УДК 517.929.5

*Л. В. Потапова*

# Принцип усреднения и периодические решения параболического уравнения с запаздывающим аргументом

Для различных уравнений принцип усреднения обосновывался как аналитическими, так и топологическими методами во многих работах (см., напр., [1—5]). В данной статье проводится обоснование этого принципа в задаче о периодических решениях для уравнения с запаздывающим аргументом вида

$$du/dt + \varepsilon Au(t) + \varepsilon kAu(t-h) = \varepsilon f(t, u(t), u(t-h)), \tag{1}$$

где $t \geqslant 0$, $h = \text{const} > 0$, $|k| < 1$; $\varepsilon$ — малый положительный параметр. Оператор $A: \mathcal{D}(A) \subset H \to H$ ($H$ — гильбертово пространство) является положительно определенным и самосопряженным. Уравнение (1) по аналогии с терминологией из [6] будем называть параболическим с запаздывающим аргументом.

Сложность изучения уравнения (1) состоит в том, что эквивалентный интегральный оператор не является даже непрерывным в удобных для исследования пространствах. При изучении задачи о неподвижных точках этого оператора применяется метод из [7], основанный на переходе к системе аппроксимирующих операторов, которые вполне непрерывны и могут быть исследованы с помощью теории вращения вполне непрерывных векторных полей (см. [8]).

1. Постановка задачи и формулировка основного результата. Рассмотрим задачу о периодических решениях уравнения (1) при малом значении параметра $\varepsilon > 0$. Предположим, что оператор $A$ и функции $f$ удовлетворяют следующим условиям:

1) оператор $A$ положительно определенный и самосопряженный;
2) существует вполне непрерывный оператор $A^{-1}$;
3) функция $f: R \times H \times H \to H$ $T$-периодична по первому аргументу, непрерывна по совокупности переменных и ограничена на ограниченных множествах.

Всюду ниже через $C_T(H)$ обозначается пространство непрерывных $T$-периодических на вещественной положительной полуоси функций со значениями в $H$ и равномерной нормой.

Наряду с (1) рассмотрим семейство уравнений, зависящих от параметра $\alpha \in (0, 1)$, вида

$$du/dt + \varepsilon Au(t) + \varepsilon kA^{\alpha}u(t-h) = \varepsilon f(t, u(t), u(t-h)), \tag{2}$$

где $A^{\alpha}$ — дробная степень оператора $A$ (см. [6]). По аналогии с [6] для задачи о периодических решениях уравнения (2) выпишем соответствующее интегральное уравнение $u = F_{\alpha}^{\varepsilon} u$, где

$$(F_{\alpha}^{\varepsilon}u)(t) = \varepsilon V(\varepsilon t)(I - V(\varepsilon T))^{-1} \int_0^T (V(\varepsilon(T-s)) f(s, u(s), u(s-h)) -$$
$$- kA^{\alpha}V(\varepsilon(T-s))\bar{u}(s-h))\, ds + \varepsilon \int_0^t (V(\varepsilon(t-s)) f(s, u(s), \bar{u}(s-h)) -$$
$$- kA^{\alpha}V(\varepsilon(t-s))\bar{u}(s-h))\, ds. \tag{3}$$

Здесь $\bar{u}$ — периодическое продолжение функции $u$ на полуось $[-h, \infty)$, $V(t) = e^{-At}$, $t \geqslant 0$,— сильно непрерывная полугруппа операторов (см. [6]). При каждом $\alpha \in (0, 1)$ и $\varepsilon > 0$ оператор $F_{\alpha}^{\varepsilon}$ вполне непрерывен. Это позволяет доказать существование неподвижных точек данного оператора, применяя методы, связанные с теорией вращения вполне непрерывных векторных полей (см. [8]). Неподвижные точки оператора $F_{\alpha}^{\varepsilon}$ называют (см. [6])

обобщенными $T$-периодическими решениями уравнения (2). Оператор $F_1^\varepsilon$ не обладает свойством полной непрерывности в $C_T\ (H)$. Поэтому под обобщенным $T$-периодическим решением уравнения (1) будем понимать предельную функцию $u_\varepsilon$ последовательности $\{u_{n,\varepsilon}\}_{n=1}^\infty$ неподвижных точек операторов $F_{\alpha_n}^\varepsilon$, $\alpha_n \in (0, 1)$, $\alpha_n \to 1$ (см. [7]).

Заметим, что для существования такого решения достаточно, например, чтобы $\{u_{n,\varepsilon}\}_{n=1}^\infty$ была ограниченной в $C_T(H)$. Кроме того, всякое обобщенное решение уравнения (1) будет его классическим решением, если, например, функция $f$ удовлетворяет условию Гельдера по совокупности переменных (см. [7]).

Для уравнения (1) рассмотрим усредненное уравнение

$$du/dt + \varepsilon(1 + k)\,Au(t) = \varepsilon f_0(u(t)), \tag{4}$$

где

$$f_0(u) = T^{-1}\int_0^T f(t, u, u)\,dt, \quad u \in H. \tag{5}$$

Из (5) вытекает, что функция $f_0$ в силу условия 3) непрерывна и ограничена на ограниченных множествах. Зададим операторы $\tilde\Phi$ и $\Phi$, действующие в $H$ и $C_T\ (H)$ соответственно, формулами

$$\tilde\Phi u = (1 + k)^{-1} A^{-1} f_0(u), \quad u \in H, \quad \Phi u = \tilde\Phi u(0), \quad u \in C_T(H). \tag{6}$$

Основной результат данной работы — следующая теорема.

Теорема. *Пусть выполнены условия* 1)—3) *и уравнение* (4) *имеет стационарное решение* $u_0(t) \equiv u_0$. *Если* $u_0$ *— изолированная особая точка ненулевого топологического индекса относительно векторного поля* $I - \tilde\Phi$, *то при всех достаточно малых* $\varepsilon$ *уравнение* (1) *имеет обобщенное $T$-периодическое решение* $u_\varepsilon$ *такое, что* $u_\varepsilon \to u_0$ *при* $\varepsilon \to 0$ *в* $C_T\ (H)$.

Замечание. Для того чтобы индекс особой точки $u_0$ относительно векторного поля $I - \tilde\Phi$ был отличен от нуля в случае, когда $f_0$ дифференцируема в этой точке, достаточно, например, чтобы спектр оператора $(1 + k)^{-1} A^{-1} f_0'(u_0)$ не содержал единицу (см. [8]).

2. Доказательство теоремы. Покажем сначала, что для любого $\eta > 0$ существуют такие числа $\alpha_\eta$ и $\varepsilon_\eta$, что при всех $\alpha \in (\alpha_\eta, 1)$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_\eta)$ векторные поля $I - \Phi$ и $I - F_\alpha^\varepsilon$ линейно гомотопны на сфере $S(u_0; \eta) \subset C_T(H)$ с центром в $u_0$ и радиусом $\eta$.

Предположим противное: пусть существуют число $\eta_0$ и последовательности $\alpha_n \to 1$, $\varepsilon_n \to 0$, $\lambda_n \in [0, 1]$, $u_n \in S(u_0, \eta_0)$ такие, что

$$u_n = \lambda_n F_{\alpha_n}^{\varepsilon_n} u_n + (1 - \lambda_n)\,\Phi u_n. \tag{7}$$

В силу изолированности $u_0$ можно считать, что в замкнутом шаре $\hat B(u_0, \eta_0) \subset H$ нет особых точек поля $I - \tilde\Phi$

Последовательность $\{u_n\}$ оказывается предкомпактной в $C_T(H)$, а ее предельная функция $u_1$ — постоянной $(u_1(t) \equiv u_1)$. Доказательство этого факта, для удобства изложения, приведено в следующем пункте (см. лемму 2).

Так как $\|u_n\| = \eta_0$, то $\|u_1\| = \eta_0$. Покажем, что $u_1$ — особая точка поля $I - \tilde\Phi$. Для этого в равенстве (7) перейдем к пределу при $n \to \infty$, считая без ограничения общности, что $u_n \to u_1$, $\lambda_n \to \lambda_0$, $t \in [T, 2T]$.

Используя (3) и (6), перепишем (7) в следующем виде:

$$u_n(t) = (1 - \lambda_n)(1 + k)^{-1} A^{-1} f_0(u_n(0)) + \lambda_n \varepsilon_n V(\varepsilon_n t)(I - V(\varepsilon_n T))^{-1} \times$$

$$\times \int_0^T V(\varepsilon_n(T - s))\, f(s, u_n(s), \bar u_n(s - h))\,ds + \lambda_n \varepsilon_n \int_0 V(\varepsilon_n(t - s))\, f(s, u_n(s),$$

$$u_n(s-h))\,ds - k\lambda_n\varepsilon_n \int_0^t A^{\alpha_n} V(\varepsilon_n(t-s))\,\bar{u}_n(s-h))\,ds - k\lambda_n\varepsilon_n V(\varepsilon_n t) \times$$

$$\times (I - V(\varepsilon_n T))^{-1} \int_0^T A^{\alpha_n}(\varepsilon_n(T-s))\,\bar{u}_n(s-h)\,ds = \mathcal{I}_{1,n} + \mathcal{I}_{2,n} + \mathcal{I}_{3,n} + \mathcal{I}_{4,n} + \mathcal{I}_{5,n}. \tag{8}$$

Исследуем поведение каждого из слагаемых $\mathcal{I}_{1,n} - \mathcal{I}_{5,n}$ при $n \to \infty$.

Так как выполнены условия 2), 3), то $\mathcal{I}_{1,n} \underset{n\to\infty}{\Longrightarrow} (1-\lambda_0)\,\tilde{\Phi} u_1$.

Рассмотрим $\mathcal{I}_{2,n}$:

$$\mathcal{I}_{2,n} = \lambda_n A^{-\beta}(\varepsilon_n V(\varepsilon_n t)(I - V(\varepsilon_n T))^{-1} \int_0^T A^{\beta} V(\varepsilon_n(T-s))\, f(s, u_1, u_1)\,ds) +$$

$$+ \lambda_n \varepsilon_n V(\varepsilon_n t)(I - V(\varepsilon_n T))^{-1} \int_0^T V(\varepsilon_n(T-s))\,(f(s, u_n(s), \bar{u}_n(s-h)) -$$

$$- f(s, u_1, u_1))\,ds = \mathcal{I}^1_{2,n} + \mathcal{I}^2_{2,n}.$$

Как показано в [5], $\mathcal{I}^1_{2,n} \underset{n\to\infty}{\Longrightarrow} \lambda_0(1+k)\,\tilde{\Phi} u_1$. Покажем, что $\mathcal{I}^2_{2,n} \underset{n\to\infty}{\Longrightarrow} 0$. Заметим (см. [6]), что при всех $\rho \geqslant 0$ операторы $A^{\rho} V(t)$ ограничены и их нормы удовлетворяют оценке

$$\| A^{\rho} V(t) \| \leqslant \begin{cases} \rho^{\rho}(et)^{-\rho}, & \rho \geqslant t > 0, \\ e^{-t} & \rho < t. \end{cases} \tag{9}$$

Поэтому справедлива формула

$$(I - V(t))^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} V(it), \qquad t > 0. \tag{10}$$

Следовательно, слагаемое $\mathcal{I}^2_{2,n}$ может быть оценено так:

$$\| \mathcal{I}^2_{2,n} \| \leqslant \varepsilon_n T (1 - \exp(-\varepsilon_n T))^{-1} \max_{s\in[0,T]} \| f(s, u_n(s), \bar{u}_n(s-h)) - f(s, u_1, u_1) \|.$$

Из непрерывности функции $f$ следует, что последнее выражение стремится к нулю. Итак, $\mathcal{I}_{2,n} \underset{n\to\infty}{\Longrightarrow} \lambda_0(1+k)\,\tilde{\Phi} u_1$.

Слагаемое $\mathcal{I}_{3,n}$, очевидно, стремится к нулю при $n \to \infty$.

Рассмотрим $\mathcal{I}_{4,n}$. Из (9) и равенства (см. [6])

$$\int_0^t AV(t-s)\,x\,ds = (V(t) - I)\,x, \quad t > 0, \quad x \in H, \tag{11}$$

вытекает оценка

$$\| \mathcal{I}_{4,n} \| \leqslant \varepsilon_n \int_0^t \| A^{\alpha_n} V(\varepsilon_n(t-s)) \| \, \| \bar{u}_n(s-h) - \bar{u}_n(t-h) \| \, ds +$$

$$+ \| A^{\alpha_n}(V(\varepsilon_n t) - I)\,\bar{u}_n(t-h) \|.$$

Из доказательства леммы 2 следующего пункта видно, что для функций $u_n$ справедливо соотношение

$$\| u_n(t_1) - u_n(t_2) \| \leqslant C(\beta)\,\varepsilon_n^{\beta} |t_1 - t_2|^{\beta}, \quad \beta \in (0, 1), \quad t_1, t_2 > 0. \tag{12}$$

Тогда в силу равномерной ограниченности операторов $A^{-\rho}$, $\rho \in (0, 1)$ (см. [6]) имеет место оценка $\| \mathcal{I}_{4,n} \| \leqslant C_1(\beta)\,\varepsilon_n^{\beta} + C_2 \| (V(\varepsilon_n t) - I)\,u_n(t-h) \|$. Последнее выражение стремится к нулю при $n \to \infty$ в силу сильной непрерывности полугруппы $V(t)$ и предкомпактности $\{u_n\}$.

Остается рассмотреть слагаемое $\mathscr{I}_{5,n}$. Преобразуем его:

$$\mathscr{I}_{5,n} = (-k\lambda_n\varepsilon_n) A^{\alpha_n-1} V(\varepsilon_n t)(I - V(\varepsilon_n T))^{-1} \int_t^T AV(\varepsilon_n (T-s)) u_1 ds +$$

$$+ (-k\lambda_n\varepsilon_n) A^{\alpha_n-1} V(\varepsilon_n t)(I - V(\varepsilon_n T))^{-1} \int_0^T AV(\varepsilon_n (T-s)) (\bar{u}_n (T-h) - u_1) ds +$$

$$+ (-k\lambda_n\varepsilon_n) A^{\alpha_n-1} V(\varepsilon_n t)(I - V(\varepsilon_n T))^{-1} \int_0^T AV(\varepsilon_n (T-s)) (\bar{u}_n (s-h) -$$

$$- u_n (T-h)) ds = \mathscr{I}^1_{5,n} + \mathscr{I}^2_{5,n} + \mathscr{I}^3_{5,n}.$$

Легко показать, применяя (11), что $\mathscr{I}^1_{5,n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -k\lambda_0 u_1$, $\mathscr{I}^2_{5,n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Рассмотрим $\mathscr{I}^3_{5,n}$. Выберем число $N = N(n) = [(1-\varepsilon_n)^{-1}]$. Тогда

$$(I - V(\varepsilon_n T))^{-1} = I + \sum_{i=1}^{N} V(\varepsilon_n T i) + V(\varepsilon_n T (N+1)) \sum_{i=0}^{\infty} V(\varepsilon_n T i).$$

Поэтому

$$\| \mathscr{I}^3_{5,n} \| \leqslant \| \varepsilon_n A^{\alpha_n-1} V(\varepsilon_n t) \int_0^T AV(\varepsilon_n (T-s)) (\bar{u}_n (s-h) - \bar{u}_n (T-h)) ds +$$

$$+ \| \varepsilon_n A^{\alpha_n-1} V(\varepsilon_n t) \sum_{i=1}^{N} \int_0^T AV(\varepsilon_n (T(i+1)-s)) (\bar{u}_n (s-h) - \bar{u}_n (T-h)) ds +$$

$$+ \| \varepsilon_n V(\varepsilon_n t) \int_0^T AV(\varepsilon_n (T(N+2)-s)) \sum_{i=0}^{\infty} V(\varepsilon_n T i) (\bar{u}_n (s-h) - \bar{u}_n (T-h)) ds \|.$$

Используя оценку (9) и неравенство (12), получаем:

$$\| \mathscr{I}^3_{5,n} \| \leqslant M_1(\beta)\varepsilon_n^\beta + M_2(\beta)\varepsilon_n^\beta \sum_{i=1}^{N} (\ln T(i+1) - \ln Ti) + M_3(\beta)\varepsilon_n^{\beta+1} \times$$

$$\times \int_0^T (\varepsilon_n (T(N+2)-s))^{-1} ds \sum_{i=0}^{\infty} \exp(-\varepsilon_n T i) \leqslant$$

$$\leqslant M(\beta)(\varepsilon_n^\beta + \varepsilon_n^\beta \ln (N+1) + \varepsilon_n^{\beta-1} (N+1)^{-1}).$$

В силу выбора $N$ справедливы неравенства $1 \leqslant \varepsilon_n (N+1) \leqslant 2$. Тогда $\| \mathscr{I}^3_{5,n} \| \leqslant M(\beta)\varepsilon_n^\beta (2 + \ln 2 - \ln \varepsilon_n)$. Итак, $\mathscr{I}^3_{5,n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, $\mathscr{I}_{5,n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -k\lambda_0 u_1$.

Переходя в (8) к пределу при $n\to\infty$, получаем $u_1 = (1-\lambda_0)\bar{\Phi} u_1 + \lambda_0 (1+k)\bar{\Phi} u_1 - k\lambda_0 u_1$, т. е. $u_1 = \bar{\Phi} u_1$, что противоречит изолированности точки $u_0$.

Итак, векторные поля $I - \Phi$ и $I - F^\varepsilon_\alpha$ гомотопны на сфере $S(u_0, \eta)$ при $\alpha \in (\alpha_\eta, 1)$ и $\varepsilon \in (0, \varepsilon_\eta)$. Тогда (см. [8]) $\gamma(I - \Phi, S(u_0, \eta)) = \gamma(I - F^\varepsilon_\alpha, S(u_0, \eta))$. Так как $\operatorname{ind}(u_0, I - \bar{\Phi})$ отличен от нуля, то при всех достаточно малых $\eta > 0$ вращение $\gamma(I - \bar{\Phi}, \bar{S}(u_0, \eta)) \neq 0$, а значит, в силу принципа родственности (см. [8]) $\gamma(I - \Phi, S(u_0, \eta)) \neq 0$. Тогда $\gamma(I - F^\varepsilon_\alpha, S(u_0, \eta)) \neq 0$. Из последнего следует, что операторы $F^\varepsilon_\alpha$, $\alpha \in (\alpha_\eta, 1)$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_\eta)$, имеют неподвижные точки $u_{\alpha,\varepsilon} \in B(u_0, \eta)$ — замкнутому шару пространства $C_T(H)$.

Для каждого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_\eta)$ выберем $\{\alpha_n\} \subset (\alpha_\eta, 1)$, $\alpha_n \to 1$, и рассмотрим $\{u_{n,\varepsilon}\}_{n=1}^\infty$ неподвижных точек операторов $F^\varepsilon_\alpha$ при $\alpha = \alpha_n$. Так как $\{u_{n,\varepsilon}\}_{n=1}^\infty \subset B(u_0, \eta)$, то (см. [7]) существует функция $u_\varepsilon \in B(u_0, \eta)$, представляющая собой обобщенное $T$-периодическое решение уравнения (1). Очевидно, что $u_\varepsilon \to u_0$ при $\varepsilon \to 0$ в $C_T(H)$. Теорема доказана.

3. Вспомогательные леммы.

Лемма 1. *Пусть оператор $A$ удовлетворяет условию* 1). *Тогда для любых* $t>0$, $\tau\geqslant 1$, $j=0, 1, \dots, \beta$, $\alpha\in(0, 1)$

$$\mathcal{I}_j=\int\limits_0^t\int\limits_0^{s_0+\tau}\dots\int\limits_0^{s_{j-1}+\tau}\|A^{j\alpha+\beta}V(t+j\tau-s_j)\|\,ds_0\dots ds_j\leqslant\frac{j+1}{j(1-\alpha)+(1-\beta)}+1. \tag{13}$$

Доказательство. С помощью оценки (9) легко проверить, что при таких $t$, $\tau$, $j$, $\alpha$, $\beta$ интеграл $\mathcal{I}_i$ конечен. Поэтому в нем можно поменять порядок интегрирования. Расширим область интегрирования и в силу неогрицательности подынтегральной функции получим

$$\mathcal{I}_j\leqslant(j!)^{-1}\int\limits_0^{t+j\tau}\|A^{j\alpha+\beta}V(\mu)\|\,\mu^j d\mu.$$

Представим последний интеграл в виде суммы двух интегралов по промежуткам $[0, j\alpha+\beta]$ и $[j\alpha+\beta, t+j\tau]$. Оценивая эти интегралы с помощью (9), приходим к неравенству

$$\mathcal{I}_j\leqslant\frac{(j\alpha+\beta)^{j+1}\exp(-j\alpha-\beta)}{j(1-\alpha)+(1-\beta)}+1\leqslant\frac{j+1}{j(1-\alpha)+(1-\beta)}+1.$$

Лемма 2. *Пусть выполнены условия теоремы, а также существует* $\{u_n\}\subset S(u_0, \eta)$, *для которой справедливо равенство* (7). *Тогда* $\{u_n\}$ *предкомпактна в* $C_T(H)$ *и ее предельными функциями могут быть только функции-константы.*

Доказательство. Воспользуемся теоремой Асколи, согласно которой достаточно показать, что функции $u_n$ равномерно ограничены и равностепенно непрерывны и для любого $t_0\in[T, 2T]$ последовательность $\{u_n(t_0)\}$ предкомпактна в $H$.

Так как функции $u_n\in S(u_0, \eta)$, то они равномерно ограничены. Покажем, что для функций $u_n$ имеет место неравенство (12), из которого следует равностепенная непрерывность этих функций.

Используя (3) и (6), перепишем (7) в виде

$$u_n(t)=V(\varepsilon_n t)\tilde{u}_n+\lambda_n\varepsilon_n\int\limits_0^t V(\varepsilon_n(t-s_0))\,\varphi_n(s_0)\,ds_0-k\lambda_n\varepsilon_n\int\limits_0^t A^{\alpha_n}V(\varepsilon_n(t-s_0))\times$$
$$\times\bar{u}_n(s_0-h)\,ds_0+g_nA^{-\alpha_n}f_{0,n}, \tag{14}$$

где $g_n=(1-\lambda_n)(1+k)^{-1}$, $\varphi_n(s)=f(s, u_n(s), \bar{u}_n(s-h))$, $f_{0,n}=A^{\alpha_n-1}f_0\times(u_n(0))$, $\tilde{u}_n=u_n(0)-g_nA^{-\alpha_n}f_{0,n}$. Для каждой функции $u_n$ выберем натуральное число $l(n)$ так, чтобы $(l(n)T-h)\,\varepsilon_n\geqslant 1$. Положим $\tau_n=l(n)T-h$. Тогда в силу $T$-периодичности функций $u_n$ и (14) для любых $n$ и $i=0, 1, \dots$ справедливо равенство

$$\bar{u}_n(s_i-h)=u_n(s_i+\tau_n)=V(\varepsilon_n(s_i+\tau_n))\,\tilde{u}_n+g_nA^{-\alpha_n}f_{0,n}+$$
$$+\lambda_n\varepsilon_n\int\limits_0^{s_i+\tau_n}V(\varepsilon_n(s_i+\tau_n-s_{i+1}))\,\varphi_n(s_{i+1})\,ds_{i+1}-k\lambda_n\varepsilon_n\int\limits_0^{s_i+\tau_n}A^{\alpha_n}V(\varepsilon_n(s_i+$$
$$+\tau_n-s_{i+1}))\,\bar{u}_n(s_{i+1}-h)\,ds_{i+1}. \tag{15}$$

Если в (14) вместо $\bar{u}(s_0-h)$ подставить эквивалентное выражение (15) при $i=0$ и привести подобные, используя полугрупповое свойство $V(t)$, получим, что $u_n(t)$ равняется некоторому выражению, содержащему $\bar{u}(s_1-h)$. Затем в это выражение вместо $\bar{u}(s_1-h)$ подставим (15) при $i=1$ и опять приведем подобные. Такое преобразование равенства (14) совершим $j$ раз. В итоге получим

$$u_n(t)=v_{n,j}(t)+w_{n,j}(t),\qquad j=1, 2, \dots, \tag{16}$$

где функции $v_{n,j}$, $w_{n,j}$ имеют следующий вид:

$$v_{n,j}(t) = V(\varepsilon_n t)\tilde{u}_n + g_n A^{-\alpha_n} f_{0,n} + \int_0^t V(\varepsilon_n(t-s))\varphi_n(s)\,ds + \sum_{i=1}^{j}(-\lambda_n\varepsilon_n k)^i \times$$

$$\times \left\{ \int_0^t \int_0^{s_0+\tau_n} \dots \int_0^{s_{i-2}+\tau_n} A^{(i-1)\alpha_n}(A^{\alpha_n}V(\varepsilon_n(t+i\tau_n))\tilde{u}_n + g_n V(\varepsilon_n(t+(i-1)\tau_n -\right.$$

$$-s_{i-1}) f_{0,n})\,ds_0 \dots ds_{i-1} + \lambda_n\varepsilon_n \int_0^t \int_0^{s_0+\tau_n} \int_0^{s_{i-1}+\tau_n} A^{i\alpha_n} V(\varepsilon_n(t+i\tau_n - s_i)\varphi_n \times \tag{17}$$

$$\left. \times (s_i)\,ds_0 \dots ds_i \right\}, \quad w_{n,j}(t) = (-k\lambda_n\varepsilon_n)^{j+1} \int_0^t \int_0^{s_0+\tau_n} \dots \int_0^{s_{j-1}+\tau_n} A^{(j+1)\alpha_n} \; V(\varepsilon_n(t+$$

$$+ j\tau_n - s_j)\bar{u}_n(s_j - h)\,ds_0 \dots ds_j.$$

Покажем, что для каждого $n$ $w_{n,j}(t)$ стремится к нулю при $j \to \infty$ равномерно относительно $t \geqslant 0$. Действительно, положив $\mu_i = \varepsilon_n s_i$, $i = 0, 1, \dots$ $\dots, j$, в силу леммы 1 имеем

$$\| w_{n,j}(t) \| \leqslant |k|^{j+1} \eta((1-\alpha_n)^{-1} + 1). \tag{18}$$

Последнее выражение стремится к нулю, так как $|k| < 1$.

Таким образом, для доказательства (12) достаточно рассмотреть $\| v_{n,j} \times$ $\times (t_1 + m(n)T) - v_{n,j}(t_2 + m(n)T) \|$, где $m(n)$ — некоторое натуральное число, которое выбирается так, чтобы выполнялось неравенство $\varepsilon_n(t_i +$ $+ m(n)T) = \varepsilon_n t_i' > 1$, $i = 1, 2$. Без ограничения общности можно считать, что $|t_1 - t_2| < 1$, $t_2 > t_1$. Тогда (см. (17))

$$\| v_{n,j}(t_1') - v_{n,j}(t_2') \| \leqslant \| (V(\varepsilon_n t_2') - V(\varepsilon_n t_1'))\tilde{u}_n \| + \sum_{i=1}^{j} (\varepsilon_n |k|)^i \times$$

$$\times \int_0^{t_1'} \int_0^{s_0+\tau_n} \dots \int_0^{s_{i-2}+\tau_n} \| A^{i\alpha_n}(V(\varepsilon_n(t_2' + i\tau_n)) - V(\varepsilon_n(t_1' + i\tau_n))\tilde{u}_n \| \,ds_0 \dots ds_{i-1} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{j} (\varepsilon_n |k|)^i \int_{t_1'}^{t_2'} \int_0^{s_0+\tau_n} \dots \int_0^{s_{i-2}+\tau_n} \| A^{i\alpha_n} V(\varepsilon_n(t_2' + i\tau_n))\tilde{u}_n \| \,ds_0 \dots ds_{i-1} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{j} (\varepsilon_n |k|)^i g_n \int_0^{t_1'} \int_0^{s_0+\tau_n} \dots \int_0^{s_{i-2}+\tau_n} \| A^{(i-1)\alpha_n}(V(\varepsilon_n(t_2' + (i-1)\tau_n - s_{i-1})) -$$

$$- V(\varepsilon_n(t_1' + (i-1)\tau_n - s_{i-1}))f_{0,n} \| \,ds_0 \dots ds_{i-1} + \sum_{i=1}^{j} (\varepsilon_n |k|)^i g_n \times$$

$$\times \int_{t_1'}^{t_2'} \int_0^{s_0+\tau_n} \dots \int_0^{s_{i-2}+\tau_n} \| A^{(i-1)\alpha_n} V(\varepsilon_n(t_2' + (i-1)\tau_n - s_{i-1}))f_{0,n} \| \,ds_0 \dots ds_{i-1} +$$

$$+ \sum_{i=0}^{j} \varepsilon_n^{i+1} |k|^i \int_0^{t_1'} \int_0^{s_0+\tau_n} \dots \int_0^{s_{i-1}+\tau_n} \| A^{i\alpha_n}(V(\varepsilon_n(t_2' + i\tau_n - s_i)) - V(\varepsilon_n(t_1' + i\tau_n -$$

$$- s_i)))\varphi_n(s_i) \| \,ds_0 \dots ds_i + \sum_{i=0}^{j} \varepsilon_n^{i+1} |k|^i \int_{t_1'}^{t_2'} \int_0^{s_0+\tau_n} \dots \int_0^{s_{i-1}+\tau_n} \| A^{i\alpha_n} V(\varepsilon_n(t_2' + i\tau_n -$$

$$- s_i))\varphi_n(s_i) \| \,ds_0 \dots ds_i = \sum_{i=1}^{7} \mathcal{I}_i.$$

Оценим отдельно каждое из слагаемых $\mathcal{I}_1 - \mathcal{I}_7$. В силу равномерной ограниченности операторов $A^{-\rho}$, $\rho \in (0, 1)$, и условий 2), 3) существует такое число $M > 0$, что справедливы оценки $\|\tilde{u}_n\|$, $\|f_{0,n}\|$, $\|\varphi_n(s)\| \leqslant M$, $n = 0, 1, \dots, s \in [0, 2T]$. Кроме того (см. [6]), для любого $\beta \in [0, 1)$

$$\|A^{-\beta}(V(t) - I)\| \leqslant c(\beta)\, t^{\beta}, \quad t > 0. \tag{19}$$

Тогда из (9) и (19) вытекает неравенство

$$\mathcal{I}_1 \leqslant \|A^{\beta} V(\varepsilon_n t_1')\| \|A^{-\beta}(V(\varepsilon_n(t_2 - t_1)) - I)\tilde{u}_n\| \leqslant C_1(\beta)\, \varepsilon_n^{\beta} |t_1 - t_2|^{\beta}.$$

Для оценки $\mathcal{I}_2$ применим (9):

$$\mathcal{I}_2 \leqslant M(\beta)\, \varepsilon_n^{\beta} |t_1 - t_2|^{\beta} \sum_{i=1}^{j} (i!)^{-1} |k|^i \|A^{i\alpha_n + \beta} V(\varepsilon_n(t_2' + i\tau_n))\| (\varepsilon_n(t_2' + i\tau_n))^i \leqslant$$

$$\leqslant C_2(\beta)\, \varepsilon_n^{\beta} |t_1 - t_2|^{\beta}.$$

Чтобы оценить $\mathcal{I}_3$, во всех интегралах, входящих в это слагаемое, сделаем замену переменных $\mu_m = \varepsilon_n s_m$, $m = 0, \dots, i-1$, $i = 1, \dots, j$, и применим (9) и лемму 1. Тогда в силу выбора $\tau_n$ и $m(n)$

$$\mathcal{I}_3 \leqslant M \int_{\varepsilon_n t_1'}^{\varepsilon_n t_2'} \|A^{\alpha_n} V(\varepsilon_n(t_2' + \tau_n))\| d\mu_0 + M \|A^{\alpha_n} V(\varepsilon_n \tau_n)\| \sum_{i=2}^{j} |k|^i \times$$

$$\times \int_{\varepsilon_n t_1'}^{\varepsilon_n t_2'} \|A^{1-\beta} V(\varepsilon_n t_2' - \mu_0)\| \left\{ \int_0^{\mu_0 + \varepsilon_n \tau_n} \dots \int_0^{\mu_{i-2} + \varepsilon_n \tau_n} \|A^{(i-2)\alpha_n + \beta} V(\mu_0 + \tau_n \varepsilon_n + \right.$$

$$\left. + (i-2)\varepsilon_n \tau_n - \mu_{i-1})\| \|V(\mu_{i-1})\| d\mu_1 \dots d\mu_{i-1} \right\} d\mu_0 \leqslant C_3(\beta)\, \varepsilon_n^{\beta} |t_1 - t_2|^{\beta}.$$

Рассуждая подобным образом, нетрудно установить аналогичные оценки и для слагаемых $\mathcal{I}_4 - \mathcal{I}_7$. Итак,

$$\|v_{n,j}(t_1 + m(n)T) - v_{n,j}(t_2 + m(n)T)\| \leqslant C(\beta)\, \varepsilon_n^{\beta} |t_1 - t_2|^{\beta}.$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу при $j \to \infty$, получим (12).

Для доказательства предкомпактности $\{u_n\}$, согласно теореме Асколи, остается установить, что $\{u_n(t_0)\}$ предкомпактна в $H$. Из (16), (18) и $T$-периодичности функций $u_n$ следует, что для этого достаточно рассмотреть $\{v_{n,j(n)}(t_0 + m(n)T)$, где $j(n) = [(1 - \alpha_n)^{-1}]$. Эта последовательность будет предкомпактной в $H$, так как операторы $A^{-\rho}$, $\rho \in (0, 1)$, в силу условия 2) вполне непрерывны (см. [6]), а последовательность $\{A^{\rho} v_{n,j(n)}(t_0 + m(n)T)\}$ по лемме 1 ограничена в $H$. Лемма доказана.


1. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.— М. : Наука, 1963.— 504 с.
2. *Далецкий Ю. А., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве.— М. : Наука, 1970.— 536 с.
3. *Фодчук В. И., Холматов А. К.* К теории асимптотического метода Крылова — Боголюбова для дифференциально-функциональных уравнений.— Укр. мат. журн., 1974, 26, № 5, с. 634—645.
4. *Симоненко И. Б.* Обоснование метода осреднения для абстрактных параболических уравнений.— Мат. сб., 1970, 81 (123), № 1, с. 92—115.
5. *Гурова И. Н.* Одно утверждение типа принципа родственности и вторая теорема Н. Н. Боголюбова в принципе усреднения для параболических уравнений.— В кн.: Качествен-

ные и приближенные методы исследования операторных уравнений. Ярославль : Изд-во Ярослав. ун-та, 1982, с. 48—58.
6. *Красносельский М. А., Забрейко П. П., Пустыльник Е. И., Соболевский П. Е.* Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций.— М. : Наука, 1966.— 500 с.
7. *Каменский М. И., Потапова Л. В.* Об одном методе исследования параболических уравнений с отклоняющимся аргументом.— Тез. докл. VIII Школы по теории операторов в функцион. пространствах. Рига : Изд-во Латв. ун-та, 1983, с. 109—110.
8. *Красносельский М. А., Забрейко П. П.* Геометрические методы нелинейного анализа.— М. : Наука, 1975.— 512 с.

Воронеж. гос. ун-т

Поступила 18.01.84