УДК 517.925

И. И. Безвершенко

О построении сплайн-решения для одного класса обыкновенных дифференциальных уравнений

Пусть требуется найти решение $y(x)$ дифференциального уравнения

$$y^{(n)} = f(x, y), \tag{1}$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$y^{(i)}(x_0) = y_0^{(i)} \quad (i = 0, 1, \ldots, n-1) \tag{2}$$

на отрезке $[x_0, X]$ с введенной на нем сеткой $\Delta m: x_0 < x_1 < \ldots < x_m = X$ произвольного разбиения.

Предполагается, что $f(x, y) \in KH_y^{(1)}$ в некоторой области $G\{x_0 \leqslant x \leqslant X, a(x) \leqslant y(x) \leqslant b(x)\}$ и удовлетворяет условиям, обеспечивающим построение на каждом отрезке разбиения $[x_{к-1}, x_k]$ начальной пары нижних и верхних функций Чаплыгина $u_{0_k}(x)$, $v_{0_k}(x)$ (см., напр. [1, 2]) таких, что $u_{0_k}^{(i)}(x_{к-1}) = v_{0_k}^{(i)}(x_{к-1}) = y_0^{(i)}(x_{к-1}) = y_{0_k}^{(i)}$, $u_{0k}(x) \leqslant y(x) \leqslant v_{0_k}(x)$, $u_{0к+1}(x) \geqslant u_{0_k}(x)$, $v_{0_{к+1}}(x) \leqslant v_{0k}(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, m;\ i = 0, 1, \ldots, n-1)$; $KH_y^{(1)}$ — класс непрерывных на $[x_0, X]$ функций $f(x, y)$, удовлетворяющих условию Липшица по y.

Вместо того, чтобы строить последовательности нижних и верхних функций Чаплыгина, аппроксимирующих на $[x_0, X]$ искомое решение задачи (1), (2) (см. [1]), на каждом k-ом отрезке разбиения, начиная с $k = 1$ и исходя из начальной пары $u_{0_k}(x)$, $v_{0_k}(x)$, построим некоторую функцию $s(x) = s_{n_k}(x)$, аппроксимирующую на этом отрезке искомое решение $y(x)$ с оценкой допущенной при этом погрешности. С этой целью преобразуем данное уравнение (1) путем замены $f(x, y)$ функцией $z_k = \alpha_k(x)\, y + \beta_k(x)$ над областью $G_k\{x_{к-1} \leqslant x \leqslant x_k,\ u_{0_k}(x) \leqslant y(x) \leqslant v_{0_k}(x)\} \subset G$ (см. [2]), определив функции $\alpha_k(x)$ и $\beta_k(x)$ так, чтобы погрешность замены $\delta_k(x)$ была минимальной.

При любом фиксированном $x = \xi \in [x_{к-1}, x_k]$ и переменном y $\delta_k(x)$ является отклонением кривой $z = f(\xi, y)$ от прямой $z_k = l_k(\xi, y) = \alpha_k(\xi)\, y + \beta_k(\xi)$. Чтобы погрешность была минимальной, нужно, как известно, (см., напр. [3]) в качестве $\delta_k(x)$ взять наилучшее приближение в метрике C функции $f(\xi, y)$, т. е.

$$\delta_k(\xi) = \inf_{l \in Q_y} \max_{u_{0k} \leqslant y \leqslant v_{0k}} |f(\xi, y) - l_k(\xi, y)|, \tag{3}$$

где Q_y — множество линейных относительно y функций. Другими словами, кривую $z = f(\xi, y)$ нужно заменить полиномом наилучшего приближения на множестве Q_y.

Пусть $A_{1_k}(\mu_{1_k}, \nu_{1_k})$ и $A_{2_k}(\mu_{2_k}, \nu_{2_k})$ — опорные точки кривой $z = f(\xi, y)$ на отрезке $[x_{к-1}, x_k]$, т. е. такие (см. [4]), что между ними находится максимально удаленная от опорного отрезка $A_{1_k}A_{2_k}$ точка $R_k(\mu_k, \nu_k)$ этой кривой. Если через эту точку провести второй опорный отрезок $B_{1_k}B_{2_k}$ параллельно первому, то при изменении x в промежутке $[x_{к-1}, x_k]$ поверхность $z = f(x, y)$ будет заключена между линейчатыми поверхностями, образованными движением опорных отрезков параллельно плоскости yOz. Обозначим через $\varepsilon_k(\xi)$ расстояние между опорными отрезками по оси Oz. Не трудно установить, что $\varepsilon_k(\xi) = \left| \dfrac{q_k(\xi)\, \mu_k(\xi) - p_k(\xi)\, \nu_k(\xi) + r_k(\xi)}{p_k(\xi)} \right|$, где $q_k(\xi) = \nu_{2_k}(\xi) - \nu_{1_k}(\xi)$, $p_k(\xi) = \mu_{2_k}(\xi) - \mu_{1_k}(\xi)$, $r_k(\xi) = p_k(\xi)\, \nu_{1_k}(\xi) - q_k(\xi)\, \mu_{1_k}(\xi)$.

Так как приведенные рассуждения справедливы $\forall x \in [x_{к-1}, x_k]$, то, заменяя поверхность $z = f(x, y)$ поверхностью, образованной движением прямой

$$z_k = \frac{q_k(\xi)}{p_k(\xi)}\, y + \nu_k(\xi) - \frac{q_k(\xi)}{p_k(\xi)}\, \mu_k(\xi) \pm \left| \frac{q_k(\xi)\, \mu_k(\xi) - p_k(\xi)\, \nu_k(\xi) + r_k(\xi)}{2p_k(\xi)} \right|,$$

которая является полиномом наилучшего приближения кривой $z = f(\xi, y)$ среди полиномов множества Q_y на $[x_{к-1}, x_k]$, получим погрешность $\delta_k(x) \leqslant \dfrac{1}{2}\, \varepsilon_k(x)$ над областью G_k.

В результате такой аппроксимации функции $z = f(x, y)$ уравнение (1) преобразуется к линейному уравнению

$$s_k^{(n)} = \alpha_k(x)\, s_k + \beta_k(x), \tag{4}$$

где $\alpha_k(x) = \dfrac{q_k(x)}{p_k(x)}$, $\beta_k(x) = \nu_k(x) - \dfrac{q_k(x)}{p_k(x)}\, \mu_k(x) \pm \dfrac{1}{2}\, \varepsilon_k(x)$.

Так как по предположению $\delta_k(x) = | f(x, y) - [\alpha_k(x) y + \beta_k(x)] |$, то полагая

$$\rho_k(x) = y(x) - s_k(x) \tag{5}$$

на $[x_{\kappa-1}, x_k]$, где $s_k(x)$ — интеграл линейного уравнения (4), получаем

$$y^{(n)} = \alpha_k(x) y + \beta_k(x) + \delta_k(x). \tag{6}$$

Дифференцируя (5) n раз, получаем в силу (6)

$$\rho_k^{(n)}(x) = \alpha_k(x) \rho_k(x) + \delta_k(x). \tag{7}$$

Интегрируя (4) с начальными условиями $s_k^{(i)}(x_{\kappa-1}) = y^{(i)}(x_{\kappa-1})$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1;\ k = 1, 2, \ldots, m)$, например, методом, изложенным в [5], найдем приближенное решение $s(x)$ задачи (1), (2) в виде сплайн-функции $s_k(x)$.

Интегрируя (7) с нулевыми начальными условиями $\rho_k^{(i)}(x_{\kappa-1}) = 0$, получаем погрешность решения на k-отрезке разбиения. На всем отрезке интегрирования $[x_0, X]$ погрешность $\rho(x) = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant m} \rho_k(x)$.

Не зная, как в общем случае находить функции μ_{1k}, ν_{1k}, μ_{2k}, ν_{2k} в качестве линейчатой поверхности, заменяющей $z = f(x, y)$ на $[x_{\kappa-1}, x_k]$, возьмем поверхность, образованную движением параллельно плоскости yOz прямой

$$z_k = \frac{N_k(\xi)}{n_k(\xi)} y + \frac{c_k(\xi)}{n_k(\xi)} \pm \frac{1}{2} | M_k(\xi) + m_k(\xi) |, \tag{8}$$

где

$$n_k(\xi) = v_{0k}(\xi) - u_{0k}(\xi),\ \ N_k(\xi) = f(\xi, v_{0k}) - f(\xi, u_{0k}),\ \ c_k(\xi) = f(\xi, u_{0k}) v_{0k} -$$

$$- f(\xi, v_{0k}) u_{0k},\ \ M_k(\xi) = \max_{u_{0k} \leqslant y \leqslant v_{0k}} \Delta_k(\xi, y),\ \ m_k(\xi) = \min_{u_{0k} \leqslant y \leqslant v_{0k}} \Delta_k(\xi, y),$$

$$\Delta_k(\xi, y) = f(\xi, y) - \left[\frac{N_k(\xi)}{n_k(\xi)} y + \frac{c_k(\xi)}{n_k(\xi)} \right].$$

В этом случае в уравнении (4)

$$\alpha_k = \frac{N_k(\xi)}{n_k(\xi)},\ \ \beta_k = \frac{c_k(\xi)}{n_k(\xi)} \pm \frac{1}{2} | M_k(\xi) + m_k(\xi) |$$

выражаются через начальную пару нижних и верхних функций $u_{0k}(x)$, $v_{0k}(x)$. Очевидно, что погрешность при этом

$$\delta_k(x) \leqslant \frac{1}{2} \omega_k(x), \tag{9}$$

где $\omega_k(x) = M_k(x) - m_k(x)$ — колебание функции $\Delta_k(x, y) = f(x, y) - \left[\frac{N_k(x)}{n_k(x)} y + \frac{c_k(x)}{n_k(x)} \right]$ на $[u_{0k}(x), v_{0k}(x)]$ $\forall x \in [x_{\kappa-1}, x_k]$.

В частности, для уравнения первого порядка $y' = f(x, y)$ линейное уравнение (4) приобретает вид $s_k' = \alpha_k(x) s_k + \beta_k(x)$, интегрируя которое на $[x_{\kappa-1}, x_k]$ с начальными условиями $s_k(x_k) = y_{0k}$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$ получаем сплайн-решение

$$s_k(x) = y_{0k} \exp \int_{x_k}^{x} \frac{N_k(t)}{n_k(t)} \mathrm{d}t + \int_{x_k}^{x} \left\{ \left[\frac{c_k(t)}{n_k(t)} \pm \frac{1}{2} (M_k(t) + m_k(t)) \right] \times \right.$$

$$\left. \times \exp \int_{t}^{x} \frac{N_k(\tau)}{n_k(\tau)} \mathrm{d}\tau \right\} \mathrm{d}t.$$

При этом дифференциальное уравнение для определения погрешности интегрирования будет иметь вид (см. (7)) $\rho_k'(x) = \alpha_k(x)\rho_k + \delta_k(x)$, интегрируя которое с нулевыми начальными условиями и учитывая (9), получаем

$$\rho_k(f, x) \leqslant \frac{1}{2}\int_{x_k}^{x} \omega_k(t)\left[\exp\int_{t}^{x}\frac{N_k(\tau)}{n_k(\tau)}\,d\tau\right]dt. \tag{10}$$

В силу свойств функций класса $KH^{(1)}$ (см. [6, с. 1315])

$$\omega_k(x) \leqslant \frac{1}{2Kn_k(x)}\left[K^2n_k^2(x) - N_k^2(x)\right] = M_{0k}(x).$$

Поэтому

$$\sup_{f\in KH_y^{(1)}} \rho_k(f, x) \leqslant \frac{1}{2}\int_{x_k}^{x} M_{0k}(t)\left[\exp\int_{t}^{x}\frac{N_k(\tau)}{n_k(\tau)}\,d\tau\right]dt. \tag{11}$$

Если поверхность $z = f(x, y)$ заменять поверхностями, образованными движением прямой

$$z = \frac{N_k(\xi)}{n_k(\xi)}y + \frac{c_k(\xi)}{n_k(\xi)} + \frac{1}{2}M_{0k}(\xi), \tag{12}$$

которая является полиномом наилучшего приближения экстремальной на кллассе $KH_y^{(1)}$ функции

$$f_{0k}(\xi, y) = \begin{cases} K(y - u_{0k}) + f(\xi, u_{0k}), & y\in\left[u_{0k}, \ \frac{1}{2}\{u_{0k} + v_{0k} + N_k(\xi)K^{-1}\}\right) \\ -K(y - v_{0k}) + f(\xi, v_{0k}), & y\in\left[\frac{1}{2}\{u_{0k} + v_{0k} + N_k(\xi)K^{-1}\}, \ v_{0k}\right], \end{cases}$$

то в силу (3), (8), (10), получим

$$s_{0k}(x) = y_{0k}\exp\int_{x_k}^{x}\frac{N_k(t)}{n_k(t)}\,dt + \int_{x_k}^{x}\left\{\left[\frac{c_k(t)}{n_k(t)} + \frac{1}{2}M_{0k}(t)\right]\exp\int_{t}^{x}\frac{N_k(\tau)}{n_k(\tau)}\,d\tau\right\}dt, \tag{13}$$

$$\rho_{0k}(f, x) = \frac{1}{2}\int_{x_k}^{x} M_{0k}(t)\left[\exp\int_{t}^{x}\frac{N_k(\tau)}{n_k(\tau)}\right]dt. \tag{14}$$

Таким образом, соотношения (11), (13) и (14) показывают, что линейчатые поверхности, образованные движением прямой (8) на каждом отрезке $[x_{\kappa-1}, x_k]$, дают на всем классе $KH_y^{(1)}$ погрешность не худшую, чем линейчатая поверхность, образованная полиномом наилучшего приближения (12) функции $f_{0k}(\xi, y)$. Другими словами, если пользоваться только линейчатыми поверхностями, то оценка (11) на всем классе $KH_y^{(1)}$ не может быть улучшена.

Погрешность на всем отрезке интегрирования $\rho_0(f, x) = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant m}\rho_{0k}(f_{0k}, x)$ и, следовательно,

$$\rho(x) = \max_{1\leqslant k\leqslant m}\sup_{f\in KH_y^{(1)}}\rho_k(f, x) \leqslant \frac{1}{2}\int_{x_k}^{x} M_{0k}(t)\left[\exp\int_{t}^{x}\frac{N_k(\tau)}{n_k(\tau)}\,d\tau\right]dt.$$

1. *Лузин Н. Н.* О методе приближенного интегрирования акад. С. А. Чаплыгина.— Успехи мат. наук. 1951, вып. 6, с. 3—27.
2. *Вороновская Е. В.* О видоизменении метода Чаплыгина для дифференциальных уравнений первого порядка.— Прикл. математика и механика, 1955, **19**, с. 121—126.

3. *Натансон И. П.* Конструктивная теория функций.— М.; Л. : Гостехиздат, 1949.— 686 с.
4. *Маруашвили Т. И.* Наилучшее приближение непрерывных функций ломаными.— Тр. Вычисл. центра АН ГССР, 1969, 9, № 1, с. 2—17.
5. *Куликов Н. К.* Инженерный метод решения и исследования обыкновенных линейных дифференциальных уравнений.— М. : Высш. шк., 1964.— 221 с.
6. *Безвершенко И. И.* Об одном методе построения приближенного решения дифференциальных уравнений первого порядка.— Диференц. уравнения, 1971, 7, № 7, с. 1315—1319.

Днепродзерж. индустр. ин-т Поступила 10.07.84