УДК 518:517.948

В. Н. Мацкул

Приближенное решение задачи Римана с функционально-коммутативной матрицей

Пусть γ— единичная окружность с центром в начале координат, разделяющая плоскость комплексного переменного z на две области: внутреннюю D^+ и внешнюю D^-.

Краевая задача Римана для системы m пар функций заключается в отыскании кусочно-аналитической вектор-функции $\Phi(z) = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m\}$ с линией скачков γ по краевому условию на γ:

$$\Phi^+(t) = G(t)\,\Phi^-(t) + g(t), \tag{1}$$

где $G(t)$— квадратная $m \times m$ матрица, заданная на γ, а $g(t)$ — заданный на γ вектор. Решение задачи будем искать в классе вектор-функций, исчезающих на бесконечности.

В [1, 2] задача (1) исследовалась при различных предположениях относительно $G(t)$ и $g(t)$. В работе [3] в предположении, что $G(t)$— функционально-коммутативна (т. е. $G(t_1)\,G(t_2) = G(t_2)\,G(t_1)$ для любых $t_1, t_2 \in \gamma$), применяя теорию функций от матриц (см., напр., [4]), решение задачи

(1) было выражено через интегралы типа Коши аналогично скалярному случаю краевой задачи Римана.

В настоящей заметке, аппроксимируя плотности интегралов, через которые выражается решение, интерполяционными полиномами Лагранжа и затем вычисляя их точно, строится приближенное решение задачи (1).

Всюду в дальнейшем предполагается, что $G(t)$ — невырожденная функционально-коммутативная матрица.

Пусть $f_n(t) = (\Lambda_n f)(t)$ — полином Лагранжа матрицы $f(t)$ по равноотстоящим узлам $t_j = \exp(2\pi ij/(2n+1))$, $j = -\overline{n, n}$, т. е.

$$f_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k t^k = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k t^k + \sum_{k=-n}^{-1} \alpha_k t^k = f_n^+(t) + f_n^-(t), \tag{2}$$

где матрицы

$$\alpha_k = \frac{1}{2n+1} \sum_{j=-n}^{n} f(t_j)\, t_j^{-k}, \ k = -\overline{n, n}.$$

Тогда имеет место следующая лемма.

Лемма. *Если $G(t)$ — функционально-коммутативная матрица, то матрицы $G_n(t) = (\Lambda_n G)(t)$ и $R_n(t) = G(t) - G_n(t)$ также функционально-коммутативны.*

Доказательство. Как показано в [5], для функциональной коммутативности матрицы $G(t)$ необходимо и достаточно, чтобы она была представима в виде $G(t) = G_1\varphi_1(t) + G_2\varphi_2(t) + \ldots + G_n\varphi_n(t)$, где функции $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, ..., $\varphi_n(t)$ линейно независимы, а G_1, G_2, ..., G_n — постоянные попарно коммутативные матрицы. Отметим, что интерполяционный полином Лагранжа (2) имеет именно такой вид, так как функции t^k, $k = -\overline{n, n}$, линейно независимы, а матрицы α_k коммутируют между собой как линейные комбинации с постоянными коэффициентами значений функционально-коммутативной матрицы $G(t)$ в узлах аппроксимации.

В справедливости равенства $R_n(t_1)\ R_n(t_2) = R_n(t_2)\ R_n(t_1)$ (для любых t_1, $t_2 \in \gamma$) убеждаемся непосредственной проверкой.

Пусть все частные индексы матрицы $G(t)$ равны нулю (как известно [3], частные индексы функционально-коммутативной матрицы совпадают с индексами характеристических функций). В этом случае, согласно [3], решение задачи (1) единственно и определяется формулами

$$\Phi^{\pm}(z) = \frac{X^{\pm}(z)}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{(X^+(t))^{-1} g(t)}{t-z}\, dt, \ z \in D^{\pm}, \tag{3}$$

где

$$X(z) = \exp\left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\ln G(t)}{t-z}\, dt\right),$$

причем все матрицы и функции от них в (3) коммутируют между собой. Аппроксимируя плотности интегралов в (3) интерполяционными полиномами Лагранжа и используя равенство

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f_n(t)}{t-z}\, dt = \begin{cases} f_n^+(z), & z \in D^+, \\ -f_n^-(z), & z \in D^-, \end{cases} \tag{4}$$

построим приближенное решение задачи Римана.

Пусть $A(t) = \ln G(t) = A_n(t) + R_n^1(t)$, тогда

$$X_n^{\pm}(z) = \exp(\pm A_n^{\pm}(z)), \quad (X_n^+(t))^{-1} = \exp(-A_n^+(t)), \tag{5}$$

$$B(t) = (X_n^+(t))^{-1} g(t) = B_n(t) + R_n^2(t), \tag{6}$$

где $A_n(t)$ — матричный, $B_n(t)$ — векторный полиномы Лагранжа, а $R_n^1(t)$, $R_n^2(t)$ — погрешности аппроксимации.

Отметим, что для вычисления значений функций от матриц в узлах аппроксимации можно воспользоваться усеченными рядами для этих функций (см., напр., [4]), сохранив при этом коммутативность получающихся матриц.

Окончательно, с учетом (4), (5), (6), приближенное решение задачи (1) определяется формулами

$$\Phi_n^{\pm}(z) = \pm X_n^{\pm}(z)\, B_n^{\pm}(z),\ z \in D^{\pm}. \tag{7}$$

Оценим скорость сходимости приближенных решений (7) к точному решению (3) задачи Римана в пространствах, определяемых произвольными модулями непрерывности (см., напр., [6]).

Теорема. *Пусть выполнены следующие условия*:

1) $G(t) \in H_{\omega^1, m\times m}(\gamma), \quad g(t) \in H_{\omega^1, m}(\gamma)$;

2) $G(t)$ — *невырожденная функционально-коммутативная матрица, частные индексы которой равны нулю*;

3) *функция* $K(\delta) = \omega^1(\delta)/\omega^2(\delta)$ *не убывает на* $[0, 1]$;

4) $\lim\limits_{\delta \to +0} \ln^2\delta K(\delta) = 0$;

5) $\int\limits_0^{\pi} \frac{\omega^i(t)}{t}\, dt < +\infty, \quad \int\limits_0^{\delta} \frac{\omega^i(t)}{t}\, dt + \delta \int\limits_{\delta}^{\pi} \frac{\omega^i(t)}{t^2}\, dt = O(\omega^i(\delta)),\ i = 1, 2.$

Тогда приближенные решения при $n \to \infty$ *сходятся к точному со скоростью*

$$|\Phi^{\pm}(z) - \Phi_n^{\pm}(z)| \leqslant d_1^* K\left(\frac{1}{n}\right) \frac{\ln^2 n}{n}.$$

Здесь и ниже d_i, $i = 1, 2, \ldots,$ — постоянные, не зависящие от n.

Доказательство. Обозначим $P = (I + S)/2$, где I — тождественный оператор, а S — оператор сингулярного интегрирования. При выполнении условий теоремы оператор P ограничен и справедливы оценки [6]:

$$\| f(t) - (\Lambda_n f)(t) \|_{H_{\omega^2}(\gamma)} \leqslant d_2 K\left(\frac{1}{n}\right) \frac{\ln n}{n},\ f(t) \in H_{\omega^1}(\gamma); \tag{8}$$

$$\| \Lambda_n \|_{H_{\omega}(\gamma)} \leqslant d_3 \ln n,\ n = 1, 2, \ldots; \tag{9}$$

$\omega(\delta)$ — любой модуль непрерывности. Учитывая (8), получаем оценку:

$$\begin{gathered} \| X^+(t) - X_n^+(t) \|_{H_{\omega^2}(\gamma)} = \| (PA)(t) - (P\Lambda_n A)(t) \|_{H_{\omega^2}(\gamma)} \leqslant \\ \leqslant \| P \|_{H_{\omega^2}(\gamma)} \| A(t) - (\Lambda_n A)(t) \|_{H_{\omega^2}(\gamma)} \leqslant d_4 K\left(\frac{1}{n}\right) \frac{\ln n}{n}. \end{gathered} \tag{10}$$

Пусть $M(t) = (X^+(t))^{-1} g(t)$. По принципу максимума модуля на основании (8), (9), (10) имеем:

$$\begin{gathered} |\Phi^+(z) - \Phi_n^+(z)| \leqslant \| \Phi^+(t) - \Phi_n^+(t) \|_{H_{\omega^2}(\gamma)} \leqslant \| X^+(t) - \\ - X_n^+(t) \|_{H_{\omega^2}(\gamma)} \| (PM)(t) \|_{H_{\omega^2}(\gamma)} + \| X_n^+(t) \|_{H_{\omega^2}(\gamma)} \| P \|_{H_{\omega^2}(\gamma)} \| M(t) - \\ - (\Lambda_n B)(t) \|_{H_{\omega^2}(\gamma)} \leqslant d_5 K\left(\frac{1}{n}\right) \frac{\ln^2 n}{n}. \end{gathered}$$

Аналогично устанавливается оценка

$$|\Phi^-(z) - \Phi_n^-(z)| \leqslant d_6 K\left(\frac{1}{n}\right) \frac{\ln^2 n}{n}.$$

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 1. Если предположить, что r-е производные элементов матрицы $G(t)$ и вектора $g(t)$ принадлежат классу $H_{\omega^1}(\gamma)$, то справедлива следующая оценка скорости сходимости:

$$|\Phi^{\pm}_{(z)} - \Phi^{\pm}_{n}(z)| \leqslant d_7 K\left(\frac{1}{n}\right)\frac{\ln^2 n}{n^r}.$$

З а м е ч а н и е 2. Предлагаемый метод приближенного решения задачи (1) можно применить в случае, когда $G(t)$— кусочно-непрерывная функционально-коммутативная матрица.

1. *Гахов Ф. Д.* Краевая задача Римана для системы n пар функций.— Успехи мат. наук, 1952, **7**, вып. 4, с. 3—54.
2. *Векуа Н. П.* Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи.— М. : Наука, 1970.— 379 с.
3. *Чеботарев Г. Н.* К решению в замкнутой форме краевой задачи Римана для системы n пар функций.— Учен. зап. Киев. ун-та, 1956, **116**, вып. 4, с. 31—58.
4. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц.— М. : Наука,1967.— 575 с.
5. *Морозов В. В.* О коммутативных матрицах.—Учен. зап. Киев. ун-та, 1952, **112**, вып. 9, с. 17—20.
6. *Диденко В. Д.* Приближенное решение систем сингулярных интегральных уравнений в подпространствах непрерывных функций.— Докл. АН СССР, 1980, **254**, № 6, с. 1314—1317.

Одес. ун-т

Поступила 15.03.84