УДК 517.947

И. П. Фишман

О граничных значениях решений дифференциально-операторных уравнений

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$y^{\mathrm{IV}}(t) - 2A^2 y''(t) + A^4 y(t) = 0, \tag{1}$$

где A — положительный самосопряженный оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$ и нормой $\|\cdot\|$. Для непрерывной на $[0, \infty)$ функции $G(\lambda) > c$ $(0 < c = \mathrm{const})$ обозначим через $\mathfrak{H}'_G$ пополнение $\mathfrak{H}$ по норме $\|f\|_{\mathfrak{H}'_G} = \|G^{-1}(A) f\|$. Положим $\mathfrak{H}'_{e,\delta} = \mathfrak{H}'_{e^{\delta\lambda}}$, $\mathfrak{A}' = \lim\limits_{\delta\to 0} \operatorname{pr} \mathfrak{H}'_{e,\delta}$, $\mathfrak{H}_{-\tau} = \mathfrak{H}'_{1+\lambda^\tau}$ $(-\infty < \tau < \infty)$, $\mathfrak{H}_{-\infty} = \lim\limits_{\tau\to\infty} \operatorname{ind} \mathfrak{H}_{-\tau}$. Очевидно, что при $\tau > 0$

$$\mathfrak{H}'_{e,1} \supset \mathfrak{A}' \supset \mathfrak{H}_{-\infty} \supset \mathfrak{H}_{-\tau}.$$

Обозначим также через $\hat{A}$ замыкание оператора A в пространстве $\mathfrak{H}'_{e,1}$ (см. [1, § 3.1]), E_λ и $\hat{E}_\lambda$ — разложения единицы операторов A и $\hat{A}$ соответственно. Ясно, что $E_\lambda \subset \hat{E}_\lambda$.

Под решением уравнения (1) внутри интервала $(0, \infty)$ будем понимать вектор-функцию $y(t)$, для которой выполняются следующие условия: а) $y(t)$ — четырежды сильно непрерывно дифференцируема в $\mathfrak{H}$ в $(0, \infty)$; б) при каждом $t \in (0, \infty)$ $y''(t) \in \mathscr{D}(A^2)$, $y(t) \in \mathscr{D}(A^4)$; в) $y(t)$ удовлетворяет уравнению (1) в $(0, \infty)$.

Цель этой работы — исследовать граничные значения ограниченных на ∞ решений внутри $(0, \infty)$ уравнения (1) в зависимости от поведения $\| y(t) \|$ в окрестности нуля.

1. Пусть $\gamma(t)$ — положительная непрерывная и суммируемая на $(0, \delta)$ $(0 < \delta < \infty)$ функция, а K_γ — множество решений внутри $(0, \infty)$ уравнения (1), удовлетворяющих условию

$$\int_0^\delta \gamma(t) \| y(t) \|^2 dt < \infty. \tag{2}$$

Лемма 1. *Вектор-функция* $y(t) = t^k e^{-t\hat{A}} f$ $(f \in \mathfrak{A}')$ *удовлетворяет* (2) *тогда и только тогда, когда* $f \in \mathfrak{H}'_{G_k}$, где $G_k^{-2}(\lambda) = \int_0^\delta t^{2k} \gamma(t) e^{-2\lambda t} dt$.

Доказательство следует из равенств

$$\int_0^\delta \gamma(t) \| e^{-t\hat{A}} f \|^2 dt = \int_0^\delta \gamma(t) \int_0^\infty d(E_\lambda t^k e^{-t\hat{A}} f, t^k e^{-t\hat{A}} f) \, dt =$$

$$= \int_0^\delta t^{2k} \gamma(t) \int_0^\infty e^{-2t\lambda} e^{2\lambda} d(\hat{E}_\lambda f, f)_{\mathfrak{H}'_{e,1}} = \int_0^\infty e^{2\lambda} G_k^{-2}(\lambda) \, d(\hat{E}_\lambda f, f)_{\mathfrak{H}'_{e,1}}$$

и леммы 3.2 из [1]. Предположим, что вектор-функция $y(t) \in K_\gamma$ и ограничена на ∞. Как показано в [2],

$$y(t) = e^{-t\hat{A}} f_0 + t e^{-t\hat{A}} f_1 \quad (f_0, f_1 \in \mathfrak{A}') \tag{3}$$

и потому

$$\int_0^\delta \gamma(t) \| y(t) \|^2 dt = \sum_{i,j=0}^{1} \int_0^\infty e^{2\lambda} G_{(i+j)/2}^{-2}(\lambda) \, d(\hat{E}_\lambda f_i, f_j)_{\mathfrak{H}'_{e,1}}. \tag{4}$$

Рассмотрим квадратичную форму $\mathscr{A}(f_0, f_1)(\lambda) = \sum_{i,j=0}^{1} G_{(i+j)/2}^{-2}(\lambda) (f_i, f_j)_{\mathfrak{H}'_{e,1}}$. Ее матрица $\mathscr{A}(\lambda)$ при каждом λ является матрицей Грамма с весом $\gamma(t)$ системы функций $e^{-t\lambda}$, $te^{-t\lambda}$ и, следовательно, положительно определена. Легко видеть, что с помощью невырожденного преобразования $g_0(\lambda) = f_0 - G_{1/2}^{-2}(\lambda) G_0^2(\lambda) f_1$, $g_1(\lambda) \equiv f_1$ она приводится к диагональному виду $\mathscr{B}(\lambda) = \{ b_{ik}(\lambda) \}_{i,k=0}^{1}$, где $b_{00}(\lambda) = G_0^{-2}(\lambda)$; $b_{11}(\lambda) = (G_0^{-2}(\lambda) G_1^{-2}(\lambda) - G_{1/2}^{-4}(\lambda)) \times G_0^2(\lambda)$; $b_{ik}(\lambda) \equiv 0$ $(i \neq k)$, т. е.

$$\mathscr{A}(f_0, f_1)(\lambda) = b_{00}(\lambda) (g_0(\lambda), g_0(\lambda))_{\mathfrak{H}_{e,1}} + b_{11}(\lambda) (f_1, f_1)_{\mathfrak{H}'_{e,1}}. \tag{5}$$

В силу положительной определенности матрицы $\mathscr{A}(\lambda)$

$$b_{00}(\lambda) > 0, \quad b_{11}(\lambda) > 0 \text{ при каждом } \lambda. \tag{6}$$

Учитывая (5), из (4) получаем

$$\int_0^\delta \gamma(t) \| y(t) \|^2 dt = \int_0^\infty e^{2\lambda} b_{00}(\lambda) \, d(\hat{E}_\lambda g_0(\lambda), g_0(\lambda))_{\mathfrak{H}'_{e,1}} +$$

$$+ \int_0^\infty e^{2\lambda} b_{11}(\lambda) \, d(\hat{E}_\lambda f_1, f_1)_{\mathfrak{H}'_{e,1}}$$

$\left(\text{здесь } \int_0^\infty e^{2\lambda} b_{00}(\lambda) \, d(\hat{E}_\lambda g_0(\lambda), g_0(\lambda))_{\mathfrak{H}'_{e,1}} \text{ понимается в смысле [3]} \right)$.

Принимая во внимание (6), заключаем, что (2) равносильно

$$\int_0^\infty e^{2\lambda} b_{00}(\lambda)\, d(\hat{E}_\lambda g_0(\lambda), g_0(\lambda))_{\mathfrak{H}'_{e,1}} < \infty \text{ и } \int_0^\infty e^{2\lambda} b_{11}(\lambda)\, d(\hat{E}_\lambda f_1, f_1)_{\mathfrak{H}'_{e,1}} < \infty.$$

Второе из неравенств в силу леммы 3.2 из [1] эквивалентно включению $f_1 \in \mathfrak{H}'_{b_{11}^{-1/2}(\lambda)}$.

Понятно, что матрицу $\mathscr{A}(\lambda)$ можно привести к диагональному виду и с помощью преобразования $g'_0(\lambda) \equiv f_0$, $g'_1(\lambda) = f_0 + G_{1/2}^{-2}(\lambda)\, G_1^2(\lambda)\, f_1$. Получим $\mathscr{B}_1(\lambda) = \{b'_{ik}(\lambda)\}_{i,k=0}^1$, где $b'_{00}(\lambda) = (G_0^{-2}(\lambda)\, G_1^{-2}(\lambda) - G_{1/2}^{-4}(\lambda))\, G_1^2(\lambda)$, $b'_{11}(\lambda) = G_1^{-2}(\lambda)$, $b'_{ik}(\lambda) \equiv 0$, $i \neq k$. Повторяя предыдущие рассуждения, придем к эквивалентности (2) неравенствам

$$\int_0^\infty e^{2\lambda} b'_{00}(\lambda)\, d(\hat{E}_\lambda f_0, f_0)_{\mathfrak{H}'_{e,1}} < \infty \text{ и } \int_0^\infty e^{2\lambda} b'_{11}(\lambda)\, d(\hat{E}_\lambda g'_1(\lambda), g'_1(\lambda))_{\mathfrak{H}'_{e,1}} < \infty.$$

Первое из неравенств в силу леммы 3.2 из [1] равносильно тому, что в [3] $f_0 \in \mathfrak{H}'_{[b'_{00}(\lambda)]^{-1/2}}$.

В дальнейшем будем обозначать $b'_{00}(\lambda) = b_0(\lambda)$, $b_{11}(\lambda) = b_1(\lambda)$. Поскольку для $f_k \in \mathfrak{H}_{b_k^{-1/2}(\lambda)}$ $(k = 0, 1)$ найдется $h_k \in \mathfrak{H}$: $f_k = [b_k(A)]^{-1/2} h_k$, то

$$\int_0^\delta \gamma(t)\, \| t^k e^{-t\hat{A}} f_k \|^2\, dt = \int_0^\delta \gamma(t)\, \| t^k e^{-t\hat{A}} b_k^{-1/2}(A)\, h_k \|^2\, dt =$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\delta \gamma(t)\, t^{2k} e^{-2\lambda t} dt\, b_k^{-1}(\lambda)\, d(E_\lambda h_k, h_k) = \int_0^\infty G_k^{-2}(\lambda)\, b_k^{-1}(\lambda)\, d(E_\lambda h_k, h_k).$$

Если $G_k^{-2}(\lambda)\, b_k^{-1}(\lambda) = \left(1 - \dfrac{G_0^2(\lambda)\, G_1^2(\lambda)}{G_{1/2}^4(\lambda)}\right)^{-1} < c$ при всех λ, то для $f_k \in \mathfrak{H}'_{b_k^{-1/2}(\lambda)}$ $\int_0^\delta \gamma(t)\, \| t^k e^{-t\hat{A}} f_k \|^2 dt < \infty$ и для таких f_k

$$\int_0^\delta \gamma(t)\, \| y(t) \|^2 dt \leqslant 2 \left(\int_0^\delta \gamma(t)\, \| e^{-t\hat{A}} f_0 \|^2 dt + \int_0^\delta \gamma(t)\, \| t e^{-t\hat{A}} f_1 \|^2 dt \right) < \infty.$$

Тем самым доказано следующее утверждение.

Лемма 2. *Если функция $\gamma(t)$ такова, что*

$$\overline{\lim_{\lambda \to \infty}}\, \frac{G_0^2(\lambda)\, G_1^2(\lambda)}{G_{1/2}^4(\lambda)} < 1, \tag{7}$$

то ограниченное на ∞ решение внутри $(0, \infty)$ уравнения (1) $y(t)$ принадлежит классу K_γ тогда и только тогда, когда $f_k \in \mathfrak{H}'_{b_k^{-1/2}(\lambda)}$.

Замечание 1. В случае невыполнения (7) условия леммы 2 необходимы, но не достаточны.

2. Изучим конкретные случаи $\gamma(t)$.

А. Пусть $\gamma(t) = t^{2a-1}$ $(a > 0)$. Тогда при больших λ

$$b_0(\lambda) \sim \frac{\Gamma(2a)\, \Gamma(2a+2) - \Gamma^2(2a+1)}{\Gamma(2a+2)} (2\lambda)^{-2a},$$

$$b_1(\lambda) \sim \frac{\Gamma(2a)\, \Gamma(2a+2) - \Gamma^2(2a+1)}{\Gamma(2a)} (2\lambda)^{-2(a+1)}.$$

Поскольку $\frac{G_0^2(\lambda)\,G_1^2(\lambda)}{G_{1/2}^4(\lambda)} \sim \frac{\Gamma^2(2a+1)}{\Gamma(2a)\,\Gamma(2a+2)} < 1$, то лемма 2 имеет место при $f_0 \in \mathfrak{H}_{-a}$, $f_1 \in \mathfrak{H}_{-(a+1)}$.

Теорема 1. *Граничные значения при $t \to 0$ ограниченного на ∞ решения внутри $(0, \infty)$ $y(t)$ уравнения (1) и его производной $y'(t)$ лежат в пространствах*

а) $\mathfrak{H}_{-s}$ *и* $\mathfrak{H}_{-(s+1)}$ $(s > 0)$ *соответственно*;

б) $\mathfrak{H}_{-\infty}$

тогда и только тогда, когда

$$\text{а)}\quad \int\limits_0^{\delta} t^{2s-1}\,\|y(t)\|^2 dt < \infty; \tag{8}$$

$$\text{б)}\quad \exists\alpha > 0 : \|y(t)\| \leqslant ct^{-\alpha}\quad (t \in (0, \delta]). \tag{9}$$

Доказательство. а) Пусть выполняется (8). Тогда по лемме 2 $f_0 \in \mathfrak{H}_{-s}$, $f_1 \in \mathfrak{H}_{-(s+1)}$. Отсюда $y(0) = f_0 \in \mathfrak{H}_{-s}$, $y'(0) = -Af_0 + f_1 \in \mathfrak{H}_{-(s+1)}$, так как при $f_0 \in \mathfrak{H}_{-s}$ $Af_0 \in \mathfrak{H}_{-(s+1)}$.

Наоборот, пусть $y(0) = f_0 \in \mathfrak{H}_{-s}$, $y'(0) = -Af_0 + f_1 \in \mathfrak{H}_{-(s+1)}$. Поскольку аналогично предыдущему $Af_0 \in \mathfrak{H}_{-(s+1)}$, то $f_1 = y'(0) + Af_0 \in \mathfrak{H}_{-(s+1)}$. Тогда по лемме 2 справедливо (8).

б) Пусть выполняется (9). Тогда для любого $\varepsilon > 0$

$$\int\limits_0^{\delta} t^{2(\alpha+\varepsilon)-1}\,\|y(t)\|^2 dt \leqslant c_\varepsilon \int\limits_0^{\delta} t^{-(1-2\varepsilon)} dt < \infty.$$

Последнее в силу а) означает, что $f_0 = y(0) \in \mathfrak{H}_{-(\alpha+\varepsilon)}$, а $y'(0) = -Af_0 + f_1 \in \mathfrak{H}_{-(\alpha+1+\varepsilon)}$. Тем самым $y(0)$, $y'(0) \in \mathfrak{H}_{-\infty}$.

Обратно, предположим, что $y(0)$, $y'(0) \in \mathfrak{H}_{-\infty}$. Тогда существуют α_0 и α_1 такие, что $y(0) = f_0 \in \mathfrak{H}_{-\alpha_0}$, $y'(0) = -Af_0 + f_1 \in \mathfrak{H}_{-\alpha_1}$. Возьмем $\alpha_1 \geqslant \alpha_0 + 1$. Тогда $Af_0 \in \mathfrak{H}_{-\alpha_1}$, а значит, и $f_1 \in \mathfrak{H}_{-\alpha_1}$. Поскольку найдутся h_0, $h_1 \in \mathfrak{H}$ такие, что $f_0 = (E + A^{\alpha_0})\,h_0$, $f_1 = (E + A^{\alpha_1})\,h_1$, то для $0 < \delta < \infty$

$$t^{2(\alpha_1-1)}\,\|y(t)\|^2 \leqslant 2t^{2(\alpha_1-1)}\left(\|e^{-t\hat{A}}f_0\|^2 + \|te^{-t\hat{A}}f_1\|^2\right) \leqslant$$

$$\leqslant 2\left(\delta^{2(\alpha_1-\alpha_0-1)} \int\limits_0^{\infty} [e^{-t\lambda}(\lambda^{\alpha_0}+1)\,t^{\alpha_0}]^2 d(E_\lambda h_0, h_0) + \right.$$

$$\left. + \int\limits_0^{\infty} [e^{-t\lambda}(\lambda^{\alpha_1}+1)\,t^{\alpha_1}]^2 d(E_\lambda h_1, h_1)\right) \leqslant 2\left(\delta^{2(\alpha_1-\alpha_0-1)} c_0\,\|h_0\|^2 + c_1\,\|h_1\|^2\right) = c^2.$$

Последнее неравенство имеет место, так как функция $e^{-\lambda t}(\lambda^{\alpha_i}+1)\,t^{\alpha_i} = e^{-\lambda t}(t\lambda)^{\alpha_i} + t^{\alpha_i}e^{-\lambda t}$ ограничена при всех λ и $t \in [0, \delta]$ $(i = 0, 1)$, а $\alpha_1 - \alpha_0 - 1 \geqslant 0$.

Следовательно, $\|y(t)\| \leqslant ct^{-(\alpha_1-1)}$ и неравенство (9) выполняется при $\alpha = \alpha_1 - 1$. Теорема доказана.

Б. Пусть $\gamma(t) = e^{-2at^{-q}}$ $(a, q > 0)$. Обозначим $g(\lambda, t) = 2at^{-q} + 2\lambda t$, $s(\lambda) = (aq)^{1/(q+1)}\lambda^{-1/(q+1)}$ — решение уравнения $g'_t(\lambda, t) = 0$ по t. Ясно, что $s(\lambda) \to 0$ при $\lambda \to \infty$. Очевидно, что

а) для произвольного $\varepsilon \in (0, q/2)$ $t^{2(1+\varepsilon)} g''_t(\lambda, t) = 2aq(q+1)t^{-(q-2\varepsilon)} \to \infty$, $t \to 0$;

б) $g''_t(\lambda, \xi) = g''_t(\lambda, s(\lambda))\,(1 + o(1))$ при $\xi \in [s(\lambda) - s^{1+\varepsilon}(\lambda),\, s(\lambda) + s^{1+\varepsilon}(\lambda)]$, причем $o(1)$ равномерно относительно ξ. Выполнение условий а) и б) обеспечивает выполнение условий теоремы 17.4 из [4]. Тогда при больших

λ и $m \in N$

$$\int_0^{\delta} e^{-g(\lambda,t)} (t - s(\lambda))^m dt \sim$$

$$\sim \begin{cases} 2e^{-\sigma_1 \lambda^{q/(q+2)}} [\sigma_2 \lambda^{(q+2)/(q+1)}]^{-\frac{m+1}{2}} \Gamma((m+1)/2), & m = 2k \\ e^{-\sigma_1 \lambda^{q/(q+1)}} [\sigma_2 \lambda^{(q+2)/(q+1)}]^{-\frac{m+1}{2}} o(1), & m = 2k+1; \end{cases}$$

здесь $\sigma_1 = 2(q+1) a^{1/(q+1)} q^{-q/(q+1)}$, $\sigma_2 = 2(q+1)(aq)^{-1(q+1)}$.

В рассматриваемом случае

$$b_0(\lambda) \sim p_0 e^{-\sigma_1 \lambda^{q/(q+1)}} [\sigma_2 \lambda^{(q+2)/(q+1)}]^{-3/2} \lambda^{2/(q+1)},$$

$$b_1(\lambda) \sim p_1 e^{-\sigma_1 \lambda^{q/(q+1)}} [\sigma_2 \lambda^{(q+2)/(q+1)}]^{-3/2} \quad (p_0, p_1 = \text{const}).$$

Условие (7) не выполняется, так как

$$G_0^2(\lambda) G_1^2(\lambda) / G_{\frac{1}{2}}^4(\lambda) \sim$$

$$\sim \frac{4s^2(\lambda) \Gamma^2(1/2) [\sigma_2 \lambda^{\frac{q+2}{q+1}}]^{-1} + 4s(\lambda) \Gamma(1/2) [\sigma_2 \lambda^{\frac{q+2}{q+1}}]^{-3/2} o(1) + 4\Gamma(1/2)\Gamma(3/2) [\sigma_2 \lambda^{\frac{q+2}{q+1}}]^{-2}}{4s^2(\lambda) \Gamma^2(1/2) [\sigma_2 \lambda^{\frac{q+2}{q+1}}]^{-1} + 4s(\lambda) \Gamma(1/2) [\sigma_2 \lambda^{\frac{q+2}{q+1}}]^{-3/2} o(1) + [\sigma_2 \lambda^{\frac{q+2}{q+1}}]^{-2} o(1)} \to 1, \ \lambda \to \infty.$$

Обозначим $G_0^{a,q}(\lambda) = \left[\int_0^{\delta} t^q e^{-g(\lambda,t)} dt\right]^{-1/2}$, $G_1^{a,q}(\lambda) = \left[\int_0^{\delta} t^{2+q} e^{-g(\lambda,t)} dt\right]^{-1/2}$.

Легко проверить, что

$$c_1 b_0(\lambda) \leqslant \int_0^{\delta} t^q e^{-g(\lambda,t)} dt \leqslant c_2 b_0(\lambda), \qquad c_3 b_1(\lambda) \leqslant \int_0^{\delta} t^{2+q} e^{-g(\lambda,t)} dt \leqslant c_4 b_1(\lambda). \quad (10)$$

Тем самым, $f_0 \in \mathfrak{H}'_{G_0^{a,q}}$, $f_1 \in \mathfrak{H}'_{G_1^{a,q}}$.

Неравенства (10) влекут

$$\begin{aligned} \mu e^{\frac{1}{2}\sigma_1 \lambda^{q/(q+1)}} &\leqslant G_0^{a,q}(\lambda) \leqslant \mu_{\varepsilon_1} e^{\left(\frac{1}{2}\sigma_1 + \varepsilon_1\right) \lambda^{q/(q+1)}}, \\ \nu e^{\frac{1}{2}\sigma_1 \lambda^{q/(q+1)}} &\leqslant G_1^{a,q}(\lambda) \leqslant \nu_{\varepsilon_2} e^{\left(\frac{1}{2}\sigma_1 + \varepsilon_2\right) \lambda^{q/(q+1)}}. \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ сколь угодно малы, μ, μ_{ε_1}, ν, ν_{ε_2} — положительные постоянные.

Обозначим при $k = 0, 1$

$$\mathfrak{H}'_{\{q\}} = \lim_{a \to 0} \mathrm{pr}\, \mathfrak{H}_{G_k^{a,q}}, \qquad \mathfrak{H}'_{(q)} = \lim_{a \to \infty} \mathrm{ind}\, \mathfrak{H}'_{G_k^{a,q}}.$$

Из неравенств (11) следует независимость этих пределов от k. Пространство $\mathfrak{H}'_{\{q\}}$ ($\mathfrak{H}'_{(q)}$) называется пространством ультрараспределений класса Жевре порядка $\beta = (q+1)/q$ типа Румье (типа Берлинга), построенным по оператору A (см. [1]).

Теорема 2. *Граничные значения при $t \to 0$ ограниченного на ∞ решения внутри $(0, \infty)$ уравнения (1) $y(t)$ и его производной $y'(t)$ лежат в пространстве $\mathfrak{H}'_{\{q\}}$ ($\mathfrak{H}'_{(q)}$) тогда и только тогда, когда для любого $a >$*

> 0 *существует* $c > 0$ (*существуют* a, $c > 0$) *такие, что*

$$\| y(t) \| \leqslant ce^{at^{-q}}. \qquad (12)$$

Доказательство. Пусть выполняется (12). Тогда $e^{-2at^{-q}} \|y(t)\|^2 \leqslant \leqslant c^2$. Отсюда $\int\limits_0^\delta e^{-2at^{-q}} \| y(t) \|^2 dt \leqslant c^2\delta = c_1 < \infty$. Следовательно, $f_0 \in \mathfrak{H}'_{G_0^{a,q}}$, $f_1 \in \mathfrak{H}'_{G_1^{a,q}}$, т. е. $y(0) = f_0 \in \mathfrak{H}'_{G_0^{a,q}}$ при любом a (при некотором a). Поскольку $Af_0 \in \mathfrak{H}'_{G_0^{2a,q}}$, то и $y'(0) = -Af_0 + f_1 \in \mathfrak{H}'_{G_0^{2a,q}}$ при любом (некотором) a_1. Следовательно, $y(0)$ и $y'(0)$ принадлежат $\mathfrak{H}'_{\{q\}}$ ($\mathfrak{H}'_{(q)}$).

Наоборот, пусть $y(0)$, $y'(0) \in \mathfrak{H}'_{\{q\}}$ ($\mathfrak{H}'_{(q)}$). В силу оценок (11) $y(0) \in \in \mathfrak{H}'_{e^{\sigma\lambda^{q/(q+1)}}}$, $y'(0) \in \mathfrak{H}'_{e^{2\sigma\lambda^{q/(q+1)}}}$ при любом (некотором) σ. Так как при $y(0) = f_0 \in \mathfrak{H}'_{e^{\sigma\lambda^{q/(q+1)}}}$ $Af_0 \in \mathfrak{H}'_{e^{2\sigma\lambda^{q/(q+1)}}}$, то и $f_1 = y'(0) + Af_0 \in \mathfrak{H}_{e^{2\sigma\lambda^{q/(q+1)}}}$. В таком случае существуют h_0, $h_1 \in \mathfrak{H}$ такие, что $f_0 = e^{\sigma A^{q/(q+1)}} h_0$, $f_1 = = e^{2\sigma A^{q/(q+1)}} h_1$, а потому

$$\| y(t) \|^2 \leqslant 2 \left(\int\limits_0^\infty e^{-2t\lambda} e^{2\sigma\lambda^{q/(q+1)}} d(E_\lambda h_0, h_0) + \int\limits_0^\infty e^{-2t\lambda} e^{4\sigma\lambda^{q/(q+1)}} d(E_\lambda h_1, h_1) \right).$$

Ввиду того, что функция $e^{-t\lambda} e^{\sigma\lambda^{q/(q+1)}}$ достигает по λ максимума $e^{2c\sigma^{(q+1)/q} t^{-q}}$ при $\lambda = \left(\frac{q+1}{q\sigma} t \right)^{-(q+1)}$ (c не зависит от σ).

$$\| y(t) \| \leqslant 2 (\| h_0 \|^2 + \| h_1 \|^2) e^{2c_1\sigma^{(q+1)/q} t^{-q}} = 2c_2 e^{2c_1\sigma^{(q+1)/q} t^{-q}}.$$

Последнее неравенство равносильно $\| y(t) \| \leqslant ce^{at^{-q}}$ при любом (некотором) a. Теорема доказана.

1. *Горбачук В. И., Горбачук М. Л.* Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений.— Киев : Наук. думка, 1984.— 284 с.
2. *Фишман И. П.* О представлении решений дифференциально-операторных уравнений.— В кн.: Спектральная теория операторов в задачах математической физики. Киев : Ин-т математики АН УССР, 1983, с. 53—57.
3. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов.— Киев : Наук. думка, 1965.— 800 с.
4. *Риекстиньш Э. Я.* Асимптотические разложения интегралов. II.— Рига: Зинатне, 1977.— 385 с.

Ин-т математики АН УССР, Киев Поступила 16.11.84