УДК 517.91

В. В. Ищук, Н. А. Перестюк

Асимптотическое интегрирование слабо нелинейных импульсных систем

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений с импульсным воздействием

$$\dot{a} = A_0 a + \varepsilon A(t, \varphi, a, \varepsilon), \quad \dot{\varphi} = \omega + \varepsilon B(t, \varphi, a, \varepsilon), \quad t \neq t_j,$$
$$\Delta a|_{t=t_j} = \varepsilon I_j(\varphi, a, \varepsilon), \quad \Delta\varphi|_{t=t_j} = \varepsilon g_j(\varphi, a, \varepsilon), \tag{1}$$

в которой $a = (a_1, \ldots, a_n)$ — n-мерный, $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$ — m-мерный векторы, A_0 — постоянная матрица, $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_m)$ — постоянный вектор с положительными компонентами, $A(t, \varphi, a, \varepsilon)$, $B(t, \varphi, a, \varepsilon)$, I_j $(\varphi,$

$a, \varepsilon)$, $g_j(\varphi, a, \varepsilon)$ — периодические по φ_α, $\alpha = \overline{1, m}$, с периодом 2π функции, а последовательность моментов $\{t_j\}$ занумерована множеством целых чисел $j \in Z$ и такая, что $\lim\limits_{j\to+\infty} t_j \to +\infty$ и $\lim\limits_{j\to-\infty} t_j \to -\infty$, ε — малый положительный параметр.

К исследованию такого вида уравнений приводят многие механические системы, подверженные действию импульсных сил и работающие в колебательно-вращательном режиме. Удобным аппаратом исследования решений системы уравнений (1) являются асимптотические методы нелинейной механики [1—4]. На примере это было показано Н. М. Крыловым и Н. Н. Боголюбовым в монографии [1]. В дальнейшем в работах [4—5] эти идеи были развиты применительно к более широким классам систем дифференциальных уравнений, подверженных импульсному воздействию. В настоящей работе излагаются результаты, связанные с асимптотическим интегрированием системы уравнений (1) и представляющие собой распространение методов из [6] на случай одного класса систем с импульсным воздействием. Если импульсному воздействию система подвергается периодически, т. е. моменты времени t_j удовлетворяют условию $t_{j+p} = t_j + T$ при некоторых $T > 0$ и натуральном p, то изложенная ниже методика асимптотического интегрирования применима к системам более общего вида, чем система уравнений (1), а именно к системам

$$\dot{a} = \Lambda a + \varepsilon\widetilde{A}(t, \varphi, a, \varepsilon), \quad \dot{\varphi} = \omega + \varepsilon\widetilde{B}(t, \varphi, a, \varepsilon), \quad t \neq t_j,$$

$$\Delta a|_{t=t_j} = \Lambda_j a + \varepsilon\widetilde{I}_j(\varphi, a, \varepsilon), \quad \Delta\varphi|_{t=t_j} = \varepsilon\widetilde{g}_j(\varphi, a, \varepsilon), \tag{2}$$

в которых постоянные матрицы Λ_j таковы, что $\Lambda_{j+p} = \Lambda_j$ при всех $j \in Z$ и $\det(E + \Lambda_j) \neq 0$. В этом случае система уравнений (2) с помощью линейной периодической замены приводится к системе уравнений вида (1). Указанная приводимость возможна благодаря тому, что линейная периодическая система

$$\dot{a} = \Lambda a, \quad t \neq t_j, \quad \Delta a|_{t=t_j} = \Lambda_j a \tag{3}$$

с помощью разрывной периодической замены Ляпунова [7] приводима к системе с постоянной матрицей A_0, которая является решением матричного уравнения $e^{\Lambda(T-t_p)}(E + \Lambda_p)\, e^{\Lambda(t_p - t_{p-1})}(E + \Lambda_{p-1}) \ldots (E + \Lambda_1)\, e^{\Lambda t_1} = e^{A_0 T}$, при этом указанную замену нетрудно выписать, поскольку матрицант и матрица монодромии системы (3) явно находятся.

Перейдем к построению асимптотических приближений к решениям уравнений (1). Относительно функций, определяющих эти уравнения, предполагаем, что они представимы в виде рядов по степеням параметра ε

$$A(t, \varphi, a, \varepsilon) \simeq \sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon^\nu A_\nu(t, \varphi, a), \quad B(t, \varphi, a, \varepsilon) \simeq \sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon^\nu B_\nu(t, \varphi, a),$$

$$I_j(\varphi, a, \varepsilon) \simeq \sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon^\nu I_j^{(\nu)}(\varphi, a), \quad g_j(\varphi, a, \varepsilon) \simeq \sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon^\nu g_j^{(\nu)}(\varphi, a),$$

в которых коэффициенты $A_\nu(t, \varphi, a)$, $B_\nu(t, \varphi, a)$, $I_j^{(\nu)}(\varphi, a)$, $g_j^{(\nu)}(\varphi, a)$ являются тригонометрическими полиномами по φ, полиномами по a и при каждой фиксированной паре (φ, a) равномерно ограничены по $t \in R$ и $j \in Z$. Эти ряды асимптотически сходятся в любой конечной подобласти D пространства

$$\left\| A(t, \varphi, a, \varepsilon) - \sum_{\nu=0}^{p} \varepsilon^\nu A_\nu(t, \varphi, a) \right\| + \left\| B(t, \varphi, a, \varepsilon) - \sum_{\nu=0}^{p} \varepsilon^\nu B_\nu(t, \varphi, a) \right\| +$$

$$+ \left\| I_j(\varphi, a, \varepsilon) - \sum_{\nu=0}^{p} \varepsilon^\nu I_j^{(\nu)}(\varphi, a) \right\| + \left\| g_j(\varphi, a, \varepsilon) - \sum_{\nu=0}^{p} \varepsilon^\nu g_j^{(\nu)}(\varphi, a) \right\| \leqslant K\varepsilon^{p+1},$$

где K — положительная постоянная, зависящая от D и p, p — произвольное целое неотрицательное число.

Обозначим собственные числа матрицы A_0 через $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, через $k = (k_1, \ldots, k_m)$ — вектор с целочисленными компонентами, $r = (r_1, \ldots, r_n)$ — вектор с целочисленными неотрицательными компонентами и положим $|k| = |k_1| + \ldots + |k_m|$, $|r| = r_1 + \ldots + r_n$, $\langle k, \varphi\rangle = k_1\varphi_1 + \ldots + k_m\varphi_m$, $a^r = a_1^{r_1}a_2^{r_2} \ldots a_n^{r_n}$. Как и в [6], ищем первые приближения к решениям уравнений (1) в виде

$$a = b + \varepsilon u_1(t, \vartheta, b), \quad \varphi = \vartheta + \varepsilon v_1(t, \vartheta, b), \tag{4}$$

считая b и ϑ решениями уравнений первого приближения

$$\dot{b} = A_0 b + \varepsilon\bar{A}(t, \vartheta, b, 0), \quad \dot{\vartheta} = \omega + \varepsilon\bar{B}(t, \vartheta, b, 0), \quad t \neq t_j,$$
$$\Delta b|_{t=t_j} = \varepsilon\bar{I}_j(\vartheta, b, 0), \quad \Delta\vartheta|_{t=t_j} = \varepsilon\bar{g}_j(\vartheta, b, 0) \tag{5}$$

и подбирая функции $u_1(t, \vartheta, b)$, $v_1(t, \vartheta, b)$, $\bar{A}(t, \vartheta, b, 0)$, $\bar{B}(t, \vartheta, b, 0)$, $\bar{I}_j(\vartheta, b, 0)$, $\bar{g}_j(\vartheta, b, 0)$ таким образом, чтобы замена переменных (4) преобразовала исходные уравнения (1) к виду

$$\dot{b} = A_0 b + \varepsilon\bar{A}(t, \vartheta, b, 0) + \varepsilon^2 A_2(t, \vartheta, b, \varepsilon), \quad \dot{\vartheta} = \omega + \varepsilon\bar{B}(t, \vartheta, b, 0) +$$
$$+ \varepsilon^2 B_2(t, \vartheta, b, \varepsilon), \quad t \neq t_j, \quad \Delta b|_{t=t_j} = \varepsilon\bar{I}_j(\vartheta, b, 0) + \varepsilon^2 I_j^{(2)}(\vartheta, b, \varepsilon),$$
$$\Delta\vartheta|_{t=t_j} = \varepsilon\bar{g}_j(\vartheta, b, 0) + \varepsilon^2 g_j^{(2)}(\vartheta, b, \varepsilon), \tag{6}$$

где функции $A_2(t, \vartheta, b, \varepsilon)$, $B_2(t, \vartheta, b, \varepsilon)$, $I_j^{(2)}(\vartheta, b, \varepsilon)$, $g_j^{(2)}(\vartheta, b, \varepsilon)$ обладают теми же свойствами, что и функции $A(t, \vartheta, b, \varepsilon)$, $B(t, \vartheta, b, \varepsilon)$, $I_j(\vartheta, b, \varepsilon)$, $g_j(\vartheta, b, \varepsilon)$.

Подставляя соотношения (4) в уравнения (1) и учитывая (5), для определения функций $u_1(t, \vartheta, b)$, $v_1(t, \vartheta, b)$, $\bar{A}(t, \vartheta, b, 0)$, $\bar{B}(t, \vartheta, b, 0)$, $\bar{I}_j(\vartheta, b, 0)$, $\bar{g}_j(\vartheta, b, 0)$ получаем систему уравнений

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + \left(\frac{\partial u_1}{\partial\vartheta}, \omega\right) + \frac{\partial u_1}{\partial b}A_0 b = A_0 u_1 + A(t, \vartheta, b, 0) - \bar{A}(t, \vartheta, b, 0),$$
$$\frac{\partial v_1}{\partial t} + \left(\frac{\partial v_1}{\partial\vartheta}, \omega\right) + \frac{\partial v_1}{\partial b}A_0 b = B(t, \vartheta, b, 0) - \bar{B}(t, \vartheta, b, 0), \quad t \neq t_j, \tag{7}$$
$$\Delta u_1|_{t=t_j} = I_j(\vartheta, b, 0) - \bar{I}_j(\vartheta, b, 0), \quad \Delta v_1|_{t=t_j} = g_j(\vartheta, b, 0) - \bar{g}_j(\vartheta, b, 0).$$

Представим функции $A(t, \vartheta, b, 0)$, $B(t, \vartheta, b, 0)$, $I_j(\vartheta, b, 0)$, $g_j(\vartheta, b, 0)$ в виде сумм

$$A(t, \vartheta, b, 0) = \Sigma A_{rk}(t)\, b^r e^{i\langle k,\vartheta\rangle}, \quad B(t, \vartheta, b, 0) = \Sigma B_{rk}(t)\, b^r e^{i\langle k,\vartheta\rangle},$$
$$I_j(\vartheta, b, 0) = \Sigma I_{rk}^{(j)} b^r e^{i\langle k,\vartheta\rangle}, \quad g_j(\vartheta, b, 0) = \Sigma g_{rk}^{(j)} b^r e^{i\langle k,\vartheta\rangle}$$

и будем искать решение уравнений (7) также в виде суммы

$$u_1(t, \vartheta, b) = \Sigma u_{rk}(t)\, b^r e^{i\langle k,\vartheta\rangle}, \quad v_1(t, \vartheta, b) = \Sigma v_{rk}(t)\, b^r e^{i\langle k,\vartheta\rangle}. \tag{8}$$

Лемма. *Пусть система уравнений с импульсным воздействием*

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \left\langle\frac{\partial u}{\partial\varphi}, \omega\right\rangle + \frac{\partial u}{\partial x}Ax = Bu + F_p(t, \varphi, x), \quad t \neq t_j, \quad \Delta u|_{t=t_j} = I_j^p(\varphi, x), \tag{9}$$

в которой $u = (u_1, \ldots, u_l)$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$, *матрицы* $A = \{a_{\alpha\beta}\}$, $\alpha, \beta = \overline{1, n}$, и $B = \{b_{\alpha\beta}\}$, $\alpha, \beta = \overline{1, l}$, — *постоянны*, $F_p(t, \varphi, x)$ — *однородная форма p-го порядка по x и тригонометрический полином по* φ *вида*

$$F_p(t, \varphi, x) = \sum_{|r|=p} x^r \sum_{|k|\leqslant N} F_r^{(k)}(t)\, e^{i\langle k,\varphi\rangle} = \sum_{|k|\leqslant N} F^{(k)}(t, x)\, e^{i\langle k,\varphi\rangle}$$

с ограниченными при всех $t \in R$ коэффициентами $F_r^{(k)}(t)$, $I_j^p(\varphi, x)$ — формы p-го порядка

$$I_j^p(\varphi, x) = \sum_{|r|=p} x^r \sum_{|k| \leqslant N} I_{jr}^k e^{i\langle k, \varphi\rangle} = \sum_{|k| \leqslant N} I_j^k(x)\, e^{i\langle k, \varphi\rangle}$$

с ограниченными равномерно относительно $j \in Z$ коэффициентами I_{jr}^k, такова, что собственные числа $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ матрицы A и собственные числа $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_l)$ матрицы B удовлетворяют неравенству

$$\operatorname{Re}(\langle r, \lambda\rangle + i\langle k, \omega\rangle - \mu_j) \neq 0 \quad \forall r,\ |r| = p, \quad \forall k, \quad |k| \leqslant N. \tag{10}$$

Тогда система (9) имеет единственное решение $u(t, \varphi, x)$, являющееся формой p-го порядка по x и тригонометрическим полиномом по φ вида

$$u(t, \varphi, x) = \sum_{|r|=p} x^r \sum_{|k| \leqslant N} u_r^{(k)}(t)\, e^{i\langle k, \varphi\rangle} = \sum_{|k| \leqslant N} u^{(k)}(t, x)\, e^{i\langle k, \varphi\rangle} \tag{11}$$

с ограниченными при всех $t \in R$ коэффициентами $u_r^{(k)}(t)$.

Если же система уравнений (9) является T-периодической, т. е. выполняются равенства

$$F_p(t + T, \varphi, x) = F_p(t, \varphi, x), \quad I_{j+q}^p(\varphi, x) = I_j^p(\varphi, x), \quad t_{j+q} = t_j + T, \tag{12}$$

то и решение $u(t, \varphi, x)$ является T-периодическим. При этом условие (10) может быть заменено на такое:

$$\langle r, \lambda\rangle + i\langle k, \omega\rangle \neq \mu_j + 2\pi l i/T \tag{13}$$

где l — целое число.

Доказательство. Чтобы убедиться в справедливости утверждения леммы, достаточно в качестве функций $u^{(k)}(t, x)$ взять ограниченное для всех $t \in R$ (при каждом фиксированном x) решение системы с импульсным воздействием

$$\frac{\partial u^{(k)}}{\partial t} + \frac{\partial u^{(k)}}{\partial x} Ax = (B - i\langle k, \omega\rangle E)\, u^{(k)} + F^{(k)}(t, x), \quad t \neq t_j,$$

$$\Delta u^{(k)}|_{t=t_j} = I_j^{(k)}(x).$$

Существование такого решения в силу условия (10) гарантирует теорема Ляпунова [8, с. 66]. На основании этой же теоремы убеждаемся также, что при выполнении условия (13) указанное решение является T-периодическим.

Учитывая утверждения леммы, для однозначного определения функций $u_1(t, \vartheta, b)$ и $v_1(t, \vartheta, b)$ в виде суммы (8) достаточно взять функции $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{I}_j$, $\bar{g}_j$ в виде

$$\bar{A}(t, \vartheta, b, 0) = \sum_{|r|=p,k}{}' A_{r,k}(t)\, b^r e^{i\langle k, \vartheta\rangle}, \quad \bar{B}(t, \vartheta, b, 0) = \sum_{|r|=p,k} B_{r,k}(t)\, b^r e^{i\langle k, \vartheta\rangle},$$

$$\bar{I}_j(\vartheta, b, 0) = \sum_{|r|=p,k}{}' I_i^{r,k} b^r e^{i\langle k, \vartheta\rangle}, \quad \bar{g}_j(\vartheta, b, 0) = \sum_{|r|=p,k} g_j^{r,k} b^r e^{i\langle k, \vartheta\rangle}, \tag{14}$$

осуществив суммирование Σ' по таким p и k, для которых

$$\operatorname{Re}(\langle r, \lambda\rangle + i\langle k, \omega\rangle - \lambda_\nu) = 0, \quad \nu = \overline{1, n}, \tag{15}$$

суммирование Σ по таким p и k, для которых

$$\operatorname{Re}(\langle r, \lambda\rangle + i\langle k, \omega\rangle) = 0, \tag{16}$$

и таким $r, |r| = p$, вхождение которых в $A(t, \vartheta, b, \varepsilon)$, $B(t, \vartheta, b, \varepsilon)$, $I_j(\vartheta, b, \varepsilon)$ и $g_j(\vartheta, b, \varepsilon)$ не позволяет определить $u_1(t, \vartheta, b)$ и $v_1(t, \vartheta, b)$.

В качестве первых приближений к решениям уравнений (1) следует взять выражения (4), в которых b и ϑ — решения уравнений первого приближения (5), $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{I}_j$, $\bar{g}_j$ — функции (14), $u_1(t, \vartheta, b)$, $v_1(t, \vartheta, b)$ — функции (8), определяемые из уравнений (7).

Поступая аналогичным образом для любого натурального p, можно определить p-е приближения к решениям системы уравнений (1)

$$a = b + \sum_{n=1}^{p} \varepsilon^n u_n(t, \vartheta, b), \quad \varphi = \vartheta + \sum_{n=1}^{p} \varepsilon^n v_n(t, \vartheta, b), \tag{17}$$

где b, ϑ — решения уравнений p-х приближений

$$\dot{b} = A_0 b + \sum_{n=1}^{p} \varepsilon^n \bar{A}_n(t, \vartheta, b), \quad \dot{\vartheta} = \omega + \sum_{n=1}^{p} \varepsilon^n \bar{B}_n(t, \vartheta, b), \quad t \neq t_j,$$

$$\Delta b|_{t=t_j} = \sum_{n=1}^{p} \varepsilon^n \bar{I}_j^n(\vartheta, b), \quad \Delta\vartheta|_{t=t_j} = \sum_{n=1}^{p} \varepsilon^n \bar{g}_j^n(\vartheta, b). \tag{18}$$

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема. *Для системы дифференциальных уравнений* (1) *существует единственная формальная замена переменных*

$$a = b + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n u_n(t, \vartheta, b), \quad \varphi = \vartheta + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n v_n(t, \vartheta, b), \tag{19}$$

приводящая эту систему к системе нормального вида

$$\dot{b} = A_0 b + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \bar{A}_n(t, \vartheta, b), \quad \dot{\vartheta} = \omega + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \bar{B}_n(t, \vartheta, b), \quad t \neq t_j,$$

$$\Delta b|_{t=t_j} = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \bar{I}_j^n(\vartheta, b), \quad \Delta\vartheta|_{t=t_j} = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \bar{g}_j^n(\vartheta, b). \tag{20}$$

Отметим, что выражения (17) как замена переменных $(a, \varphi) \to (b, \vartheta)$ позволяют привести исходную систему уравнений к виду

$$\dot{b} = A_0 b + \sum_{n=1}^{p} \varepsilon^n \bar{A}_n(t, \vartheta, b) + \varepsilon^{p+1} A_{p+1}(t, \vartheta, b, \varepsilon),$$

$$\dot{\vartheta} = \omega + \sum_{n=1}^{p} \varepsilon^n \bar{B}_n(t, \vartheta, b) + \varepsilon^{p+1} B_{p+1}(t, \vartheta, b, \varepsilon), \quad t \neq t_j,$$

$$\Delta b|_{t=t_j} = \sum_{n=1}^{p} \varepsilon^n \bar{I}_j^n(\vartheta, b) + \varepsilon^{p+1} I_j^{p+1}(\vartheta, b, \varepsilon),$$

$$\Delta\vartheta|_{t=t_j} = \sum_{n=1}^{p} \varepsilon^n \bar{g}_j^n(\vartheta, b) + \varepsilon^{p+1} g_j^{p+1}(\vartheta, b, \varepsilon),$$

где функции A_{p+1}, B_{p+1}, I_j^{p+1}, g_j^{p+1} обладают такими же свойствами, как и исходные функции $A(t, \varphi, a, \varepsilon)$, $B(t, \varphi, a, \varepsilon)$, $I_j(\varphi, a, \varepsilon)$, $g_j(\varphi, a, \varepsilon)$.

1. *Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н.* Введение в нелинейную механику.— Киев : Изд-во АН УССР, 1937.— 364 с.
2. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.— М. : Наука, 1974.— 502 с.
3. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А., Самойленко А. М.* Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике.— Киев : Наук. думка, 1969.— 244 с.
4. *Митропольский Ю. А.* Метод усреднения в нелинейной механике.— Киев : Наук. думка. 1977.— 440 с.

5. *Самойленко А. М.* Метод усреднения в системах с толчками.— Мат. физика, 1971, вып. 9, с. 101—117.
6. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М.* Асимптотические исследования слабонелинейных колебательных систем.— Киев: 1976.— 54 с.— (Препринт АН УССР, Ин-т математики; ИМ—76—5)
7. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Периодические и почти периодические решения дифференциальных уравнений с импульсным воздействием.— Укр. мат. журн., 1982, **34**, № 1, с. 66—73.
8. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения.— М. : Наука, 1966.— 532 с.

Киев. ун-т им. Т. Г. Шевченко

Поступила 05.06.84