УДК 519.21

С. В. Белоусова

Время ожидания при критической загрузке для приоритетных систем с полумарковским обслуживанием

1. В работе найдены предельные распределения условного и виртуального времен ожидания начала обслуживания вызова для систем $M_N \mid G_N \mid 1 \mid \infty$ с полумарковским обслуживанием. Задача асимптотического анализа систем обслуживания в условиях критической загрузки первоначально была рассмотрена Ю. В. Прохоровым [1], затем в различных постановках в работах [2—4] и др. Анализу моделей с полумарковским обслуживанием посвящены публикации [5, 7 — 9].

Рассматривается система, состоящая из одного прибора обслуживания, в которую поступают N независимых пуассоновских потоков вызовов с параметрами $a_1, a_2, \ldots, a_N$. Длительности обслуживания вызовов в совокупности независимы. Длительность времени обслуживания вызовов k-го потока есть случайная величина (сл. в.) β_k с функцией-матрицей распределения

$$Q_k(x) = \{Q_{ij}^k(x)\}, \quad i, j = 1, \ldots, L,$$

где $Q_{ij}^k(x)$ — вероятность того, что время обслуживания вызова k-го приоритета i-го типа будет меньше x и сменится обслуживанием типа j. Обслуживание вызовов управляется вложенной цепью Маркова (ВЦМ) $\{\varkappa_n, n \geqslant 0\}$, не зависящей от приоритета обслуживаемого вызова с матрицей переходных вероятностей $P = Q_k(+\infty)$, $k = 1, \ldots, N$. Предполагается, что ВЦМ имеет стационарное распределение $q = (q_1, \ldots, q_L)$ и Π — ее стационарный проектор (см. [6, с. 98]). Допускается неограниченная очередь. Первым на обслуживание из очереди поступает вызов более высокого приоритета. Приоритет k-го потока выше, чем r-го, если $k < r$. Порядок обслуживания вызовов внутри приоритета прямой. В данной работе рассматривается система с относительным приоритетом, т. е. при поступлении вызова более высокого приоритета не прерывается обслуживание вызова более низкого приоритета.

Введем некоторые обозначения: сл. в. $\bar{\omega}_k$ — стационарное условное время ожидания; $\varkappa_\infty$ — стационарное значение ВЦМ; R — обобщенная обратная матрица к $I - P$ [6, с. 71] (I — единичная матрица),

$$A_k = \int_0^\infty x Q_k(dx) = \{m_{ij}^k\},$$

$$H_k = \int_0^\infty x^2 Q_k(dx) = \{\sigma_{ij}^k\}, \quad i, j = 1, \ldots, L,$$

$$\mathscr{A}_k = \sum_{r=1}^k a_r A_r, \quad \delta_k \Pi = \Pi \mathscr{A}_k R \mathscr{A}_k \Pi,$$

$$m_k = \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^L q_i m_{ij}^k, \quad \sigma_k = \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^L q_i \sigma_{ij}^k,$$

$$\widetilde{Q}_k(s) = \int_0^\infty Q_k(dx) e^{-sx}, \quad \lambda_k = \sum_{r=1}^k, \quad k = 1, \ldots, N.$$

Загрузка системы вызовами 1-го, ... , k-го приоритетов определяется формулой $\rho_k = \sum_{r=1}^{k} a_r m_r$.

Положим $\varepsilon = 1 - \rho_k$. Каждому ε поставим в соответствие модель $M_N^\varepsilon \mid G_N^\varepsilon \mid 1$ (все величины и функции соответствующей модели снабжены индексом ε).

2. Теорема 1. *Если* $a_r^\varepsilon \to a_r$, $\sigma_r^\varepsilon \to \sigma_r$, $r = 1, \ldots, k$, $a_l^\varepsilon H_l^\varepsilon \to 0$, $l = k + 1, \ldots, N$, *при* $\varepsilon \downarrow 0$; $\widetilde{Q}_l(s)\widetilde{Q}_r(s) = \widetilde{Q}_r(s)\widetilde{Q}_l(s)$, $l, r = 1, \ldots, N$,

$$\widetilde{Q}_r(s) = P - sA_r + \left(\frac{1}{2}s^2 + o(s^2)\right)H_r \tag{1}$$

для малых s, *то*

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} P\{\varepsilon\bar{\omega}_k^\varepsilon > x;\ \varkappa_\infty = n\} = q_n \exp\left\{-x\left(\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{k} a_r\sigma_r + \delta_k\right)^{-1}\right\}.$$

Замечание. Формулировка теоремы упрощается при $\delta_k = 0$. Это выполняется, если

а) $\sum_{j=1}^{L} a_r^\varepsilon m_{ij}^{\varepsilon r} \leqslant 1$, $r = 1, \ldots, k$, $i = 1, \ldots, L$;

б) $\mathscr{A}_k \to \Pi$ (или P) при $\varepsilon \downarrow 0$;

в) $\mathscr{A}_k$ и Π перестановочны.

Для доказательства теоремы необходимы две леммы.

Лемма 1. *Пусть сл. в.* π_k — *k-период, начинающийся с прихода в свободную систему вызова приоритета k или выше и заканчивающийся освобождением системы от вызовов приоритета k и выше;* $\varkappa_{(\pi_k)}$ — *значение ВЦМ в момент завершения k-периода;*

$$\pi_k(s) = \{M[e^{-s\pi_k};\ \varkappa_{(\pi_k)} = i/\varkappa_0 = j]\}, \quad i, j = 1, \ldots, L.$$

Тогда

$$\pi_k(s) = \sum_{r=1}^{k} \frac{a_r}{\lambda_k}\widetilde{Q}_r((s + \lambda_k)I - \lambda_k\pi_k(s)). \tag{2}$$

Доказательство. Распределение k-периода не зависит от порядка обслуживания вызова внутри периода, поэтому можно объединить k первых потоков в один и рассмотреть бесприоритетную систему с параметрами

$$a = \sum_{r=1}^{k} a_r, \quad \widetilde{Q}(s) = \sum_{r=1}^{k}\frac{a_r}{\lambda_k}\widetilde{Q}_r(s).$$

Для такой системы период занятости определен в [5] и его распределение будет совпадать с распределением k-периода.

Лемма 2. *Пусть* $0 < 1 - \rho_N$. *Преобразование Лапласа — Стилтьеса (ПЛС) от функции распределения условного времени ожидания начала обслуживания вызова k-го приоритета имеет вид*

$$\Omega_k(s) = \left\{sD_0 + \sum_{l=k+1}^{N} D_l\widetilde{Q}_l(s)\right\}\left[(s - \lambda_k)I + \sum_{r=1}^{k} a_r\widetilde{Q}_r(s)\right]^{-1},$$
$$D_0\Pi = (1 - \rho_N)\Pi, \quad D_lA_l\Pi = a_lm_l\Pi, \quad l = k + 1, \ldots, N. \tag{3}$$

Доказательство. Рассмотрим сл. в. $\bar{\omega}_k(t)$ — время, которое бы ждал вызов k-го приоритета, пришедший в систему в момент t, до начала своего обслуживания при условии, что после t вызовы в систему не поступали. Верно стохастическое равенство

$$\overline{\omega}_k(t) = \left\{\sum_{r=0}^{k}\sum_{n=1}^{\gamma_r(t-x)} \beta_{r(n)} - t + \chi\right\}\mathcal{I}_0(x) + \sum_{l=k+1}^{N}\left\{\sum_{r=1}^{k}\sum_{n=1}^{\gamma_r(t-x)} \beta_{r(n)} + \beta_l - t + \eta\right\} \times$$

$$\times \mathcal{I}_l(u)\,\mathcal{I}(\beta_l > v-u), \quad x\in[0,t), \quad \chi\in dx, \quad u\in[0,t), \quad \eta\in du, \quad v\in[u,\infty),$$

где $\mathcal{I}_0(x)$— индикатор события {система свободна в момент x}; $\mathcal{I}_l(x)$— индикатор события {в момент x начался обслуживаться вызов l-го приоритета}; сл. в. $\gamma_r(t)$— число вызовов r-го приоритета, пришедших в систему за время t.

Обоснование формулы следующее. В момент t либо не закончился k-период, начавшийся в момент x, когда система была свободна и вызов k-го приоритета будет ждать начала своего обслуживания до тех пор, пока не обслужатся вызовы 1-го, ..., k-го приоритетов, пришедших до него;

либо не закончился k-период, начавшийся после того, как обслужился вызов l-го приоритета, поступивший на обслуживание в момент u и до момента v еще не обслужившийся; вызов k-го приоритета будет ждать начала обслуживания до тех пор, пока не обслужатся все вызовы приоритета k и выше, пришедшие до него, и вызов l-го приоритета.

Рассмотрим

$$\Omega_{dj}^{k}(s,t) = M\,[e^{-s\overline{\omega}_k(t)};\ \varkappa_{(\overline{\omega}_k)} = j/\varkappa_0 = d] = \sum_{i=1}^{L} P_{di}^{0}(0)\ \times$$

$$\times M\left[\exp\left\{-s\sum_{r=1}^{k}\sum_{n=1}^{\gamma_r(t)}\beta_{r(n)} + st\right\};\ \varkappa_{(\overline{\omega}_k)} = j/\varkappa_0 = i\right] + \sum_{i=1}^{L}\int_0^t P_{di}^{0}(x)\ \times$$

$$\times M\left[\exp\left\{-s\sum_{r=1}^{k}\sum_{n=1}^{\gamma_r(t-x)}\beta_{r(n)} + st\right\};\ \varkappa_{(\overline{\omega}_k)} = j/\varkappa_{(x)} = i\right] de^{-sx} +$$

$$+\sum_{i=1}^{L}\sum_{m=1}^{L}\sum_{l=k+1}^{N}\int_0^t\int_u^\infty P_{di}^{l}(u) M\,[e^{-s\beta_l}\mathcal{I}\,[\beta_l > v-u);\ \varkappa_{(\beta_l)} = m/\varkappa_{(u)} = i]\ \times$$

$$\times\ M\left[\exp\left\{-s\sum_{r=1}^{k}\sum_{n=1}^{\gamma_r(t-u)}\beta_{r(n)} + st\right\};\ \varkappa_{(\overline{\omega}_k)} = j/\varkappa_{(\beta_l)} = i\right] dv de^{-su}.$$

Здесь

$$P_{di}^{l}(x) = M\,[\mathcal{I}_l(x);\ \varkappa_{(x)} = i/\varkappa_0 = d], \quad \{P_{di}^{0}(0)\} = pI, \quad l = 0,\ k+1, \ldots, N,$$

p — начальное распределение ВЦМ,

$$M\left[\exp\left\{-s\sum_{r=1}^{k}\sum_{n=1}^{\gamma_r(t)}\beta_{r(n)}\right\};\ \varkappa_{(\overline{\omega}_k)} = j/\varkappa_0 = i\right] = M\prod_{r=1}^{k}\sum_{n_r\geqslant 0}\left[\exp\left\{-s\sum_{n=1}^{n_r}\beta_{r(n)}\right\};\right.$$

$$\left.\varkappa_{(\overline{\omega}_k)} = j/\varkappa_0 = i\right]\frac{(a_r t)^{n_r}}{n_r!}e^{-a_r t} = e^{-\lambda_k t}\prod_{r=1}^{k}\sum_{n_r\geqslant 0}\frac{(a_r t)^{n_r}}{n_r!}\sum_{j_1,\ldots,j_{\theta-1}=1}^{L}\widetilde{Q}_{ij_1}^{1}(s)\ldots$$

$$\ldots\widetilde{Q}_{j_{n_1-1}j_{n_1}}^{1}(s)\ldots\widetilde{Q}_{j_{\theta-1}j}^{k}(s), \quad \theta = \sum_{r=1}^{k} n_r.$$

В матричной форме это выражение принимает вид

$$e^{-\lambda_k t}\prod_{r=1}^{k}\sum_{n_r\geqslant 0}\frac{(a_r t)^{n_r}}{n_r!}(\widetilde{Q}_r(s))^{n_r} = \exp\left\{-\lambda_k tI + \sum_{r=1}^{k} a_r\widetilde{Q}_r(s)\,t\right\}\times$$

$$\times \int_u^\infty M\,[e^{-\beta_l s}\mathcal{I}(\beta_l > v-u);\ \varkappa_{(\beta_l)} = d/\varkappa_{(u)} = i]\,dv =$$

$$= \int_u^\infty e^{-s(v-u)}\,(P_{id} - Q_{id}^l(v-u))\,dv = s^{-1}\,(P_{id} - \widetilde{Q}_{id}^l(s)).$$

ПЛС от функции распределения условного времени ожидания имеет вид

$$\Omega_k(s,\ t) = \{\Omega_{dj}^k(s,\ t)\} = pe^{V(s)t} - s\int_0^t P_0(x)\,e^{V(s)(t-x)}dx -$$

$$-\sum_{l=k+1}^N \int_0^t P_l(x)\,(P - \widetilde{Q}_l(s))\,e^{V(s)(t-x)}dx, \quad V(s) = (s-\lambda_k)\,I + \sum_{r=1}^k a_r\widetilde{Q}_r(s). \qquad (4)$$

Умножим справа обе части равенства (4) на матрицу $\exp\{-(\Lambda + V(s))\,t\}$ и проинтегрируем по t (Λ — произвольная матрица). Получим ПЛС в точке $\Lambda + V(s)$ функции $\Omega_k(s,\ t)$. Выберем Λ так, чтобы $\Lambda + V(s) = \mu I,\ \mu > 0$, и рассмотрим $\lim\limits_{\mu\to 0}\mu\widetilde{\Omega}_k(s,\ \mu I) = \Omega_k(s)$ — стационарное распределение условного времени ожидания. При $\mu \to 0,\ \Lambda \to -V(s)$ получим

$$\Omega_k(s) = \left\{sD_0 + \sum_{l=k+1}^N D_l\,(P - \widetilde{Q}_l(s))\right\}V^{-1}(s), \quad D_l = \lim_{\mu\to 0}\mu\int_0^\infty P_l(x)\,e^{-\mu x}dx\,,$$

$$l = 0,\ k+1,\ \ldots,\ N.$$

Найдем D_l. Рассмотрим

$$\Omega_k(0) = \{M\,[\varkappa_{(\overline{\omega}_k)} = j/\varkappa_0 = i]\} = MP^\nu,$$

сл. в. ν — число вызовов, обслуженных до начала обслуживания вызова, время ожидания которого исследуем, или

$$\Omega_k(0) = \left[D_0 + \sum_{l=k+1}^N D_lA_l\right]\lim_{s\to 0} s\left[\lambda_k\,(I-P) + s\left(I - \sum_{r=1}^k d_rA_r\right)\right]^{-1}.$$

Находя обратную матрицу методом обращения операторов на спектре [6, с. 78], получаем

$$MP^\nu = \left[D_0 + \sum_{l=k+1}^N D_lA_l\right](1-\rho_k)^{-1}\,\Pi,$$

или

$$\left[D_0 + \sum_{l=k+1}^N D_lA_l\right]\Pi = (1-\rho_k)\,\Pi.$$

Отсюда можно получить (3).

Доказательство теоремы 1. ПЛС распределения условного времени ожидания в точке εs при малых $\varepsilon > 0$ равномерно по $s \in [0,\ S],\ 0 < S < \infty$, преобразуется к виду

$$\Omega_k(\varepsilon s) = \left[\varepsilon s\left(D_0 + \sum_{l=k+1}^N D_lA_l\right) + (\varepsilon^2 s^2 + o\,(\varepsilon^2))\sum_{l=k+1}^N \frac{1}{2}D_lH_l\right]\times$$

$$\times\left\{-\lambda_k\,(I-P) + \varepsilon s\,(I - \mathcal{A}_k) + (\varepsilon^2 s^2 + o\,(\varepsilon^2))\sum_{r=1}^k a_rH_r\right\}^{-1}.$$

Обратную матрицу найдем методом обращения операторов на спектре

[6, с. 95]:

$$\left\{-\lambda_k(I-P)+(\varepsilon s(I-\mathcal{A}_k)-\varepsilon^2 s\Pi)+\varepsilon^2 s\Pi+\frac{1}{2}\varepsilon^2 s\sum_{r=1}^{k}a_r H_r\right\}^{-1}=$$
$$=(\varepsilon^{-2}\Delta^{-1}+o(\varepsilon^{-2}))\,\Pi,$$

$$\Delta\Pi=s\Pi+\frac{1}{2}s^2\Pi\sum_{r=1}^{k}a_r H_r\Pi+s^2\Pi\mathcal{A}_k R\mathcal{A}_k\Pi=s\left(1+\frac{1}{2}s\sum_{r=1}^{k}a_r\sigma_r+s\sigma_r\right)\Pi,$$

$$\Omega_k(\varepsilon s)=(\varepsilon^2 s+o(\varepsilon^2))(\varepsilon^{-2}\Delta^{-1}+o(\varepsilon^{-2}))\,\Pi\xrightarrow[\varepsilon\downarrow 0]{}\Delta^{-1}\Pi.$$

Так как n-й столбец матрицы $\Omega_k(\varepsilon s)$ задает $M[e^{-s\varepsilon\bar{\omega}_k};\ \varkappa_\infty=n]$, то последнее предельное соотношение доказывает теорему.

3. Теперь рассмотрим виртуальное время ожидания начала обслуживания вызова k-го приоритета, $\omega_k(t)$ — время, которое бы ждал вызов приоритета k до начала своего обслуживания, пришедший в систему в момент t. Пусть также ω_k— стационарное виртуальное время ожидания; R_0— обобщенная обратная матрица к $I-\bar{Q}_k(\lambda_{k-1}(I-\pi_{k-1}(0)))$;

$$\delta\Pi=(1-\rho_{k-1})\,a_k^2\Pi F_k R_0 F_k\Pi,$$

$$F_r=\int_0^\infty Q_r(dt)\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-t\lambda_{k-1})^n}{\lambda_{k-1}n!}\{(I-\lambda_{k-1}\pi'_{k-1}(0))(I-\pi_{k-1}(0))^{n-1}+\ldots$$
$$\ldots+(I-\pi_{k-1}(0))^{n-1}(I-\lambda_{k-1}\pi'_{k-1}(0))\}.$$

Т е о р е м а 2. *Если выполняются условия теоремы 1 и*

$$\frac{a_k^\varepsilon\sigma_k^\varepsilon}{1-\rho_{k-1}}\to\sigma,\quad \delta^\varepsilon\to\delta,\quad \frac{1}{1-\rho_{k-1}}\sum_{l=k+1}^{N}a_l^\varepsilon H_l^\varepsilon\Pi\to 0,$$

$$\sum_{r=1}^{k-1}\frac{1}{1-\rho_{k-1}}a_r^\varepsilon H_r^\varepsilon\Pi\to 0,\quad \mathcal{A}_{k-1}\Pi\to\Pi$$

при $\varepsilon\downarrow 0$; *для малых* s

$$\pi_{k-1}(s)=\pi_0-s\pi_1+\left(\frac{1}{2}s^2+o(s^2)\right)\pi_2, \tag{5}$$

то

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}P\{\varepsilon\omega_k^\varepsilon>x,\ \varkappa_\infty=n\}=q_n\exp\{-x(\sigma+\delta)^{-1}\}.$$

Для доказательства теоремы необходима следующая лемма.

Л е м м а 3. *ПЛС от функции распределения стационарного виртуального времени ожидания при* $1-\rho_N>0$ *имеет вид*

$$\Omega_k^*(s)=\Big\{D_0((s+\lambda_{k-1})I-\lambda_{k-1}\pi_{k-1}(s))+\sum_{l=k+1}^{N}D_l[P-\widetilde{Q}_l((s+\lambda_{k-1})I-$$
$$-\lambda_{k-1}\pi_{k-1}(s))]\Big\}\{(s+a_k)I-a_k\widetilde{Q}_k((s+\lambda_{k-1})I-\lambda_{k-1}\pi_{k-1}(s))\}^{-1}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Верно следующее стохастическое равенство:

$$\omega_k(t)=\bar{\omega}_k(t)+\sum_{r=1}^{k}\sum_{n=1}^{\nu_r(\bar{\omega}_k(t))}\pi_{k-1(n)}.$$

Виртуальное время ожидания будет складываться из условного времени ожидания и времени, необходимого для обслуживания тех вызовов $(k-1)$-го приоритета и выше, которые пришли после момента t.

Рассмотрим

$$\Omega_{ij}^{*k}(t, s) = M[e^{-s\omega_k(t)}; \varkappa_{(\omega_k)} = j/\varkappa_0 = i] =$$

$$= M[e^{-s\bar{\omega}_k(t)} \prod_{r=1}^{k-1} \sum_{n_r \geq 0} M_{\bar{\omega}_k(t)} \exp\left\{-s \sum_{n=1}^{n_r} \pi_{k-1(n)}\right\} \times$$

$$\times \frac{(a_r\bar{\omega}_k(t))^{n_r}}{n_r!} e^{-a_r\bar{\omega}_k(t)}; \varkappa_{(\omega_k)} = j/\varkappa_0 = i] = \sum_{d=1}^{L} M\left[\exp\left\{-(s+\lambda_{k-1})\bar{\omega}_k(t)\right\} \times\right.$$

$$\left.\times \prod_{r=1}^{k} \sum_{n_r \geq 0} \sum_{j_1,\ldots,j_{\theta-1}=1}^{L} \pi_{dj_1}^{k-1}(s) \ldots \pi_{j_{\theta-1}j}^{k-1}(s); \varkappa_{(\bar{\omega}_k)} = d/\varkappa_0 = i\right], \quad \theta = \sum_{r=1}^{k-1} n_r.$$

В матричной форме имеем

$$\Omega_k^*(s, t) = \{\Omega_{ij}^{*k}(s, t)\} = \Omega_k((s+\lambda_{k-1})I - \lambda_{k-1}\pi_{k-1}(s), t).$$

Стационарное виртуальное время ожидания

$$\Omega_k^*(s) = \Omega_k((s+\lambda_{k-1})I - \lambda_{k-1}\pi_{k-1}(s)).$$

Отсюда получаем (6).

Доказательство теоремы 2. С учетом (1) и (5) $\Omega_k^*(s)$ в точке εs при малых $\varepsilon > 0$ равномерно по $s \in [0, S]$, $0 < S < \infty$, преобразуется к виду

$$\Omega_k^*(\varepsilon s) = \left\{D_0\left[\lambda_{k-1}(I-\pi_0) + \varepsilon s(I + \lambda_{k-1}\pi_1) - \frac{\varepsilon^2 s^2}{2}\lambda_{k-1}\pi_2\right] +\right.$$

$$\left.+ \sum_{l=k+1}^{N} D_l[P - \tilde{Q}_l(\lambda_{k-1}(I-\pi_0)) - \varepsilon s F_l - \varepsilon^2 s^2 G_l]\right\}\{a_k(I - \tilde{Q}_k(\lambda_{k-1}(I-\pi_0)) +$$

$$+ \varepsilon s(I - a_k F_k) - (\varepsilon^2 s^2 + o(\varepsilon^2))G_k\}^{-1},$$

где

$$G_r = \int_0^\infty \tilde{Q}_r(dt)\left\{\sum_{n\geq 1} \frac{(-t)^n}{n!}[CT^{n-1} + \ldots + T^{n-1}C] + \sum_{n\geq 2} \frac{(-t)^n}{n!}[V^2T^{n-2} + \ldots\right.$$

$$\left.\ldots + VT^{n-2}V + \ldots + T^{n-2}V^2]\right\}, \quad T = \lambda_{k-1}(I-\pi_0), \quad V = I + \lambda_{k-1}\pi_1,$$

$$C = \frac{1}{2}\lambda_{k-1}\pi_2.$$

Аналогично формуле (2) можно доказать, что

$$h_k(s) = \tilde{Q}_k((s+\lambda_{k-1})I - \lambda_{k-1}\pi_{k-1}(s)),$$

$$h_k(s) = \{M[e^{-sh_k}; \varkappa_{(h_k)} = j/\varkappa_0 = i]\},$$

сл. в. h_k — период времени, начинающийся с прихода в свободную систему вызова k-го приоритета и заканчивающийся освобождением системы от этого вызова и вызовов высших приоритетов. Тогда

$$\tilde{Q}_k(T) = h_k(0) = MP^{\nu},$$

ν — целочисленная сл. в.

Проекционный оператор для $a_k(I - MP^{\nu})$ будет также П. Кроме того, $\Pi\pi_0 = \pi_0\Pi = \Pi$. Обратную матрицу находим также методом обращения операторов на спектре [6, с. 95]:

$$\left\{a_k(I - \widetilde{Q}_k(T)) + \varepsilon s\left(I - a_k F_k - \frac{\varepsilon}{1-\rho_{k-1}}\Pi\right) + \frac{\varepsilon^2 s}{1-\rho_{k-1}}\Pi - \varepsilon^2 s a_k G_k\right\}^{-1} =$$

$$= (\varepsilon^{-2}(1-\rho_{k-1})\Delta_0^{-1} + o(\varepsilon^{-2}))\Pi;$$

$$\Delta_0 = \Pi - (1-\rho_{k-1})\Pi G_k \Pi + (1-\rho_{k-1}) a_k^2 \Pi F_k R_0 F_k \Pi = (1 + s\sigma + s\delta)\Pi.$$

Используя лемму 1, находим V и C. Затем переходим к пределу при $\varepsilon \downarrow 0$ и получаем нужное предельное соотношение

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \Omega_k^*(\varepsilon s) = \Delta_0^{-1}\Pi.$$

1. *Прохоров Ю. В.* Переходные вероятности в процессах массового обслуживания.— Лит. мат. сб., 1963, 3, № 1, с. 199—206.
2. *Боровков А. А.* Вероятностные процессы в теории массового обслуживания.— М.: Наука, 1972.—368 с.
3. *Приоритетные* системы обслуживания / Б. В. Гнеденко, Э. А. Даниелин, Б. Н. Димитров и др.— М.: Изд-во Моск. ун-та, 1973.—446 с.
4. *Гнеденко Б. В., Коваленко И. Н.* Введение в теорию массового обслуживания.— М.: Наука, 1966.—432 с.
5. *Черная М. Ф.* Анализ периода занятости системы с полумарковским обслуживанием.— В кн.: Аналитические методы в теории вероятностей. Киев: Наук. думка, 1979, с. 193—202.
6. *Королюк В. С., Турбин А. Ф.* Полумарковские процессы и их применение.— Киев: Наук. думка, 1976.—178 с.
7. *Белоусова С. В., Королюк В. С.* Функционалы на периоде занятости системы $M|G|1|\infty$.— В кн.: Применение аналитических методов в теории вероятности. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1983, с. 4—11.
8. *Белоусова С. В., Королюк В. С.* Длина очереди при критической загрузке в системе с полумарковским обслуживанием.— В кн.: Предельные теоремы в схеме асимптотического фазового укрупнения. Киев, 1984, с. 16—20. (Препринт / АН УССР, Ин-т математики; 84.16).
9. *Cinlar E.* Time dependence of quenes with semi-Markov services.— J. Appl. Probab., 1967, 4, N 2, p. 356—364.

Киев. ун-т Получено 14.12.84