УДК 517.432+517.515

З. И. Исмаилов

Описание всех правильных операторов (разрешимых расширений) для дифференциальных уравнений первого порядка в гильбертовом пространстве

1. Рассмотрим в $\mathscr{L}_2(\mathscr{H}, (0, b))$ дифференциальное выражение вида

$$l[y] = iy'(t) + A(t)\,y(t), \tag{1}$$

где $A(t)$ — оператор-функция в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$, заданная на $(0, b)$, $0 < b < \infty$.

В данной заметке даются описания правильных операторов [1] (разрешимых расширений, заключенных в максимальном операторе [2]), порождаемых дифференциальным выражением (1) в $\mathscr{L}_2(\mathscr{H}, (0, b))$, и некоторых их подклассов.

Такие вопросы ставились в монографии [1] и были полностью решены в случае, когда $\dim \mathscr{H} = 1$.

Рассмотрим два случая.

I. Оператор-функция $A(t)$ непрерывна в равномерной операторной топологии, значения которой — ограниченные операторы в $\mathscr{H}$.

II. А) При каждом фиксированном t $A(t)$ самосопряженный и имеет не зависящую от t плотную в $\mathscr{H}$ область определения: $\mathscr{D}(A(t)) = \mathscr{D}(A)$; Б) для любого $f \in \mathscr{D}(A)$ вектор-функция $A(t)f$ сильно непрерывно дифференцируема в $\mathscr{H}$.

Определим минимальный и максимальный операторы, порожденные выражением (1) в $\mathscr{L}_2(\mathscr{H}, (0, b))$. На вектор-функциях вида $y(t) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(t) f_i$, где $f_i \in \mathscr{D}(A)$, $\varphi_i(t)$ — скалярная финитная бесконечно дифференцируемая на $[0, b]$ функция, определим оператор $\mathscr{L}_0'$ формулой $\mathscr{L}_0' y = l[y]$. Оператор $\mathscr{L}_0'$ в случае II симметрический. Замыкание $\mathscr{L}_0$ назовем минимальным оператором, порождаемым выражением (1) в $\mathscr{L}_2(\mathscr{H}, (0, b))$.

Построим минимальный оператор $(\mathscr{L}^*)_0$ по формально сопряженному выражению $l^*[y] = iy'(t) + A^*(t)\,y(t)$ и положим $\mathscr{L} = [(\mathscr{L}^*)_0]^*$. Оператор $\mathscr{L}$ называется максимальным оператором для (1) в $\mathscr{L}_2(\mathscr{H}, (0, b))$.

Расширение $\tilde{\mathscr{L}}, \mathscr{L}_0 \subset \tilde{\mathscr{L}} \subset \mathscr{L}$, имеющее ограниченный обратный $\tilde{\mathscr{L}}^{-1}$, определенный во всем пространстве, будем называть правильным оператором [1] (разрешимым расширением [2]) минимального оператора $\mathscr{L}_0$. Если $\tilde{\mathscr{L}}^{-1}$

вполне непрерывен, назовем его вполне правильным оператором (вполне разрешимым расширением [2]).

Структура областей определения минимального и максимального операторов в $\mathscr{L}_2(\mathscr{H}, (0, b))$, порождаемых дифференциальным выражением (1), изучена в работах [3, 4].

2. Обозначим через $U(t, s)$ семейство эволюционных операторов (см., напр., [4—6]), соответствующих однородному уравнению для (1).

Эволюционный оператор $U(t, s)$ обладает следующими свойствами: а) $U(t, t) = E$; б) $U(t, \tau)\, U(\tau, s) = U(t, s)$; в) $U(t, s) = [U(s, t)]^{-1}$; г) при $f \in \mathscr{D}(A)$ вектор-функция $U(t, s) f$ сильно непрерывно дифференцируема по t при фиксированном s и по s при фиксированном t,

$$\begin{cases} i\,\partial U(t, s) f/\partial t + A(t)\, U(t, s) f = 0, \\ U(s, s) f = f \end{cases} \quad \left(\begin{cases} i\,\dfrac{\partial U(t, s) f}{\partial s} - U(t, s)\, A(s) f = 0, \\ U(t, t) f = f \end{cases}\right).$$

В случае II $U(t, s)$ — унитарные операторы.

Т е о р е м а. *Каков бы ни был ограниченный оператор $\mathscr{K}$ в $\mathscr{H}$, граничное условие*

$$(\mathscr{K} + E)\, y(0) = \mathscr{K} U(0, b)\, y(b) \tag{2}$$

определяет правильный оператор $\widetilde{\mathscr{L}}_{\mathscr{K}}$, порождаемый дифференциальным выражением (1) в $\mathscr{L}_2(\mathscr{H}, (0, b))$, E—тождественный оператор.

Обратно, всякий правильный оператор $\widetilde{\mathscr{L}}$, $\mathscr{L}_0 \subset \widetilde{\mathscr{L}} \subset \mathscr{L}$, в $\mathscr{L}_2(\mathscr{H}, (0, b))$ *порождается дифференциальным выражением* (1) *и граничным условием* (2).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сначала опишем множество правильных операторов в более частном случае, когда в (1) $A(t) \equiv 0$.

Область определения минимального и максимального операторов для дифференциального выражения

$$l^1[y] = iy'(t) \tag{3}$$

в $\mathscr{L}_2(\mathscr{H}, (0, b))$ также известна (см., напр., [3]).

Обозначим через $\mathscr{L}_c$ расширение минимального оператора, определяемое условием $y(0) = 0$. Легко видеть, что $\mathscr{L}_c$ — разрешимое расширение и $\mathscr{L}_c^{-1} f(t) = -i \int\limits_0^t f(x)\, dx$.

Допустим, что $\widetilde{\mathscr{L}}$ — правильный оператор для выражения (3) в $\mathscr{L}_2(\mathscr{H}, (0, b))$. В работе [2] показано, что область определения любого правильного оператора разлагается в прямую сумму $\mathscr{D}(\widetilde{\mathscr{L}}) = \mathscr{D}(\mathscr{L}_0) \dotplus (\overline{\mathscr{L}}^{-1} + \overline{\mathscr{K}})\, V$, где $V = \{v(t) \in \mathscr{D}(\mathscr{L}),\ (\mathscr{L}_0)^* v(t) = 0\}$, $\overline{\mathscr{L}}$ — фиксированный правильный оператор, $\overline{\mathscr{K}}$ — ограниченный фиксированный оператор в $\mathscr{H}$. В нашем случае $V \equiv \mathscr{H}$, $\overline{\mathscr{L}} = \mathscr{L}_c$.

Легко видеть, что область определения этого правильного оператора имеет вид $\mathscr{D}(\widetilde{\mathscr{L}}) = \mathscr{D}(\mathscr{L}_0) \dotplus (\mathscr{L}_c^{-1} + \overline{\mathscr{K}})\, \mathscr{H}$, т. е. для любого $y(t) \in \mathscr{D}(\widetilde{\mathscr{L}})$ справедливо разложение $y(t) = y_0(t) + \mathscr{L}_c^{-1} v_0 + \overline{\mathscr{K}} v_0$, где $y_0(t) \in \mathscr{D}(\mathscr{L}_0)$, $v_0 \in \mathscr{H}$. Значит, $y(t) = y_0(t) + \mathscr{K} v_0 - itv_0$. В результате объединения (сравнения) значений $y(t)$ в точках 0 и b получаем $(\overline{\mathscr{K}} - ib)\, y(0) = \overline{\mathscr{K}} y(b)$.

Если обозначить $\mathscr{K} = \overline{\mathscr{K}}/(-ib)$, получим, что любая функция из $\mathscr{D}(\widetilde{\mathscr{L}})$ удовлетворяет условию

$$(\mathscr{K} + E)\, y(0) = \mathscr{K} y(b), \tag{4}$$

где $\mathscr{K}$ — некоторый ограниченный оператор в $\mathscr{H}$. Необходимость теоремы для случая $A(t) \equiv 0$ доказана.

Нетрудно доказать, что оператор $\widetilde{\mathscr{L}}_{\mathscr{K}}$, порождаемый выражением (3) и граничным условием (4), есть правильный оператор и

$$\widetilde{\mathscr{L}}_{\mathscr{K}}^{-1} f(t) = -i \left(\int\limits_0^t f(x)\, dx + \mathscr{K} \int\limits_0^b f(x)\, dx\right), \tag{5}$$

т. е. все возможные правильные операторы для (3) в $\mathcal{L}_2(\mathcal{H}, (0, b))$ описываются граничным условием (4).

Рассмотрим общий случай. Введем в $\mathcal{L}_2(\mathcal{H}, (0, b))$ оператор $(Uz)(t) = U(t, 0)z(t)$. В силу свойства эволюционного оператора $U(t, s)$ оператор U является линейным, непрерывным и имеет ограниченный обратный: $(U^{-1}z)(t) = U(0, t)z(t)$.

Обозначим через $\mathcal{L}_0^1$, $\mathcal{L}^1$, $\tilde{\mathcal{L}}^1$ соответственно минимальный, максимальный и правильный операторы, порождаемые выражением (3) в $\mathcal{L}_2(\mathcal{H}, (0, b))$. Нетрудно проверить, что

$$U^{-1}\mathcal{L}U = \mathcal{L}^1, \quad U^{-1}\mathcal{L}_0U = \mathcal{L}_0^1, \quad U^{-1}\widetilde{\mathcal{L}}U = \widetilde{\mathcal{L}}^1. \tag{6}$$

Таким образом, оператор U осуществляет взаимно однозначное соответствие между множествами правильных операторов, порождаемых выражениями (1) и (3). Из (6) следует, что $y(t) \in D(\tilde{\mathcal{L}})$ тогда и только тогда, когда $(\mathcal{K} + E)U(0, 0)y(0) = \mathcal{K}U(0, b)y(b)$, где $\mathcal{K}$ — линейный ограниченный оператор в $\mathcal{H}$. Теорема полностью доказана.

З а м е ч а н и е 1. В случае $A(t) \equiv 0$ из (5) видно, что если $\dim \mathcal{H} = +\infty$, то не существует вполне правильных операторов, а в случае $\dim \mathcal{H} < +\infty$ все такие расширения вполне правильные.

З а м е ч а н и е 2. В случае II такое расширение является максимальным диссипативным (максимальным аккумулятивным), если оператор $(E + \mathcal{K})^{-1}\mathcal{K}$ $((E + \mathcal{K})^{-1})$ является оператором сжатия. Наконец, если оператор $(E + \mathcal{K})^{-1}\mathcal{K}$ является унитарным (изометрическим), то такое расширение является самосопряженным (максимальным симметрическим). Последний результат следует из работы [7].

1. *Дезин А. А.* Общие вопросы теории граничных задач.— М. : Наука, 1980.— 208 с.
2. *Вишик М. И.* Об общих краевых задачах для эллиптических дифференциальных уравнений.— Тр. Моск. мат. о-ва, 1952, **1**, с. 187—246.
3. *Горбачук В. И., Горбачук М. Л.* О граничных задачах для дифференциального уравнения первого порядка с операторными коэффициентами и разложении по собственным функциям этого уравнения.— Докл. АН СССР, **208**, № 5, с. 1268—1271.
4. *Брук В. М.* Некоторые вопросы спектральной теории линейного дифференциального уравнения первого порядка с неограниченным операторным коэффициентом.— Функцион. анализ, 1973, вып. 1, с. 15—25.
5. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве.— М. : Наука, 1967.— 464 с.
6. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве.— М. : Наука, 1970.— 536 с.
7. *Левчук В. В.* К спектральной теории дифференциально-операторного уравнения первого порядка в пространстве вектор-функций.—В кн.: Спектральная теория операторов в задачах математической физики.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1983, с. 3—12.

Ин-т математики АН УССР, Киев
Поступила 21.02.84