УДК 530.1

Ю. М. Березанский

Одно замечание относительно нагруженной цепочки Тоды

В работе [1] предложен способ интегрирования начально-краевых задач для нелинейных разностных уравнений, в частности, для полубесконечных цепочек Тоды, основывающийся на обратной спектральной задаче для якобиевых матриц. С другой стороны, в работах [2, 3] поставлена и изучалась задача интегрирования цепочки Тоды по краевым значениям решения, так называемая задача для нагруженной цепочки Тоды. В этой заметке в пп. 4—6 будет показано, что задача для нагруженной цепочки сводится к начально-краевой задаче. С этой целью в пп. 1, 3 мы приводим результат [1] для некоторых обобщений цепочек Тоды и ленгмюровской (в [1] он содержался для классической цепочки Тоды). Отметим, что формулы решения для ленгмюровской цепочки получены в случае начальных данных, обеспечивающих существование рассеяния, в работе [4]; они справедливы и при отсутствии рассеяния и совпадают с нашими.

1. Для последовательностей $a(t) = (a_n(t))_{n=0}^{\infty}$, $b(t) = (b_n(t))_{n=0}^{\infty}$ вещественнозначных функций $a_n, b_n \in C^1([0, T))$ ($T \leqslant \infty$ фиксировано) рассмотрим следующую цепочку уравнений:

$$\dot{a}_n = \frac{1}{2} f(t)\, a_n (b_{n+1} - b_n),\ \dot{b}_n = f(t)(a_n^2 - a_{n-1}^2)$$
$$(n = 0, 1, \ldots;\ a_{-1} = 0;\ t \in [0, T);\ \cdot = d/dt), \tag{1}$$

где $f \in C([0, T))$ — вещественнозначный коэффициент. При $f = 1$ эта цепочка превращается в цепочку Тоды (к такой цепочке сводится заменой времени t и ситуация, когда f не обращается в 0). Для (1) поставим начально-краевую задачу: требуется найти ее решение $(a(t), b(t))$ по заданным начальным данным $(a(0), b(0))$, условие $a_{-1} = 0$ выполняет роль граничного. Будем искать решение в классе ограниченных локально равномерно по t (т. е. по t из каждого конечного интервала) последовательностей $a(t)$, $b(t)$; $a_n(t) > 0$ ($n = 0, 1, \ldots;\ t \in [0, T)$). Пусть $B = \{(x, y) = ((x_n)_{n=0}^{\infty}, (y_n)_{n=0}^{\infty}) \in l_\infty \times l_\infty \mid x_n > 0,\ y_n \in \mathbb{R}^1\}$.

Теорема 1. *Сформулированная задача при любых начальных данных $(a(0), b(0)) \in B$ имеет решение $(a(t), b(t))$, причем единственное. Это решение (в действительности ограниченное не локально, а равномерно по $t \in [0, T)$), может быть найдено следующей процедурой. Построим по $(a(0), b(0))$ якобиеву матрицу*

$$L(0) = \begin{pmatrix} b_0(0) & a_0(0) & 0 & 0 & 0\ldots \\ a_0(0) & b_1(0) & a_1(0) & 0 & 0\ldots \\ 0 & a_1(0) & b_2(0) & a_2(0) & 0\ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots \end{pmatrix}, \tag{2}$$

пусть $d\rho(\lambda; 0)$ — *ее спектральная мера. Подсчитаем для* $t \in [0, T)$ *меру* $d\rho(\lambda; t)$ *на оси* $\mathbb{R}^1 \ni \lambda$ *по формуле*

$$d\rho(\lambda; t) = \left(\int_{\mathbb{R}^1} e^{\lambda F(t)} d\rho(\lambda; 0)\right)^{-1} e^{\lambda F(t)} d\rho(\lambda; 0), \ F(t) = \int_0^t f(\tau)\, d\tau. \tag{3}$$

Ортогонализируя степени $1, \lambda, \lambda^2, \dots$ *относительно* $d\rho(\lambda; t)$, *найдем ортонормированные полиномы* $P_0(\lambda; t) = 1$, $P_1(\lambda; t), \dots$ *со старшими положительными коэффициентами. Тогда*

$$a_n(t) = \int_{\mathbb{R}^1} \lambda P_n(\lambda; t) P_{n+1}(\lambda; t)\, d\rho(\lambda; t), \quad b_n(t) = \int_{\mathbb{R}^1} \lambda P_n^2(\lambda; t)\, d\rho(\lambda; t) \tag{4}$$

$$(n = 0, 1, \dots; \ t \in [0, T)).$$

Формулы (4) *могут быть переписаны и более явным образом через моменты* $s_n(t) = \int_{\mathbb{R}^1} \lambda^n d\rho(\lambda; t)$ $(n = 0, 1, \dots; \ t \in [0, T))$ *меры* $d\rho(\lambda; t)$:

$$a_n(t) = (D_{n-1}(t) D_{n+1}(t))^{1/2} D_n^{-1}(t), \ b_n(t) = \Delta_n(t) D_n^{-1}(t) - \Delta_{n-1}(t) D_{n-1}^{-1}(t),$$

$$D_n(t) = \begin{vmatrix} s_0(t) & s_1(t) & \dots & s_n(t) \\ s_1(t) & s_2(t) & \dots & s_{n+1}(t) \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ s_n(t) & s_{n+1}(t) & \dots & s_{2n}(t) \end{vmatrix} > 0,$$

$$\Delta_n(t) = \begin{vmatrix} s_0(t) & s_1(t) & \dots & s_{n-1}(t) & s_{n+1}(t) \\ s_1(t) & s_2(t) & \dots & s_n(t) & s_{n+2}(t) \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ s_n(t) & s_{n+1}(t) & \dots & s_{2n-1}(t) & s_{2n+1}(t) \end{vmatrix} \tag{5}$$

$$(n = 0, 1, \dots; \ D_{-1}(t) = 1, \ \Delta_{-1}(t) = 0, \ \Delta_0(t) = s_1(t); \ t \in [0, T)).$$

З а м е ч а н и е. Теорема остается справедливой и для более широкого класса решений $(a(t), b(t))$, когда последовательности $a(t)$, $b(t)$ уже неограничены по n. Существенно лишь, чтобы матрица $L(t)$, построенная по $(a(t), b(t))$ аналогично (2), порождала самосопряженный оператор в пространстве l_2.

2. Приведем два примера начальных данных, когда удается явно подсчитать соответствующее решение цепочки (1). Они относятся к случаю, отмеченному в замечании п. 1.

А. Полиномы Лагерра. Эти полиномы $L_0(\lambda) = 1$, $L_1(\lambda), \dots$ ортонормированы относительно меры $\lambda\rho(\lambda) = e^{-\lambda} d\lambda$ на $[0, \infty)$. Будем предполагать f такой, что $F(t) < 1$ $(t \in [0, T))$. Беря меру $d\rho(\lambda)$ в качестве $d\rho(\lambda; 0)$, получим:

$$d\rho(\lambda; t) = (1 - F(t)) \exp(-\lambda(1 - F(t)))\, d\lambda \quad (\lambda \in [0, \infty); \ t \in [0, T)).$$

Начальным данным $(a(0), b(0)) = ((1, 2, 3, 4, \dots), (1, 3, 5, 7, \dots))$ отвечает решение системы (1) вида

$$(a(t), b(t)) = ((1 - F(t))^{-1}(1, 2, 3, 4, \dots), \ (1 - F(t))^{-1}(1, 3, 5, 7, \dots))$$
$$(t \in [0, T)). \tag{6}$$

Б. Полиномы Эрмита. Эти полиномы $H_0(\lambda) = 1$, $H_1(\lambda), \dots$ ортонормированы относительно меры $d\rho(\lambda) = \pi^{-1/2} e^{-\lambda^2} d\lambda$ $(\lambda \in \mathbb{R}^1)$. Беря меру $\lambda\rho(\lambda)$ в качестве $d\rho(\lambda; 0)$, получим:

$$d\rho(\lambda; t) = \pi^{-1/2} \exp\left(-\left(\lambda - \frac{1}{2} F(t)\right)^2\right) d\lambda \quad (\lambda \in \mathbb{R}^1; \ t \in [0, T)).$$

Начальным данным $(a(0),\ b(0)) = ((\sqrt{1/2},\ \sqrt{1},\ \sqrt{3/2},\ \sqrt{2}, \ldots), (0,\ 0, \ldots))$ отвечает решение системы (1) вида

$$(a(t),\ b(t)) = \left((\sqrt{1/2},\ \sqrt{1},\ \sqrt{3/2},\ \sqrt{2}, \ldots),\ \frac{1}{2} F(t)(1,\ 1, \ldots)\right) \quad (t \in [0,\ T)). \tag{7}$$

3. Аналогично п. 1 можно рассмотреть обобщение ленгмюровской цепочки (f прежнее):

$$\dot{a}_n = f(t)\, a_n (a_{n+1}^2 - a_{n-1}^2)/2 \ (n = 0, 1, \ldots;\ a_{-1} = 0;\ \ t \in [0, T)). \tag{8}$$

Ленгмюровскую цепочку получаем в случае $f = 1$, ее обычно записывают в переменных $c_n = a_n^2$. Теорема 1 сохраняется со следующими изменениями: нужно считать $b_0(t) = b_1(t) = \ldots = 0\ (t \in [0, T))$, в формуле (3) $e^{\lambda F(t)}$ заменяется на $e^{\lambda^2 F(t)}$ (заметим, что, благодаря равенству $b_0 = b_1 = \ldots = 0$, мера $d\rho(\lambda;\ t)$ при каждом $t \in [0, T)$ будет четной по λ). Формулы (4), (5), разумеется, имеют место.

Из примеров п. 2 сейчас имеет смысл лишь случай полиномов Эрмита. Будем предполагать, что $F(t) < 1\ \ (t \in [0,\ T))$. Беря меру $d\rho(\lambda) = \pi^{-1/2} e^{-\lambda^2} d\lambda$ в качестве $d\rho(\lambda;\ 0)$, получим

$$d\rho(\lambda;\ t) = \pi^{-1/2} (1 - F(t))^{1/2} \exp(-\lambda^2 (1 - F(t)))\, d\lambda \quad (\lambda \in \mathbb{R}^1;\quad t \in [0, T)).$$

Начальным данным $a(0) = (\sqrt{1/2},\ \sqrt{1},\ \sqrt{3/2},\ \sqrt{2}, \ldots)$ отвечает решение системы (8) вида

$$a(t) = (1 - F(t))^{-1/2} (\sqrt{1/2},\ \sqrt{1},\ \sqrt{3/2},\ \sqrt{2}, \ldots) \quad (t \in [0, T)). \tag{9}$$

4. Зафиксируем $f \not\equiv 0$ такую, как в п. 1. Функцию вида $\varphi(t) = \int\limits_{\mathbb{R}^1} \exp(\lambda F(t))\, d\sigma(\lambda)\ \ (t \in [0,\ T))$, где $d\sigma(\lambda)$ — определенная на борелевских множествах неотрицательная мера с бесконечным числом точек роста, для которой $\sigma(\mathbb{R}^1) = 1$, условимся называть f-экспоненциально выпуклой (по поводу экспоненциально выпуклых функций, т. е. когда $f = 1$, см., например, [5, гл. 8, § 3, п. 10]). Заметим, что по функции φ отвечающая ей мера $d\sigma(\lambda)$ (спектральная мера φ) определяется однозначно.

Пусть φ — f-экспоненциально выпуклая функция и $\psi(t) = \dot{\varphi}(t)\varphi^{-1}(t)$ $(t \in [0, T))$ — ее логарифмическая производная. По ψ функция φ определяется однозначно: так как $\varphi(0) = 1$, то $\varphi(t) = \exp\left(\int\limits_0^t \psi(\tau)\ d\tau\right)\ \ (t \in [0,\ \ T))$. Тем самым по ψ однозначно определяется и соответствующая спектральная мера.

Т е о р е м а 2. *Рассмотрим начально-краевую задачу для цепочки (1), сформулированную в п. 1. Функция $f(t)\, b_0(t)\ \ (t \in [0, T))$ является логарифмической производной f — экспоненциально выпуклой функции с компактным носителем ее спектральной меры. Обратно, пусть $\psi(t)\ \ (t \in [0, T))$ — некоторая функция этого типа. Тогда существуют такие начальные данные $(a(0),\ b(0)) \in B$, что $\psi(t) = f(t)\, b_0(t)\ (t \in [0, T))$.*

Само решение $(a(t),\ b(t))$ восстанавливается по b_0 следующей процедурой. Из представления

$$\exp\left(\int\limits_0^t f(\tau)\, b_0(\tau)\, d\tau\right) = \int\limits_{\mathbb{R}^1} e^{\lambda F(t)} d\rho(\lambda;\ 0) \quad (t \in [0, T)) \tag{10}$$

определяем $d\rho(\lambda;\ 0)$, затем с помощью формул (3), (4), (5) находим решение.

Таким образом эта теорема дает возможность находить решение цепочки (1) по заданной функции b_0.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы вытекает из сказанного в начале п. 4 и выражения (4) для b_0. Компактность $\operatorname{supp}(d\rho(\lambda;\ 0))$ — следствие ограниченности оператора, порожденного $L(0)$. В случае указанного в п. 1 расширения класса, в котором ищется решение, теорема 2 сохраняется, однако носитель спектральной меры уже не будет компактным.

На основании примеров п. 2 можно утверждать, что функции b_0 вида

$$b_0(t) = (1 - F(t))^{-1}, \ b_0(t) = F(t)/2 \quad (t \in [0, T)) \tag{11}$$

однозначно определяют решения соответственно (6) и (7) системы (1). В случае $F(t) = t$ получаем решения классической цепочки Тоды (для (6) нужно считать $T = 1$).

5. Теорема 2, разумеется, имеет место и для обобщенной ленгмюровской цепочки (8). Сейчас решение этой цепочки однозначно определяется функцией $a_0(t)$ $(t \in [0, T))$. В формулировке теоремы 2 нужно заменить $b_0(t)$ на $a_0^2(t)$ и $e^{\lambda F(t)}$ на $e^{\lambda^2 F(t)}$.

Пример из п. 3 показывает, что функция $a_0(t) = (2(1 - F(t)))^{-1/2}$ $(t \in [0, T))$ однозначно определяет решение (9) системы (8).

6. Цепочка Тоды является гамильтоновой системой, описывающей динамику цепочки частиц на прямой с экспоненциальным взаимодействием. Для рассматриваемой выше полубесконечной классической цепочки Тоды гамильтониан имеет вид $H = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} p_n^2 + \sum_{n=0}^{\infty} e^{q_n - q_{n+1}}$, где $q_n = q_n(t)$ — координата n-й частицы, а $p_n = p_n(t)$ — ее импульс. Уравнения Гамильтона сейчас запишутся так:

$$\begin{gathered} \dot{q}_n = p_n \ (n = 0, 1, \ldots), \ \dot{p}_0 = -e^{q_0 - q_1}, \\ \dot{p}_n = -e^{q_n - q_{n+1}} + e^{q_{n-1} - q_n} \quad (n = 1, 2, \ldots). \end{gathered} \tag{12}$$

Если вместо переменных q_n, p_n ввести переменные $a_n = \exp\left(\frac{1}{2}(q_n - q_{n+1})\right)$, $b_n = -p_n$ $(n = 0, 1, \ldots)$, то система (12) запишется в виде цепочки Тоды (1) (с $f = 1$).

Начально-краевая задача, рассмотренная в п. 1, эквивалентна нахождению эволюции системы (12) по заданным в нулевой момент времени координатам и импульсам точек. Условие $(a(0), b(0)) \in B$ означает, что для существования решения и его единственности достаточно, чтобы расстояния между соседними точками и импульсы были ограниченными.

Задача, рассмотренная в п. 4, эквивалентна нахождению эволюции системы (11) по предписанной эволюции нулевой частицы, т. е. по заданной функции $q_0(t)$ $(t \in [0, T))$: в самом деле, в силу (12) $b_0(t) = -p_0(t) = -\dot{q}_0(t)$. Таким образом, согласно теореме 2 $q_0 \in C^1([0, T))$ должна быть такой, чтобы $\exp(q_0(t) - q_0(0))$ была экспоненциально выпуклой. Тогда $d\rho(\lambda; 0)$ определяется из представления $\exp(q_0(t) - q_0(0)) = \int_{\mathbb{R}^1} e^{\lambda t} d\rho(\lambda; 0)$ $(t \in [0, T))$, а затем применяются формулы (3) — (5).

Примеры (11) означают нахождение решений нагруженной цепочки Тоды, т. е. системы Гамильтона (12), соответственно по $q_0(t) = -\ln(1 - t) + q_0(0)$ $(t \in [0, 1))$ и $q_0(t) = t^2/4 + q_0(0)$ $(t \in [0, \infty))$.

1. *Березанский Ю. М.* Интегрирование нелинейных разностных уравнений методом обратной спектральной задачи.— Докл. АН СССР, 1985, **281**, № 1, с. 7—10.
2. *Kaup D. J.* The forced Toda lattice: An example of an almost integrable system.— J. Math. Phys., 1984, **25**, N 2, p. 277—281.
3. *Kaup D. J., Neuberger D. H.* The soliton birth rate in the forced Toda lattice.— J. Math. Phys., 1984, **25**, N 2, p. 282—284.
4. *Kac M., van Moerbeke P.* On the explicitly soluble system of nonlinear differential equations related to certain Toda lattices.— Adv. Math., 1975, **16**, N 2, p. 160—169.
5. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов.— Киев : Наук. думка, 1965.— 800 с.

Ин-т математики АН УССР, Киев
Поступила 12.11.84

раниченности оператора, порожденного $L(0)$. В случае указанного в п. 1 расширения класса, в котором ищется решение, теорема 2 сохраняется, однако носитель спектральной меры уже не будет компактным.

На основании примеров п. 2 можно утверждать, что функции b_0 вида

$$b_0(t) = (1 - F(t))^{-1}, \; b_0(t) = F(t)/2 \quad (t \in [0, T)) \tag{11}$$

однозначно определяют решения соответственно (6) и (7) системы (1). В случае $F(t) = t$ получаем решения классической цепочки Тоды (для (6) нужно считать $T = 1$).

5. Теорема 2, разумеется, имеет место и для обобщенной ленгмюровской цепочки (8). Сейчас решение этой цепочки однозначно определяется функцией $a_0(t)$ $(t \in [0, T))$. В формулировке теоремы 2 нужно заменить $b_0(t)$ на $a_0^2(t)$ и $e^{\lambda F(t)}$ на $e^{\lambda^2 F(t)}$.

Пример из п. 3 показывает, что функция $a_0(t) = (2(1 - F(t)))^{-1/2}$ $(t \in [0, T))$ однозначно определяет решение (9) системы (8).

6. Цепочка Тоды является гамильтоновой системой, описывающей динамику цепочки частиц на прямой с экспоненциальным взаимодействием. Для рассматриваемой выше полубесконечной классической цепочки Тоды гамильтониан имеет вид $H = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} p_n^2 + \sum_{n=0}^{\infty} e^{q_n - q_{n+1}}$, где $q_n = q_n(t)$ — координата n-й частицы, а $p_n = p_n(t)$ — ее импульс. Уравнения Гамильтона сейчас запишутся так:

$$\begin{gathered} \dot{q}_n = p_n \; (n = 0, 1, \ldots), \quad \dot{p}_0 = -e^{q_0 - q_1}, \\ \dot{p}_n = -e^{q_n - q_{n+1}} + e^{q_{n-1} - q_n} \qquad (n = 1, 2, \ldots). \end{gathered} \tag{12}$$

Если вместо переменных q_n, p_n ввести переменные $a_n = \exp\left(\frac{1}{2}(q_n - q_{n+1})\right)$, $b_n = -p_n$ $(n = 0, 1, \ldots)$, то система (12) запишется в виде цепочки Тоды (1) (с $f = 1$).

Начально-краевая задача, рассмотренная в п. 1, эквивалентна нахождению эволюции системы (12) по заданным в нулевой момент времени координатам и импульсам точек. Условие $(a(0), b(0)) \in B$ означает, что для существования решения и его единственности достаточно, чтобы расстояния между соседними точками и импульсы были ограниченными.

Задача, рассмотренная в п. 4, эквивалентна нахождению эволюции системы (11) по предписанной эволюции нулевой частицы, т. е. по заданной функции $q_0(t)$ $(t \in [0, T))$: в самом деле, в силу (12) $b_0(t) = -p_0(t) = -\dot{q}_0(t)$. Таким образом, согласно теореме 2 $q_0 \in C^1([0, T))$ должна быть такой, чтобы $\exp(q_0(t) - q_0(0))$ была экспоненциально выпуклой. Тогда $d\rho(\lambda; 0)$ определяется из представления $\exp(q_0(t) - q_0(0)) = \int_{\mathbb{R}^1} e^{\lambda t} d\rho(\lambda; 0)$ $(t \in [0, T))$, а затем применяются формулы (3) — (5).

Примеры (11) означают нахождение решений нагруженной цепочки Тоды, т. е. системы Гамильтона (12), соответственно по $q_0(t) = -\ln(1 - t) + q_0(0)$ $(t \in [0, 1))$ и $q_0(t) = t^2/4 + q_0(0)$ $(t \in [0, \infty))$.

1. *Березанский Ю. М.* Интегрирование нелинейных разностных уравнений методом обратной спектральной задачи.— Докл. АН СССР, 1985, **281**, № 1, с. 7—10.
2. *Kaup D. J.* The forced Toda lattice: An example of an almost integrable system.— J. Math. Phys., 1984, **25**, N 2, p. 277—281.
3. *Kaup D. J., Neuberger D. H.* The soliton birth rate in the forced Toda lattice.— J. Math. Phys., 1984, **25**, N 2, p. 282—284.
4. *Kac M., van Moerbeke P.* On the explicitly soluble system of nonlinear differential equations related to certain Toda lattices.— Adv. Math., 1975, **16**, N 2, p. 160—169.
5. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов.— Киев : Наук. думка, 1965.— 800 с.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Поступила 12.11.84