УДК 517.984.7

Ю. М. Арлинский

Сжимающие расширения и обобщенные резольвенты дуальной пары сжатий

Пусть в гильбертовом пространстве H заданы два линейных сжимающих оператора A и B, определенные на собственных подпространствах D_A и D_B и обладающие свойством $(Af_A, f_B) = (f_A, Bf_B)$ $\forall f_A \in D_A$, $\forall f_B \in D_B$. Пара таких операторов называется дуальной парой сжатий $\langle A, B\rangle$.

Символом $[H_1, H_2]$ обозначим множество линейных ограниченных операторов, определенных на гильбертовом пространстве H_1 со значениями в гильбертовом пространстве H_2.

Назовем оператор $T \in [H, H]$ сжимающим расширением дуальной пары $\langle A, B\rangle$, если $T \supset A$, $T^* \supset B$, $\| T \| \leqslant 1$.

Совокупность всех таких расширений обозначим $CE\ \langle A, B\rangle$. Ясно, что это множество выпукло и замкнуто в слабой операторной топологии.

Задача описания множества $CE\ \langle A, B\rangle$ решена, по существу, в работе [1] и независимо от нее в [2, 3]. В этих работах рассматривалось представление оператора $T \in CE\ \langle A, B\rangle$ в виде блочной сжимающей операторной матрицы.

В настоящей работе указаны другие (эквивалентные полученным в [1—3]) описания множества $CE\ \langle A, B\rangle$. Кроме того, введена Q-функция дуальной пары $\langle A, B\rangle$, установлена ее связь с характеристической функцией некоторого сжатия $T_0 \in CE\ \langle A, B\rangle$ и с ее помощью получено описание обобщенных резольвент дуальной пары $\langle A, B\rangle$. Дана также характеристика крайних точек множества $CE\ \langle A, B\rangle$ и оператора T_0.

Отметим известные ранее описания множества $CE\ \langle A, B\rangle$ и обобщенных резольвент для следующих случаав:

а) $D_B = \{0\}$ [4, 5];

б) $D_B = H \ominus D_A$, $A \in [D_A, D_A]$, $B \in [D_B, D_B]$ [6];

в) $D_B = D_A$, $B = A$ (sc, qsc — расширения эрмитова сжатия A) [7—10].

Сжимающие расширения дуальной пары сжатий возникают в связи с задачей расширения дуальной пары аккретивных операторов до максимальной аккретивной дуальной пары, в теории гильбертовых пространств с индефинитной метрикой и в других задачах.

1. Пусть $A^*\in[H, D_A]$, $B^*\in[H, D_B]$ — сопряженные операторы к $A\in[D_A, H]$, $B\in[D_B, H]$. Обозначим $N_A=H\ominus D_A$, $N_B=H\ominus D_B$, $L_A^{B^*}=\overline{(I-BB^*)^{1/2}D_A}$, $L_B^{A^*}=\overline{(I-AA^*)^{1/2}D_B}$, P_A, P_B — ортопроекторы на D_A, D_B. Определим сжимающие операторы $K_0\in[L_B^{A^*}, N_A]$ и $M_0\in[L_A^{B^*}, N_B]$ следующим образом:

$$K_0(I-AA^*)^{1/2}f_B=(I-P_A)Bf_B,\quad f_B\in D_B,\quad M_0(I-BB^*)^{1/2}f_A=$$
$$=(I-P_B)Af_A,\quad f_A\in D_A.$$

Пусть $K_0^*\in[N_A, L_B^{A^*}]$, $M_0^*\in[N_B, L_A^{B^*}]$ — сопряженные операторы.

Введем операторы $T_0=AP_A+(I-AA^*)^{1/2}K_0^*(I-P_A)$, $Q_0=BP_B+(I-BB^*)^{1/2}M_0^*(I-P_B)$. Очевидно, что $T_0\supset A$, $Q_0\supset B$. Кроме того, $\|T_0\|\leqslant 1$, $\|Q_0\|\leqslant 1$.

Лемма. *Оператор $T_0\,(Q_0)$ является сжимающим расширением дуальной пары $\langle A, B\rangle$ ($\langle B, A\rangle$), причем $T_0^*=Q_0$.*

2. Каждому неотрицательному оператору $F\in[H, H]$ и подпространству $G\subset H$ поставим в соответствие оператор М. Г. Крейна [7] $F_G=F^{1/2}\tilde{P}F^{1/2}$, где $\tilde{P}$ — ортопроектор в H на подпространство $\overline{(F^{1/2})^{-1}\{G\}}$. Положим $C_1=(I-AA^*)_{N_B}$, $C_2=(I-BB^*)_{N_A}$. Пусть $N_B^0=\overline{C_1H}$, $N_A^0=\overline{C_2H}$. Ясно, что $N_B^0\subseteq N_B$; $N_A^0\subseteq N_A$. Дадим описание множества $CE\langle A, B\rangle$.

Теорема 1. *Формула*

$$T=T_0+C_1^{1/2}XC_2^{1/2} \tag{1}$$

устанавливает взаимно-однозначное соответствие между $CE\langle A, B\rangle$ и множеством сжимающих операторов $X\in[N_A^0, N_B^0]$. Множество $CE\langle A, B\rangle$ состоит из одного элемента в том и только в том случае, когда выполнено одно из равенств $(I-AA^*)^{1/2}H\cap N_B=\{0\}$, $(I-BB^*)^{1/2}H\cap N_A=\{0\}$.

Пусть $L_B^0=[(I-T_0T_0^*)^{1/2}]^{-1}\{N_B\}$, $L_A^0=[(I-T_0^*T_0)^{1/2}]^{-1}\{N_A\}$, $P_{L_A^0}$, $P_{L_B^0}$ — соответствующие ортопроекторы.

Из теоремы 1 можно вывести равенства $C_1=(I-T_0T_0^*)_{N_B}$, $C_2=(I-T_0^*T_0)_{N_A}$. Отсюда следует еще одно описание множества $CE\langle A, B\rangle$:

$$T=T_0+(I-T_0T_0^*)^{1/2}YP_{L_A^0}(I-T_0^*T_0)^{1/2}, \tag{2}$$

где Y — произвольное сжатие из $[L_A^0, L_B^0]$.

Можно показать, что формулы (1) и (2) эквивалентны блочным представлениям операторов $T\in CE\langle A, B\rangle$, полученным в [1 — 3] относительно разложений $H=D_A\oplus N_A$, $H=D_B\oplus N_B$.

3. Охарактеризуем крайние точки множества $CE\langle A, B\rangle$ и оператор T_0.

Теорема 2. *Следующие утверждения эквивалентны:*

а) T — крайняя точка множества $CE\langle A, B\rangle$;

б) T порождается по формулам (1) *или* (2) *изометрией или коизометрией X или Y;*

в) *выполнено одно из равенств* $(I-TT^*)^{1/2}H\cap N_B=\{0\}$, $(I-T^*T)^{1/2}H\cap N_A=\{0\}$.

На множестве $CE\langle A, B\rangle$ рассмотрим отображения $K_{N_A}(T)=(I-T^*T)_{N_A}$, $K_{N_B}(T)=(I-TT^*)_{N_B}$. Образами K_{N_A} и K_{N_B} являются частично упорядоченные подмножества неотрицательных операторов.

Следующее утверждение дает характеристику оператора T_0.

Теорема 3. *Для того чтобы оператор $S\in CE\langle A, B\rangle$ совпадал с оператором T_0, необходимо выполнение двух и достаточно выполнения од-*

ного из следующих равенств:

$$\sup_{T\in CE(A,B)} K_{N_A}(T) = K_{N_A}(S), \quad \sup_{T\in CE(A,B)} K_{N_B}(T) = K_{N_B}(S).$$

4. Назовем Q-функцией дуальной пары $\langle A, B\rangle$ оператор-функцию $Q(z) = zC_2^{1/2}(I - zT_0)^{-1}C_1^{1/2}$. $Q(z)$ голоморфна в единичном круге $|z| < 1$ со значениями в $[N_B^0, N_A^0]$. Кроме того, $Q(0) = 0$. Следующая теорема устанавливает связь Q-функции пары $\langle A, B\rangle$ с характеристической функцией (по Б. Секефальви-Надю, К. Фояшу) сжатия T_0^* $\Theta_{T_0^*}(z) = [-T_0^* + z(I - T_0^*T_0)^{1/2}(I - zT_0)^{-1}(I - T_0T_0^*)^{1/2}]|_{\overline{(I-T_0T_0^*)^{1/2}H}}$.

Теорема 4. *Существуют изометрические операторы* $V_0 \in [N_B^0, L_B^0]$, $U_0 \in [N_A^0, L_A^0]$ *такие, что справедливо равенство* $Q(z) = U_0^* P_{L_A^0}\Theta_{T_0^*}(z)V_0$, $|z| < 1$.

Отметим, что теперь из теоремы 4, равенства $Q(0) = 0$ и сжимаемости характеристической функции на основании леммы Шварца следует неравенство $\|Q(z)\| \leqslant |z|$, $|z| < 1$.

5. Пусть гильбертово пространство $\tilde{H}$ содержит H как подпространство, $\tilde{P}_H$ — ортопроектор на H, $\tilde{T}$ — сжимающее расширение дуальной пары $\langle A, B\rangle$ в $\tilde{H}$. Обобщенной резольвентой назовем оператор $\tilde{R}_z = \tilde{P}_H \times (z\tilde{T} - I)^{-1}|_H$.

Обозначим $R_z^0 = (zT_0 - I)^{-1}$ каноническую резольвенту T_0.

Теорема 5. *Формула* $\tilde{R}_z = R_z^0 - zR_z^0X(z)C_1^{1/2}[I - Q(z)X(z)]^{-1}C_2^{1/2}R_z^0$ *устанавливает при* $|z| < 1$ *взаимно-однозначное соответствие между совокупностью обобщенных резольвент сжимающих расширений дуальной пары сжатий* $\langle A, B\rangle$ *и совокупностью сжимающих аналитических в единичном круге оператор-функций* $X(z) \in [N_A^0, N_B^0]$. *Каноническим резольвентам и только им соответствуют постоянные оператор-функции.*

6. Рассмотрим случай эрмитова сжатия A (дуальной пары $\langle A, A\rangle$).

В [9] установлены равенства $T_0 = (A_M + A_\mu)/2$, $C_1 = C_2 = (A_M - A_\mu)/2$, $N_A^0 = N_B^0$, где A_M и A_μ — «мягкое» и «жесткое» самосопряженные расширения оператора A, введенные в [7]. Из наших результатов следует, что в этом случае $Q(z)$ обладает следующими аналитическими свойствами:

а) $Q(z)$ голоморфна вне объединения лучей $(-\infty, -1]$, $[1, +\infty)$;

б) $s\text{-}\lim_{z\downarrow -1} Q(z) = -I|_{N_A^0}$; $s\text{-}\lim_{z\uparrow 1} Q(z) = I|_{N_A^0}$;

в) $\|Q(z)\| \leqslant |z| < 1$;

г) $\operatorname{Im} Q(z)/\operatorname{Im} z \geqslant 0$.

Свойство б) можно также вывести из описания sc-резольвент, данного в [8] с помощью введенных там Q_M- и Q_μ-функций эрмитова сжатия.

Оказывается, что справедливы равенства

$$Q_\mu(\lambda) = (I - Q(1/\lambda))(I + Q(1/\lambda))^{-1}, \quad Q_M(\lambda) = -Q_\mu^{-1}(\lambda) =$$

$$= (I + Q(1/\lambda))(Q(1/\lambda) - I)^{-1}, \quad \lambda \in \operatorname{Ext}[-1, 1].$$

Из этих равенств и на основании свойства в) Q-функции получаем при $|\lambda| > 1$

$$\operatorname{Re} Q_\mu(\lambda) \geqslant (|\lambda| - 1)/(|\lambda| + 1), \quad \operatorname{Re} Q_M(\lambda) \leqslant -(|\lambda 1|-)/(|\lambda| + 1).$$

Примечание. После того, как настоящая статья была сдана в печать, автор узнал о работе [11], в которой также получено описание обобщенных резольвент дуальной пары сжатий.

1. *Шмульян Ю. Л., Яновская Р. Н.* О блоках сжимающей операторной матрицы.— Изв. вузов. Математика, 1981, № 7, с. 72—75.
2. *Arsene Gr., Gheondea A.* Completting matrix contractions.— J. Oper. Theory, 1982, 7, N 1, p. 179—189.
3. *Davis C., Kahan W. M., Weinberger H. F.* Norm-preserving dilations and their applications to optimal error bounds.— SIAM J. Numer. Anal, 1982, **19**, N 3, p. 445—469.
4. *Crandall M. G.* Norm preserving extensions of linear transformations on Hilbert spaces.— Proc. Amer. Math. Soc., 1969, **21**, N 2, p. 335—340.
5. *Langer H., Textorius B.* Generalized resolvents of contractions.— Acta Sci. Math., 1982, **44**, N 1, p. 125—131.
6. *Sz.-Nagy B., Foias C.* Forme triangulaire d'une contraction et factorisation de sa fonction caracteristique.— Acta Sci. Math., 1967, **28**, p. 201—212.
7. *Крейн М. Г.* Теория самосопряженных расширений полуограниченных эрмитовых операторов и ее приложения. I.— Мат. сб., 1947, **20**, № 3, с. 431—490.
8. *Крейн М. Г., Овчаренко И. Е.* О *Q*-функциях и sc-резольвентах неплотно заданных эрмитовых сжатий.— Сиб. мат. журн., 1977, **18**, № 5, с. 1032—1056.
9. *Арлинский Ю. М., Цекановский Э. Р.* Несамосопряженные сжимающие расширения эрмитова сжатия и теоремы М. Г. Крейна.— Успехи мат. наук, 1982, **37**, № 1, с. 131—132.
10. *Арлинский Ю. М., Цекановский Э. Р.* Обобщенные резольвенты квазисамосопряженных сжимающих расширений эрмитова сжатия.— Укр. мат. журн., 1983, **35**, № 5, с. 601—603.
11. *Langer H., Textorius B.* Generalized resolvents of dual pairs of contractions. —In: Invar. Subsp. and Other Top. 6-th Int. Conf. Oper. Theory, Timisoara and Herculane. June 1—11, 1981, Basel, 1982, p. 130—118.

Ворошиловгр. машиностроит. ин-т

Поступила 02.02.84,
после доработки — 20.04,84