УДК 517.917

Я. Г. Сфикас, М. К. Грамматикопулос

О поведении решений дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом

1. Введение. Как известно, наличие отклоняющегося аргумента в дифференциальном уравнении может порождать свойства его решений, качественно отличающиеся от свойств соответствующих уравнений без отклонения. Таким, например, является явление «слипания» решений дифференциальных уравнений с запаздыванием, т. е. их тождественное совпадение, начиная с некоторого значения t, которое может проявиться при выполнении условий теорем единственности решений (см. [1] и [2]). Так, дифференциальное уравнение $x''(t) + \dfrac{1}{2\cos t} x[g(t)] = 0$, где

$$g(t) = \begin{cases} 2t, & \text{при } -1 \leqslant t \leqslant 0, \\ t/2, & \text{при } t > 0, \end{cases}$$

обладает решением $x(t) = \begin{cases} \sin t, & \text{при } -2 \leqslant t \leqslant 0, \\ 0, & \text{при } t > 0, \end{cases}$ которое, начиная со значения $t = 0$, совпадает с его тривиальным решением.

В связи с этой проблемой рассмотрим линейную систему дифференциальных уравнений вида

$$x'(t) = A(t)\, x[g(t)], \quad t \geqslant t_0, \tag{1}$$

где A — непрерывная $n \times n$ матрица, а g — непрерывная и возрастающая действительная функция со свойствами:

(I) $t - g(t) \geqslant 0$ для каждого $t \geqslant t_0$ и

(II) $\lim\limits_{t\to\infty} g(t) = \infty$.

Если дана система вида (1) и любая точка $\tau_0 \geqslant t_0$, то для постановки начальной задачи необходимо задать непрерывную функцию φ, определенную хотя бы на отрезке $[g(\tau_0) - \tau_0, 0]$, т. е. один элемент пространства $C([g(\tau_0) - \tau_0, 0], \mathbf{R}^n)$. Это значит, что если $g(\tau_0) = \tau_0$, т. е. если τ_0 является неподвижной точкой аргумента g, то необходимо иметь один элемент $x_0 \in \mathbf{R}^n$ в качестве начального значения для определения решения в точке t_0 так, чтобы $x(t_0) = x_0$. Следовательно, в этом случае существует точно n линейно независимых решений $x_1, x_2, \ldots, x_n$ системы (1), порождающих пространство решений в начальный момент τ_0. Заметим, что решения $x_1, x_2, \ldots, \ldots, x_n$ являются линейно независимыми в интервале $[t_0, \infty)$. Однако не исключено, что эта линейная независимость будет нарушена, если ограничиться интервалом $[a, \infty)$, $a > \tau_0$. Явление это, характерное для уравнений с запаздыванием и не наблюдающееся у обыкновенных дифференциальных уравнений, может вызвать появление решений x, отличных от постоянной функции нуль в области их определения $[t_x, \infty)$, но равных тождественно нулю в некотором интервале вида $[a, \infty)$, $a > t_x$, т. е. *явление это может вызвать появление решений, слипающихся с тривиальным решением системы* (1). Явление «слипания» считается исключительным, и в [9] ставится вопрос установления достаточных условий его отсутствия. Как будет показано ниже, используя метод специальных решений, впервые развитый в работах [3] и [4] и нашедший свое применение и дальнейшее усовершенствование в работах [5—10], а также пользуясь результатами работы [6], мы сможем исключить существование «слипающихся» решений в случае дифференциальных уравнений третьего порядка вида

$$x'''(t) - p(t)\, x[g(t)] = 0, \tag{2}$$

где функции p и g удовлетворяют подходящим условиям. Этот результат мы используем при изучении проблемы существования и асимптотического поведения колеблющихся решений уравнения (2).

2. Некоторые результаты теории специальных решений. Рассмотрим систему (1). Обозначим через $|\cdot|$ любую норму в $\mathbf{R}^n$ и тем же символом обозначим наведенную этой нормой норму $n \times n$ матриц. Предположим, что функции $A(t)$ и $g(t)$ определены для каждого $t \in \mathbf{R}$ и для некоторого $r > 0$ $t - g(t) \leqslant r$ для каждого $t \in \mathbf{R}$. Пусть, более того, $\sup\limits_{t\to\infty} |A(t)| = p < \infty$ и $pre < 1$. Тогда имеют место теорема 1 и следствие 2 из [2], а также следующие предложения.

Предложение 1. *Если y_i, $i = 1, 2, \ldots, n$,— n линейно независимых специальных решений системы* (1) *в точке* $t_0 \in \mathbf{R}$, *то ограничения $y_i/[-\infty, \alpha)$ и $y_i/[\beta, +\infty)$, где $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, являются линейно независимыми функциями.*

Доказательство. Достаточно заметить, что если функция $y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + \ldots + c_n y_n(t)$ при $t \in \mathbf{R}$ и $c_i \in \mathbf{R}$, $i = 1, 2 \ldots, n$, имеет некоторый корень в $\mathbf{R}$, то в силу единственности специальных решений должно быть $y \equiv 0$.

Предложение 2. *Если T и τ, $T > \tau$,—такие действительные числа, что $g(T) = T$ и $g(\tau) = \tau$, то каждое решение x системы* (1) *в некоторой точке $\tau_0 \in [\tau, T]$ при любой начальной функции $\varphi \in C([g(\tau_0) - \tau_0, 0])$ имеет вид*

$$x(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + \ldots + c_n y_n(t), \quad t > T,$$

где $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — n линейно независимые специальные решения системы (1) *в точке τ, а $c_1, c_2, \ldots, c_n$ — подходящие постоянные.*

Доказательство. Заметив, что в точках τ и T пространство всех решений системы (1) имеет размерность n, применим предложение 1.

3. Колебательные и асимптотические свойства решений уравнения (2). Будем рассматривать дифференциальное уравнение (2) при следующих предположениях о функциях p и g:

функция p определена и непрерывна хотя бы в интервале $[t_0, \infty)$ и $p(t) > 0$ для каждого $t \geqslant t_0$, а функция g является непрерывной неубывающей и такой, что $g(t) \leqslant t$ для каждого $t \geqslant t_0$ и $\lim\limits_{t\to\infty} g(t) = \infty$.

Нетривиальное решение x уравнения (2) будем называть *колеблющимся*, если существует последовательность (t_n), $n = 1, 2, \ldots, t_n \geqslant t_0$, такая, что $t_n \to \infty$ и $x(t_n) = 0$, $n = 1, 2, \ldots$. В противном случае (нетривиальное) решение x будем называть *неколеблющимся*.

Как видно из условия (b) следствия 1 и условия c_2) леммы 3 ниже, при данной функции $p(t)$ эти условия выполняются тождественно в случае, когда $t - g(t) \equiv 0$ (случай обыкновенного дифференциального уравнения). Однако, эти же условия выполняются и для определенных классов дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом в предположении, что запаздывание является подходяще «малым».

В этом пункте мы рассмотрим вопрос существования колеблющегося решения для уравнения (2), а также дадим результат, характеризующий асимптотическое поведение его колеблющихся решений. Эти результаты следуют из [5] (в случае уравнений вида

$$x'''(t) - k(t)x'(t) - \lambda(t)x(t) = 0, \tag{3}$$

где k и λ — неотрицательные функции).

Цель настоящей работы — выяснить, при каких предположениях о функциях p и g, входящих в (2), результаты из [5], касающиеся (3) при $k \equiv 0$, могут быть перенесены на запаздывающее уравнение (2). Как мы увидим, при данной функции $p(t)$ такими подходящими условиями являются в основном условия «малости» функции $t - g(t)$.

В дальнейшем нам потребуются следующие две леммы.

Лемма 1. *Пусть x_1, x_2, x_3 — три линейно независимые решения уравнения* (2) *на интервале $[\tau, \infty)$, $\tau \geqslant t_0$, где τ — неподвижная точка функции g, т. е. $g(\tau) = \tau$. Если существует подынтервал $[\alpha, \infty)$ интервала $[\tau, \infty)$, в котором x_1, x_2, x_3 являются линейно зависимыми, то существует $T > \tau$, для которого $g(T) = T$, и решение v уравнения* (2) *со свойствами*:

I) $v(t) = 0$ *для каждого* $t \geqslant T$;

II) v *не равно тождественно нулю ни в каком интервале вида* $[\alpha, \infty)$, $\alpha \in [\tau, T]$;

III) *существует последовательность* (t_n), $n = 1, 2, \ldots, t_n \in [\tau, T]$, *такая, что* $t_n \to T$ *и* $v(t_n) = 0$, $n = 1, 2, \ldots$.

Такое решение v называется тривиально колеблющимся.

Доказательство. Предположим, что x_1, x_2, x_3 — линейно зависимые решения (2) в интервале $[\alpha, \infty)$, $\alpha > \tau$. Тогда для некоторых $c_1, c_2, c_3 \in \mathbf{R}$ со свойством $c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 > 0$, будем иметь $c_1x_1(t) + c_2x_2(t) + c_3x_3(t) = 0$, $t \geqslant \alpha$.

Рассмотрим функцию $v(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t) + c_3x_3(t)$, $t \geqslant \tau$ и множество $V = \{u \geqslant \tau : v(t) = 0$ для каждого $t \geqslant u\}$. Докажем, что $\min V = T$ такое, что $T > \tau$ и $g(T) = T$, т. е. что v является решением (2) и удовлетворяет свойствам I) и II) при T, являющейся неподвижной точкой g. С этой целью заметим, что если $g(T) < T$, то, взяв в качестве начальной функцию

$$\varphi(\vartheta) = v(T + \vartheta), \ \vartheta \in [g(T) - T, 0],$$

которая, по определению, отлична от постоянной функции нуль, будем иметь решение y уравнения (2) с $y_T = \varphi$, отличным от постоянной функции нуль. Действительно, имеет место равенство

$$y'''(t) = p(t)y[g(t)] = p(t)v(t), \quad t \in [g(T), T],$$

и, следовательно, существуют точки t правее T, для которых $y'''(t) \neq 0$. Но это является противоречием, так как в силу единственности должно быть $y(t) = v(t)$ для каждого $t \geqslant g(T)$.

Для доказательства III) предположим, что $v \neq 0$ в некотором интервале $(t_1, T) \subseteq [\tau, T]$, и придем к противоречию. Не умаляя общности, предположим, что в силу $g(\tau) = \tau$ и непрерывности функций v и g интервал (t_1, T) может быть выбран так, что $v'''(t) > 0$ для каждого $t \in (t_1, T)$.

Так как, очевидно, $v''(T) = 0$, должно быть $v''(t) \leqslant 0$ в некоторой левой окрестности точки T (пусть в (t_1, T)). Тогда, поскольку и $v'(T) = 0$, должно быть $v'(t) \geqslant 0$ в некоторой левой окрестности T. Это означает, что функция v является возрастающей левее T и, следовательно, исключено $v(T) = 0$.

Лемма доказана полностью.

Для любого решения $x(t)$, $t \geqslant t_1 - g(t_1)$, уравнения (2) определим функцию

$$F_x(t) = (x'(t))^2 - 2x(t)\, x''(t), \quad t \geqslant t_1. \tag{4}$$

Видоизменение этой функции используется в работе [5] для изучения колебательного поведения уравнения (3). Функции этого вида впервые использованы в работе [6].

Заметим, что для функции F_x имеет место тождество

$$F_x(t) = F_x(\alpha) - 2\int_\alpha^t p(s)\, x(s)\, x[g(s)]\, ds, \quad t \geqslant \alpha, \tag{5}$$

где $\alpha \geqslant t_1$ является произвольным.

Докажем теперь следующую лемму.

Л е м м а 2. *Пусть x — решение уравнения* (2) *в точке $t_1 \geqslant t_0$. Пусть также для некоторого $\tau > t_1$ выполняется $x(\tau) = x'(\tau) = 0$ и $x''(\tau) \neq 0$. Тогда для каждого $T \in [t_1, \tau]$ с $g(T) = T$ имеет место неравенство $F_x(T) \geqslant 0$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим сначала, что в силу (4) $F_x(\tau) = 0$, а в силу (5) $F'_x(T) \leqslant 0$ для каждого T, для которого $g(T) = T$. Предположим, что для каждого $T_1 \in [t_1, T]$ с $g(T_1) = T_1$ имеет место неравенство $F_x(T_1) < 0$ и придем к противоречию. Для этого заметим, что T_1, так как $F_x(T_1) < 0$, не является корнем x (см. (4)) и, следовательно, в силу того что $p(t) > 0$, $t \leqslant t_0$, будем иметь $F'_x(T_1) < 0$. Таким образом, в некоторой правой окрестности $[T_1, \beta)$ точки T_1 будем иметь $F_x(t) < 0$. Но так как, с другой стороны, $g(T_1) = T_1$ и в силу этого $g(t) \geqslant T_1$ при $t \geqslant T_1$, из (5) следует, что, поскольку знак x постоянен, F_x будет отрицательным. Пусть $t_2 > T_1$ — первый x правее T_1. (Если бы было $x(T_1) = 0$, тогда мы имели бы $F_x(T_1) \geqslant 0$, что невозможно.) В силу того что для каждого $t \geqslant T_1$ имеем $g(t) \geqslant T_1$, получим $F'_x(t) = -p(t)\, x(t)\, x[g(t)] \leqslant 0$ для каждого $t \in [T_1, t_2]$. Следовательно, $F_x(t_2) < 0$. Но $F_x(t_2) = (x'(t_2))^2 \geqslant 0$. Полученное противоречие доказывает лемму.

Т е о р е м а 1. *Предположим, что для некоторой последовательности (T_n), $T_n \geqslant t_0$, $n = 1, 2, \ldots$, где $T_n \to \infty$, имеет место $g(T_n) = T_n$, $n = 1, 2, \ldots$. Предположим также, что*

$$(\mathrm{C}_1) \int^\infty t^2 g^2(t)\, p(t)\, dt = \infty.$$

Тогда, если каждое неколеблющееся решение x уравнения (2) *обладает свойством*

$$\operatorname{sgn} x(t) = \operatorname{sgn} x'(t) = \operatorname{sgn} x''(t) \text{ для всех больших } t,$$

то для уравнения (2) *выполняется одно из следующих условий:*

α) *уравнение* (2) *обладает тривиальным колеблющимся решением;*

β) *уравнение* (2) *обладает (нетривиальным) колеблющимся решением.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположив, что α) не выполняется, докажем β). С этой целью для каждого решения $x(t)$, $t \geqslant t_x \geqslant t_0$, уравнения (2), как и в лемме 2, рассмотрим функцию

$$F_x(t) = (x'(t))^2 - 2x(t)\, x''(t) = F_x[x(t_x)] - 2\int_{t_x}^t p(s)\, x(s)\, x[g(s)]\, ds,$$
$$t \geqslant t_x. \tag{6}$$

Если x является неколеблющимся решением (2) со свойством

$$\operatorname{sgn} x(t) = \operatorname{sgn} x'(t) = \operatorname{sgn} x''(t) \text{ для всех больших } t, \tag{7}$$

докажем, что $\lim\limits_{t\to\infty} F_x(t) = -\infty$.

Так как $F_x(t) = F_{-x}(t)$, $t \geqslant t_x$, ограничимся случаем положительного решения x. В силу (7) и уравнения (2), существует $\bar{t} \geqslant t_0$ такое, что $x'''(t) \geqslant 0$ для каждого $t \geqslant \bar{t}$. В силу опять же (7), существует $t^* \geqslant \bar{t}$ такое, что $x(t) \geqslant \dfrac{x''(t^*)}{2}(t - t^*)^2$ для каждого $t \geqslant t^*$. Следовательно, из (6) получим

$$F_x(t) = F_x[x(t^*)] - 2\int_{t^*}^{t} p(s)\, x(s)\, x[g(s)]\, ds \leqslant F_x[x(t^*)] -$$

$$-\frac{1}{2}x''(t^*)\int_{t^*}^{t} p(s)(s - t^*)^2 (g(s) - t^*)^2\, ds, \qquad t \geqslant t^*,$$

откуда в силу (C_1) следует $\lim\limits_{t\to\infty} F_x(t) = -\infty$.

Таким образом, для доказательства β) достаточно показать, что уравнение (2) обладает решением $x \neq 0$, для которого $\lim\limits_{t\to\infty} F_x(t) \neq -\infty$.

Пусть z_1, z_2, z_3 — три линейно независимые решения уравнения (2) в точке T_0. Из леммы 1 следует, что если α) не выполняется, то z_1, z_2, z_3 являются линейно независимыми решениями уравнения (2) в каждом интервале $[\alpha, \infty)$, $\alpha \geqslant T_0$.

Рассмотрим последовательность решений x,

$$x_n(T_n) = x_n'(T_n) \quad x_x''(T_n) \neq 0, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

Из наших предположений следует, что каждое x_n выражается линейно через z_1, z_2, z_3 и, следовательно, может быть продолжено так, чтобы было определено хотя бы в интервале $[T_0, \infty)$. Не умаляя общности, предположим, что

$$x_n(t) = c_{1n}z_1(t) + c_{2n}z_2(t) + c_{3n}z_3(t), \quad t \geqslant T_0,$$

где $c_{1n}^2 + c_{2n}^2 + c_{3n}^2 = 1$. Также без умаления общности предположим, что $c_{in} \to c_i$, $i = 1, 2, 3$, а тогда

$$x_n(t) \to x(t) = c_1z_1(t) + c_2z_2(t) + c_3z_3(t), \quad t \geqslant T_0, \tag{8}$$

со сходимостью, равномерной в компактных подынтервалах интервала $[T_0, \infty)$. Но в силу леммы 2 $F_{x_n}(\tau) \geqslant 0$ при $\tau = T_0, T_1, \ldots, T_n$, $n = 1, 2, \ldots$. Следовательно, $F_x(T_n) \geqslant 0$ для каждого $n = 1, 2, \ldots$.

Так как в силу $c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 1$ и (8) x не является нулевым, то $\lim\limits_{t\to\infty} F_x(t) \neq -\infty$. Это противоречие доказывает теорему.

С л е д с т в и е 1. *Рассмотрим уравнение* (2), *где функции p и g определены в* $\mathbf{R}$ *и g является неубывающей в некотором интервале* $[t_0, \infty)$. *Пусть выполняются условия теоремы* 1 *из* [6] *и более того*:

a) *для некоторого $r > 0$ $t - g(t) \leqslant r$ для каждого* $t \in \mathbf{R}$;

b) $\max\{1, \sup\limits_{t\in\mathbf{R}} p(t)\}\, re < 1$.

Тогда уравнение (2) *обладает колеблющимся решением.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Легко проверить, что дифференциальное уравнение (2) равносильно системе

$$x'(t) = A(t)\, x[g(t)], \quad t \in \mathbf{R},$$

где

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -p(t) & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Примем за норму в $\mathbf{R}^3$ $|x| = |x_1| + |x_2| + |x_3|$, тогда $|A(t)| = \max\{1, p(t)\}$, $t \in \mathbf{R}$.

Если уравнение (2) обладает тривиальным колеблющимся решением v в некотором интервале $[\alpha, \infty)$, $\alpha \geqslant T_0$, то

$$v(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + c_3 y_3(t) \text{ для каждого } t \geqslant \alpha,$$

где y_1, y_2, y_3 — линейно независимые специальные решения в точке T_0, а c_1, c_2, c_3 — постоянные числа со свойством $c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 > 0$. Но тогда y_1, y_2, y_3 являются линейно зависимыми в некотором интервале $[\beta, \infty)$, $\beta > \alpha$, что противоречит предложению 1.

Замечание 1. Функциями g, удовлетворяющими условиям теоремы 1, являются, например, функции:

1) $g(t) = t - \dfrac{1}{k} \sin^2 kt, \quad k > 0;$

2) $g(t) = t - \dfrac{1}{k} \cos^2 kt, \quad k > 0;$

3) $g(t) = t - \sin^2 t/(t^2 + 1);$

4) $g(t) = t - \cos^2 t/(t^2 + 1);$

5) $g(t) = \dfrac{t}{2} + \dfrac{t}{4}(1 + \sin \log t), \quad t \geqslant 1.$

Первые четыре из этих функций удовлетворяют условию (а) следствия 1, а пятая ему не удовлетворяет.

Замечание 2. Одним из основных условий теоремы 1 является то, что каждое неколеблющееся решение x уравнения (2) удовлетворяет условию знака:

$$\operatorname{sgn} x(t) = \operatorname{sgn} x'(t) = \operatorname{sgn}''(t) \text{ для всех больших } t. \tag{7'}$$

Очевидно, для исключения неколеблющихся решений уравнения (2), не удовлетворяющих (7′), сначала необходимо проверить, какого вида неколеблющиеся (положительные) решения еще могут иметь место. Заметим, что условие $\int^{\infty} g^2(t)\, p(t)\, dt = \infty$ исключает существование ограниченных неколеблющихся решений, а также решений, асимптотических функциям t и t^2 (см. [13]). Легко проверить, что каждое положительное неколеблющееся решение x уравнения (2), не удовлетворяющее (7′), такое, что

$$x(t) > 0, \quad x'(t) > 0, \quad x''(t) < 0, \quad x'''(t) > 0 \text{ для всех больших } t \text{ и}$$
$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \infty, \qquad \lim_{t\to\infty} x'(t) = 0.$$

Если теперь $\int^{\infty} p(t)\, dt = \infty$, то непосредственно придем к противоречию.

Пусть $\int_t^{\infty} p(s)\, ds < \infty$. Тогда x'' удовлетворяет уравнению

$$x''(t) + \int_t^{\infty} p(s)\, x[g(s)]\, ds = 0,$$

а так как x — возрастающее решение, то x'' удовлетворяет также и неравенству

$$x''(t) + \left(\int_t^{\infty} p(s)\, ds\right) x[g(t)] \leqslant 0.$$

Но, как следует из теоремы 4 работы [14], неравенство это не имеет положительных решений при выполнении условия

$$\liminf_{t\to\infty} g(t) \int_t^\infty \int_s^\infty p(u)\,du\,ds > 1/4. \tag{9}$$

Таким образом, условие (9) обеспечивает выполнение (7′) для каждого неколеблющегося решения уравнения (2).

Ниже мы установим теорему 2, не зависящую от теоремы 1 из [6]. Эта теорема важна в том смысле, что описывает колеблющиеся решения уравнения (2).

Докажем предварительно следующую лемму.

Лемма 3, *Предположим, что*

(C_2) $\int^\infty [g(t)-t]^2 p(t)\,dt < \infty.$

Тогда производная x' *каждого неколеблющегося решения* x *уравнения* (2) *является ограниченной функцией.*

Доказательство. Пусть x — колеблющееся решение уравнения (2) и t^* — такая точка, что $x(t^*)=0$ и $\int_{t^*}^\infty [g(s)-s]^2 p(s)\,ds < 1$. Рассмотрим функцию

$$H(t) = (x'(t))^2 - 2x(t)\,x''(t) - \int_{t^*}^t p(s)\,(x(s)-x[g(s)])^2\,ds, \quad t \geqslant t^*. \tag{10}$$

Заметим, что

$$H(t) = H(t^*) - \int_{t^*}^t p(s)\,(x^2(s) + x^2[g(s)])\,ds, \quad t \geqslant t^*. \tag{11}$$

Пусть (τ_n), такая последовательность, что

$$\lim_{n\to\infty} \tau_n = \infty \ \text{ и } \ x'(\tau_n) = 0, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Более того, рассмотрим последовательность (ξ_n), $n = 1, 2, \ldots$, такую, что

$$(x'(\xi_n))^2 = \max_{t^*\leqslant s\leqslant \tau_n} (x'(s))^2.$$

Так как, несомненно, $t^* \leqslant \xi_n < \tau_n$, $n = 1, 2, \ldots$, то

$$0 = ([x'(\xi_n)]^2)' = 2x'(\xi_n)\,x''(\xi_n)$$

и, следовательно, $x''(\xi_n) = 0$ или $\xi_n = t^*$.

Если $(x')^2$ не является ограниченной функцией, то ясно, что последовательность (ξ_n), $n = 1, 2, \ldots$, может быть выбрана так, чтобы $\lim_{n\to\infty} \xi_n = \infty$ и $\lim_{n\to\infty} (x'(\xi_n))^2 = \infty$. Но тогда, несомненно, будем иметь $(x'(\xi_n))^2 = \max_{t^*\leqslant s\leqslant\xi_n} (x'(s))^2$ и $x''(\xi_n) = 0$. Так как в силу (11) $H(t)$ — убывающая функция и, кроме того, $x(t^*) = 0$, из (10), пользуясь теоремой о среднем, получим

$$H(t^*) \geqslant H(\xi_n) = (x'(\xi_n))^2 - \int_{t^*}^{\xi_n} p(s)\,(x(s)-x[g(s)])^2\,ds \geqslant (x'(\xi_n))^2 -$$

$$- (x'(\xi_n))^2 \int_{t^*}^{\xi_n} [g(s)-s]^2 p(s)\,ds \geqslant (x'(\xi_n))^2 \left(1 - \int_{t^*}^\infty [g(s)-s]^2 p(s)\,ds\right),$$

что в силу (C_2) приводит к противоречию.

Теорема 2. *Пусть* $p(t) \geqslant d > 0$ *для каждого* $t \geqslant t_0$ *и выполняется условие* (C_2). *Если* $x(t)$, $t \geqslant t_x$, *— любое колеблющееся решение уравнения* (2), *то* $x \in L^2[t_x, \infty)$ *и* $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$.

Доказательство. Пусть $x(t)$, $t \geqslant t_x$, — колеблющееся решение уравнения (2). Рассмотрим функцию

$$H(t) = (x'(t))^2 - 2x(t)\,x''(t) - \int_{t_x}^{t} p(s)\,(x(s) - x[g(s)])^2\,ds, \quad t \geqslant t_x.$$

Заметим, что так как

$$H(t) = H(t_x) - \int_{t_x}^{t} p(s)\,(x^2(s) + x^2[g(s)])\,ds, \quad t \geqslant t_x,$$

функция H является убывающей.

Если (t_n) — последовательность корней $x(t)$ с $\lim_{n\to\infty} t_n = \infty$, то

$$\int_{t_x}^{t_n} p(s)\,(x^2(s) + x^2[g(s)])\,ds = H(t_x) - H(t_n) = H(t_x) - \Bigg((x'(t_n))^2 - \int_{t_x}^{t_n} p(s) \times$$

$$\times (x(s) - x[g(s)])^2\,ds\Bigg) = H(t_x) - (x'(t_n))^2 + (x'(\vartheta_n))^2 \times$$

$$\times \int_{t_x}^{t_n} (g(s) - s)^2\,p(s)\,ds, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

где $t_x \leqslant \vartheta_n \leqslant t_n$, но, по лемме 3, существует $K > 0$ такое, что $(x'(t))^2 \leqslant \leqslant K$ для каждого $t \geqslant t_x$.

Следовательно,

$$\int_{t_x}^{t_n} p(s)\,(x^2(s) + x^2[g(s)])\,ds \leqslant H(t_x) + K\int_{t_x}^{t_n} (s - g(s))^2\,p(s)\,ds, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Это означает, что $\int^{\infty} p(t)\,(x^2(t) + x^2[g(t)])\,dt < \infty$. Но

$$\int_{t_x}^{t} x^2(s)\,ds \leqslant \frac{1}{d}\int_{t_x}^{t} p(s)\,(x^2(s) + x^2[g(s)])\,ds, \quad t \geqslant t_x,$$

и, следовательно, $x \in L^2[t_x, \infty)$. Так как x' — ограниченная функция, мы имеем также $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$.

Пример. Дифференциальное уравнение

$$x'''(t) - x(t - \sin^2 t\,(t^2 + 1)^{-1/2}) = 0 \qquad (12)$$

удовлетворяет всем условиям следствия 1 и теоремы 2. Следовательно, существует решение x уравнения (12) со свойством $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$.

Замечание 3. Легко проверить, что уравнение вида (2) всегда обладает положительным решением y, для которого $y' > 0$ и $y'' > 0$. Действительно, решение y с начальными условиями: $y(t) = 0$, $g(T_0) \leqslant t \leqslant T_0$; $y'(T_0) = 0$; $y''(T_0) = 1$ удовлетворяет этому условию. Так, возвращаясь к примеру, можем сказать, что уравнение (12) обладает колеблющимся решением v со свойством $\lim_{t\to\infty} v(t) = 0$ и неколеблющимся решением y со свойством $y > 0$, $y' > 0$ и $y'' > 0$. Эти два решения являются, очевидно, линейно независимыми и специальными решениями уравнения (12). Если T_0 такое, что $g(T_0) = T_0$, то можно найти другое решение z, имеющее то же поведение, что и y и являющееся линейно независимым с y, взяв начальными условиями $z(T_0) = 1$ и $z'(T_0) = z''(T_0) = 0$.

Таким образом, каждое решение уравнения (12) имеет вид $x(t) = c_1 v(t) + c_2 y(t) + c_3 z(t)$, $t \geqslant t_x$, $t_x \geqslant t_0$ подбирается подходящим образом, где $v(t)$ является колеблющимся решением со свойством $\lim_{t\to\infty} v(t) = 0$, а y и z — неколеблющиеся решения со свойствами

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{t\to\infty} y'(t) = \lim_{t\to\infty} y''(t) = \infty \quad \text{и} \quad \lim_{t\to\infty} z(t) = \lim_{t\to\infty} z'(t) = \lim_{t\to\infty} z''(t) = \infty.$$

Замечание 4. Одно из сведений, которое нам дает теорема 1, следующее:

Для того, чтобы все решения уравнения (2) были неколеблющимися, уравнение (2) обязательно должно обладать неколеблющимся решением x со свойством

$$x > 0, \quad x' > 0, \quad x'' < 0 \text{ и } x''' > 0.$$

Замечание 5. При выполнении условий

$$\int^{\infty} \operatorname{tg}(t)\, p(t)\, dt = \infty \text{ и } \liminf_{t\to\infty} \operatorname{tg}(t) \int_t^{\infty} p(s)\, ds > 1/4 \text{ или } \int^{\infty} p(t)\, dt = \infty$$

каждое положительное неколеблющееся решение x уравнения (2) такое, что $x(t) > 0$, $x'(t) > 0$, $x''(t) > 0$, $x'''(t) > 0$ для всех больших t. Доказательство этого факта подобно доказательству теоремы 4 работы [14]. Кроме того, как и в примере 2 той же работы, можно доказать, что из условия $\limsup_{t\to\infty} t^2 \int_t^{\infty} p(s)\, ds < 1/4$ следует, что уравнение (2) обладает положительным неколеблющимся решением x со свойством $x(t) > 0$, $x'(t) > 0$, $x''(t) < 0$, $x'''(t) > 0$ для всех больших t.

1. *Мышкис А. Д.* О решениях линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка периодического типа с запаздывающим аргументом.— Мат. сб., 1951, **28**, с. 15—54.
2. *Мышкис А. Д.* О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом.— Успехи мат. наук, 1977, **30**, с. 173—202.
3. *Рябов Ю. А.* Некоторые асимптотические свойства линейных систем с малым запаздыванием по времени.— В кн.: Тр. семинара по теории дифференц. уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Изд-во Ун-та Дружбы народов, 1965, т. 3, с. 153—164.
4. *Уваров В. Б.* Асимптотические свойства решений линейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом.— Дифференц. уравнения, 1968, **4**, с. 659—663.
5. *Driver R. D.* On Ryabov's asymptotic characterisation of solutions of quasi—linear differential equations with small delays.— SIAM Rew., 1968, **10**, p. 329—341.
6. *Driver R. D.* Linear differential systems with small delays.— J. Different. Equat., 1976, **21**, p. 148—166.
7. *Jarnik J., Kurzweil J.* Ryabov's special solutions of functional differential equations.— Boll. U. M. I., 1975, **11**, p. 198—208.
8. *Курцвейль Я.* О специальных решениях функционально-дифференциальных уравнений.— В кн.: Дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом. Киев: Наук. думка, 1977, с. 185—187.
9. *Марушиак П., Рябов Ю. А.* Анализ колеблемости решений уравнения Минорского.— Pr. Štúdie Vysokoj Školy Dopravny Spojov v Žiline, 1980, **3**, с. 97—104.
10. *Панков П.* Об асимптотическом представлении решений операторно-дифференциальных уравнений, близких к вырожденным.— Сб. тр. аспирантов и соискателей Кирг. ун-та, вып. 4, с. 94—102.
11. *Lazer A. G.* The behavior of solutions of the differential equation $y''' + p(x)y' + q(x)y = 0$.—Pacif. J. Math., 1966, **17**, p. 435—466.
12. *Mammana G.* Decomposizione della espressioni lineari omogenee in prodotti di fattori simbolici e applicazione relativa allo studio delle equazioni differenziali lineari.— Math. Z., 1931, **33**, p. 186—231.
13. *Philos Ch. G., Sficas Y. G., Staikos V. A* Some results on the asymptotic behavior of nonoscillatory solutions of differential equations with deviating arguments.— J. Austral. Math. Soc., 1982, **32**, p. 295—317.
14. *Sficas Y. G.* On the behavior of nonoscillatory solutions of differential equations with deviating argument.— Nonlinear Anal., 1979, **3**, p. 379—394.

Греция

Поступила 15.07.83
после доработки — 15.05.84