - C(\lambda_0^{-1}n+1)a_0^2(\operatorname{mes}\Omega)^{2/n} > 0,$$

то в силу последней оценки

$$F_0(v(y;\lambda_0)+h;\lambda_0) - F_0(v(x;\lambda_0);\lambda_0) > 0.$$

Лемма доказана.

Лемма 4 [6]. *Пусть функционал $F_0(u;\lambda)$, $u\in H^0_1(\Omega)$, $\lambda\in[a,b]$, непрерывен на $H^0_1(\Omega)\times[a,b]$, дифференцируем по u, а его градиент $\nabla_u F_0(u;\lambda)$ непрерывен на $H^0_1(\Omega)\times[a,b]$, при каждом $\lambda\in[a,b]$ удовлетворяет условию Липшица по u и на каждом шаре пространства $H^0_1(\Omega)$ и обладает (S)-свойством. Пусть при каждом $\lambda\in[a,b]$ функционал $F_0(u;\lambda)$ имеет экстремаль $v(x;\lambda)$, которая равномерно изолирована и непрерывна по $\lambda\in[a,b]$. Пусть, наконец, $v(x;a)$ — точка локального минимума функционала $F_0(u;a)$. Тогда $v(x;b)$ — точка локального минимума функционала $F_0(u;b)$.*

4. Доказательство теоремы 1. Установим вначале равномерную по $\lambda\in[\lambda_0,1]$ изолированность экстремали $v(x;\lambda) = u(\lambda x;\lambda)$ функционала $F_0(u;\lambda)$.

Предположим противное. Тогда найдутся последовательности чисел $\lambda_n\in[\lambda_0,1]$ и экстремалей $w_n(x)$ и $v_n(x)=v(x;\lambda_n)$ функционалов $F_0(u;\lambda_n)$ такие, что $w_n(x)\neq v_n(x)$ и

$$\lim_{n\to\infty}\|w_n(x)-v_n(x)\|_{H^0_1(\Omega)} = 0. \tag{7}$$

Поскольку при $\lambda\in[\lambda_0,1]$ интегранты $f^\lambda = f^0(\lambda x, u, \lambda^{-1}p)$ функционалов $F_0(u;\lambda)$ подчинены оценкам

$$|f^\lambda| \leqslant C_1(1+u^2+|p|^2),$$

$$|f^\lambda_u| + \sum_{i=1}^n(|f^\lambda_{p_i}| + |f^\lambda_{ux_i}|) + \sum_{i,j=1}^{n}|f^\lambda_{p_ix_j}| \leqslant C_1(1+|u|+|p|),$$

$$|f^\lambda_{uu}| + \sum_{i=1}^n|f^\lambda_{up_i}| + \sum_{i,j=1}^n|f^\lambda_{p_ip_j}| \leqslant C_1, \tag{8}$$

$$\sum_{i,j=1}^n f^\lambda_{p_ip_j}\xi_i\xi_j \geqslant \alpha_1\sum_{i=1}^n\xi_i^2$$

с положительными константами C_1, α_1, не зависящими от λ, то (см. [4]) $\operatorname{vrai}\max\limits_{x\in\Omega} |w_n(x)| \leqslant M_n$, $n = 1, 2, \ldots$, где константы M_n зависят лишь от C_1, α_1, Ω, $\| w_n \|_{H_1^0(\Omega)}$. Но в силу (4) и (7) $\sup\limits_n \| w_n \|_{H_1^0(\Omega)} < \infty$. Поэтому для некоторого N_0

$$\operatorname{vrai}\max_{x\in\Omega} |w_n(x)| \leqslant N_0, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Но тогда (см. [7]) $w_n(x) \in C^2(\bar{\Omega})$ и

$$\sup_n \| w_n \|_{C^2(\bar{\Omega})} \leqslant N_1. \tag{9}$$

Аналогично, $v_n(x) \in C^2(\bar{\Omega})$ и

$$\sup_n \| v_n \|_{C^2(\bar{\Omega})} \leqslant N_2. \tag{10}$$

Из мультипликативного неравенства [8]

$$\| w_n - v_n \|_{C^1(\bar{\Omega})}^{2+n} \leqslant K \| w_n - v_n \|_{H_1^0(\Omega)}^2 \| w_n - v_n \|_{C^2(\bar{\Omega})}^n,$$

оценок (9), (10) и соотношения (7) вытекает равенство

$$\lim_{n\to\infty} \| w_n - v_n \|_{C^1(\bar{\Omega})} = 0. \tag{11}$$

Поскольку функционалы $F(u; \lambda_n)$ и $F_0(u; \lambda_n)$ совпадают на областях $G_n = \{u \in C_1^0(\bar{\Omega}) : \max\limits_{x\in\bar{\Omega}} |u(x)| + \lambda_n^{-1} \max\limits_{x\in\bar{\Omega}} |u_x(x)| < M_0 + 1\}$, $v_n \in G_n$ и $\inf\limits_{v\in\partial G_n} \| v - v_n \|_{C^1(\bar{\Omega})} \geqslant \beta > 0$, $n = 1, 2, \ldots$, то из равенства (11) следует, что при больших n экстремали w_n функционалов $F_0(u; \lambda_n)$ лежат в G_n и являются экстремалями функционалов $F(u; \lambda_n)$. А так как $w_n \neq v_n$, то мы пришли к противоречию с предположением о единственности экстремалей v_n.

Итак, семейство экстремалей $v(x; \lambda)$ функционала $F_0(u; \lambda)$ изолировано равномерно по $\lambda \in [\lambda_0, 1]$.

Покажем, что функция $v(x; \lambda) : [\lambda_0, 1] \to H_1^0(\Omega)$ непрерывна по λ. Действительно, в силу леммы 3 экстремаль $v(x; \lambda_0)$ реализует локальный минимум функционала $F_0(u; \lambda_0)$. Поэтому (см. [9]) ее топологический индекс относительно поля $\nabla_u F_0(u; \lambda_0)$ равен 1. Но тогда в силу равномерной изолированности по λ топологический индекс каждой экстремали $v(x; \lambda)$ относительно поля $\nabla_u F_0(u; \lambda)$ равен 1. Поэтому функция $v(x; \lambda)$ локально непрерывна по λ и, следовательно, непрерывна на $[\lambda_0, 1]$.

Таким образом, мы установили, что экстремаль равномерно изолирована и непрерывна по $\lambda \in [\lambda_0, 1]$. Так как $v(x; \lambda_0)$ — точка минимума в $H_1^0(\Omega)$ функционала $F_0(u; \lambda_0)$, то по лемме 4 функция $v(x; 1) = u_*(x)$ — точка локального минимума в $H_1^0(\Omega)$ функционала $F_0(u; 1) = F_0(u)$ и, следовательно, точка его слабого минимума. Поскольку в силу (4) $\| u_* \|_{C_1^0(\bar{\Omega})} \leqslant M_0$, а в силу леммы 1 функционалы $F_0(u)$ и $F(u)$ совпадают на шаре $\| u \|_{C_1^0(\bar{\Omega})} \leqslant M_0 + 1$, то функция $u_*(x)$ реализует слабый локальный минимум функционала $F(u)$. Теорема доказана.

5. Одномерные вариационные задачи. Рассмотрим задачу минимизации функционала

$$F(u) = \int_a^b f(x, u, u')\, dx \tag{12}$$

с закрепленными концами: $u(a) = u(b) = 0$. Лагранжиан $f(x, u, p)$, $x \in [a, b]$, $|u|$, $|p| < \infty$, предполагается достаточно гладким и регулярным:

$$f_{pp}(x, u, p) > 0. \tag{13}$$

В классической работе С. Н. Бернштейна [1] приводятся условия, гарантирующие существование экстремали у функционала (12): если уравнение Эйлера функционала (12) приведено к нормальной форме

$$u'' = \varphi(x, u, u'),\ u(a) = u(b) = 0 \tag{14}$$

(здесь $\varphi(x, u, p) = (f_{pp})^{-1}(f_u - f_{xp} - f_{up}p)$) и

$$|\varphi(x, u, p)| \leqslant A(x, u)(1 + p^2), \tag{15}$$

$$\varphi'_u(x, u, p) \geqslant \varepsilon_0 > 0, \tag{16}$$

то функционал (12) имеет единственную экстремаль $u_*(x)$. Оказывается, в условиях теоремы Бернштейна экстремаль $u_*(x)$ реализует сильный локальный минимум функционала $F(u)$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть выполнены оценки* (15), (16). *Тогда экстремаль $u_*(x)$ реализует сильный локальный минимум функционала* (12).

Доказательство. Из оценок (15), (16) следует правильность задачи (14) (см. [10]). Поэтому в силу теоремы 1 ее решение $u_*(x)$ реализует слабый локальный минимум функционала (12). А так как лагранжиан $f(x, u, p)$ функционала (12) удовлетворяет глобальному усиленному условию Лежандра (13), то (см., например, [11]) функция $u_*(x)$ реализует сильный локальный минимум функционала (12). Теорема доказана.

Аналогичные теореме 2 утверждения могут быть доказаны в условиях многих известных признаков разрешимости двухточечной краевой задачи (14) (теоремы Пикара [2], Леттенмейера [3], Нагумо [12] и др.). Например, если

$$|\varphi(x, u_1, p_1) - \varphi(x, u_2, p_2)| \leqslant \alpha|u_1 - u_2| + \beta|p_1 - p_2| \tag{17}$$

и

$$\alpha(b-a)^2/8 + \beta(b-a)/2 < 1, \tag{18}$$

то (см. [2]) функционал (12) имеет единственную экстремаль $u_*(x)$.

Теорема 3. *Пусть выполнены оценки* (17), (18). *Тогда экстремаль $u_*(x)$ реализует сильный локальный минимум функционала* (12).

Доказательство этого утверждения аналогично доказательству теоремы 2.

6. Многомерные вариационные задачи. Уравнение Эйлера для функционала (1) представим в виде

$$\sum_{i,j=1}^{n} f_{p_ip_j} u_{x_ix_j} + A(x, u, u_x) = 0,\quad u|_{\partial\Omega} = 0,$$

где $A(x, u, p) = \sum\limits_{i=1}^{n} f_{p_ix_i} + \sum\limits_{i=1}^{n} p_i f_{up_i} - f_u$. Предположим, что функции $f_{p_ip_j}$ не зависят от u и

$$A_u(x, u, p) \leqslant \varepsilon_1 < 0. \tag{19}$$

Тогда при некотором $M > 0$

$$\operatorname{sign} u A(x, u, 0) \leqslant 0,\quad |u| > M. \tag{20}$$

Пусть при $x \in \overline{\Omega}$, $|u| \leqslant M$, $|p| < \infty$ выполнены неравенства

$$\nu(1 + |p|)^{m-2} \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \leqslant \sum_{i,j=1}^{n} f_{p_ip_j}\xi_i\xi_j \leqslant \mu(1 + |p|)^{m-2} \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2, \tag{21}$$

$$|f_u| + \sum_{i=1}^{n} (|f_{up_i}| + |f_{p_i}|)(1 + |p|) + \sum_{i,j=1}^{n} |f_{p_ix_j}| \leqslant \mu(1 + |p|)^m.$$

Здесь μ, ν — положительные постоянные, а $m > 1$. Как показано в [4], условия (20), (21) гарантируют существование по крайней мере одного классического решения $u(x; \lambda)$ каждой краевой задачи семейства (3). Условие (19) обеспечивает единственность этого решения. При этом решения $u(x; \lambda)$ задач (3) подчинены оценке (4) и поэтому краевая задача (2) правильна. В силу теоремы 1 ее решение $u_*(x)=u(x; 1)$ реализует слабый локальный минимум функционала (1). Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть выполнены оценки* (19), (21). *Тогда экстремаль* $u_*(x)$ *функционала* (1) *реализует его слабый минимум.*

7. Дополнительные замечания. Предположения о звездности области Ω несущественны для справедливости теоремы 1. Достаточно, чтобы область Ω гладко стягивалась по себе к области сколь угодно малой меры. При этом условие $\partial\Omega \in C^\infty$ можно заменить условием $\partial\Omega \in C^{2+\alpha}$.

Теорема 1 переносится на случай, когда область определения функционала (1) составляют функции с другими граничными условиями (задача Неймана и смешанная краевая задача). Для одномерных краевых задач теорема 1 распространяется и на случай функционалов, зависящих от старших производных.

Конструкция стягивания области Ω, аналогичная изложенной в п. 2, использовалась Смейлом [13] в задаче вычисления индекса Морса самосопряженных эллиптических операторов.

Теоремы 2—4 по известным схемам могут быть использованы для обоснования применимости методов типа «наискорейшего спуска» в задаче приближенного отыскания экстремалей интегральных функционалов вариационного исчисления.

1. *Бернштейн С. Н.* Об уравнениях вариационного исчисления.— М. : Физматгиз, 1960.— 439 с.— (Собр соч.; Т. 3).
2. *Picard É.* Lecons sur quelques problémes aux limites de la théorie des équations differentielles.— Paris : Gauthier-Villars, 1930.— 210 p.
3. *Lettenmeyer F.*— Deutsch. Math., 1942, N 7, p. 56—74.
4. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа.— М. : Наука, 1973.— 538 с.
5. *Скрыпник И. В.* Нелинейные эллиптические уравнения высшего порядка.— Киев : Наук. думка, 1973.— 218 с.
6. *Бобылев Н. А.* О деформации функционалов, имеющих единственную критическую точку.— Мат. заметки, 1983, **34**, вып. 3, с. 387—398.
7. *Воинов Ю. Н.* Ограниченность градиентов обобщенных решений краевых задач для квазилинейных эллиптических уравнений вблизи границы.— Вестн. Ленингр. ун-та, 1974, вып. 2, № 7, с. 4—11.
8. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения.— М. : Наука, 1978.— 455 с.
9. *Красносельский М. А., Бобылев Н. А., Мухамадиев Э. М.* О топологическом индексе экстремалей функционалов классического вариационного исчисления.— Докл. АН ТаджССР, 1978, **21**, № 8, с. 8—12.
10. *Бобылев Н. А.* О двухточечной краевой задаче.— Дифференц. уравнения, 1975, **11**, № 12, с. 2121—2133.
11. *Лаврентьев М. М., Люстерник Л. А.* Основы вариационного исчисления.— М.; Л. : ОНТИ, 1935.— Т. 1. Ч. 2. 538 с.
12. *Nagumo M.* Ueber die Differentialgleichung $y'' = f(x, y, y')$.— Proc. Phys.-Math. Soc. Jap., 1937, N 19/3, p. 861—866.
13. *Smale S.* On the Morse index theorem.— J. Math. and Mech., 1965, **14**, N 6, p. 1049—1055.

Ин-т пробл. упр. АН СССР, Москва

Получено 15.03.84