УДК 519.21

Т. В. Каратаева, Г. П. Буцан

Об изоморфизме мультипликативных и аддитивных параметрических полугрупп без условия непрерывности

Пусть X — банахово кольцо с единицей E и нормой $|\cdot|$.

Определение 1. *Множество точек* $0 = t_0 \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_{m_n} = T < \infty$ *отрезка* $[0, T]$ *называется разбиением* $[0, T]$ *и обозначается* $\Delta[0, T] = \Delta$ *(если ясно, о каком отрезке идет речь). Последовательность разбиений* $\{\Delta_n\}$, $n = \overline{1, \infty}$, *называется монотонной, если* $\Delta_n \subset \Delta_{n+m}$, $n, m = \overline{1, \infty}$. *Последовательность разбиений* $\{\Delta_n\}$, $n = \overline{1, \infty}$, *называется измельчающейся, если* $\delta_n = \max\limits_{0 \leqslant k \leqslant m_n} |t_k^n - t_{k-1}^n| \to 0$ *при* $n \to \infty$.

Определение 2. *Двупараметрическое семейство* x_s^t, $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T < \infty$, *элементов из* X *называется левой* M*-полугруппой, если оно удовлетворяет следующим условиям:*

$$x_s^\tau x_\tau^t = x_s^t, \quad x_\tau^\tau = E, \quad 0 \leqslant s \leqslant \tau \leqslant t \leqslant T < \infty; \tag{1}$$

$$\mathscr{F}(0, T) = \sup_{\Delta[0, T]} \sum_{k=1}^{m} |x_{t_{k-1}}^{t_k} - E| < \infty; \tag{2}$$

$$\forall \tau \in [0, T] \quad |x_{\tau-0}^{\tau} - E|\,|x_\tau^{\tau+0} - E| = 0. \tag{3}$$

Определение 3. *Двупараметрическое семейство* y_s^t, $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T < \infty$, *элементов из* X *называется* A*-полугруппой, если оно удовлетворяет следующим условиям:*

$$y_s^\tau + y_\tau^t = y_s^t, \quad y_\tau^\tau = 0, \quad 0 \leqslant s \leqslant \tau \leqslant t \leqslant T < \infty; \tag{4}$$

$$\varphi(T)=\sup_{\Delta[0,T]}\sum_{k=1}^{m}|y_{t_{k-1}}^{t_k}|<\infty; \tag{5}$$

$$\forall\tau\in[0,\ T]\quad |y_{\tau-0}^{\tau}\|y_{\tau}^{\tau+0}|=0. \tag{6}$$

Целью настоящей работы является доказательство следующей теоремы.

Теорема. *Между множеством* $\mathfrak{M}[0,\ T]$ *всех M-полугрупп на* $[0,\ T]$ *и множеством* $\mathfrak{N}[0,\ T]$ *всех A-полугрупп на* $[0,\ T]$ *существует взаимно-однозначное отображение D, устанавливаемое по формулам:*

$$y_s^t=D(x)_s^t=\lim_{\delta_n\to 0}\sum_{k=1}^{m_n}(x_{t_{k-1}^n}^{t_k^n}-E)=\lim_{\delta_n\to 0}\Sigma(\Delta_n[s,\ t]), \tag{7}$$

$$x_s^t=D^{-1}(y)_s^t=\lim_{\delta_n\to 0}\overrightarrow{\prod_{k=1}^{m_n}}(y_{t_{k-1}^n}^{t_k^n}+E)=\lim_{\delta_n\to 0}\overrightarrow{\Pi}(\Delta_n[s,\ t]), \tag{8}$$

Здесь $0\leqslant s\leqslant t\leqslant T$, $x\in\mathfrak{M}[0,\ T]$, $y\in\mathfrak{L}[0,\ T]$, *а произведение* $\overrightarrow{\Pi}$ *берется в порядке возрастания индекса k слева направо, что соответствует левой M-полугруппе* (*см.* [1]).

Замечание 1. Сформулированная теорема усиливает соответствующий результат работы [2], полученный для семейств, непрерывных справа в каждой точке отрезка $[0,\ T]$ (см. [2, § 6]).

Отметим, что если не предполагать выполненными условия (3) и (6), то может случиться, что в некоторой точке $\tau\in[0,\ T]$ не выполняются равенства

$$|(x_{\tau-0}^{\tau}-E)(x_{\tau}^{\tau+0}-E)|=0,\quad |y_{\tau-0}^{\tau}\ y_{\tau}^{\tau+0}|=0, \tag{9}$$

и тогда предел $D(x)_s^t$ в (7) (и аналогично $D^{-1}(y)_s^t$ в (8)) будет зависеть по последовательности разбиений $\{\Delta_n[s,\ t]\}$.

Действительно, если $\tau\notin\Delta_n$, то при $n\to\infty$ и $t_{k-1}^n<\tau<t_k^n$

$$|\Sigma(\Delta_n\cup\tau)-\Sigma(\Delta_n)|=|(x_{t_{k-1}^n}^{\tau}-E)(x_{\tau}^{t_k^n}-E)|\to|x_{\tau-0}^{\tau}-E)(x_{\tau}^{\tau+0}-E)|\neq 0.$$

Таким образом, условия (3) и (6) хотя и являются только достаточными, все же весьма близки к необходимым. И здесь уместно высказать следующую гипотезу: в условиях (1), (2) и (4), (5) для справедливости сформулированной теоремы необходимо и достаточно условие (9).

Доказательству теоремы мы предпошлем ряд лемм и следующее замечание.

Замечание 2. Несложно показать, что из условий (1), (2) и (4), (5) вытекает существование следующих пределов: x_{s-0}^{t+0}, x_{s+0}^{t+0}, x_{s+0}^{t-0}, $x_{t+0}^{t+0}=E$, $x_{t-0}^{t-0}=E$ при $0\leqslant s\leqslant t\leqslant T$.

Лемма 1. *Если в каждой точке* $t\in[0,\ T]\,|x_{t-0}^{t+0}-E|<1$, *то при* $0\leqslant s\leqslant t\leqslant T$ *существует* $(x_s^t)^{-1}$ *и функция* $|(x_s^t)^{-1}|$ *ограничена на* $[0,\ T]$.

Доказательство. Если бы это утверждение не было справедливо для некоторых $0\leqslant s\leqslant t\leqslant T$, то по свойству (1) оно не было бы справедливо или для $x_{(t+s)/2}^t$ или для $x_s^{(t+s)/2}$ и т. д., т. е. существовали бы такие последовательности точек $\{s_n\}$ и $\{t_n\}$, $n=\overline{1,\ \infty}$, $0\leqslant s_n\leqslant t_n\leqslant T$, сходящиеся к некоторой точке $t\in[0,\ T]$, что утверждение леммы не было бы справедливо для последовательности $\{x_{s_n}^{t_n}\}$, $n=\overline{1,\ \infty}$. Однако при $s_n\leqslant t\leqslant\leqslant t_n$ (для бесконечного числа n) это противоречило бы предположению $|x_{t-0}^{t+0}-E|<1$, а при $t\leqslant s_n\leqslant t_n$ или $s_n\leqslant t_n\leqslant t$ (для бесконечного числа n) это противоречило бы замечанию 2. Итак, $(x_s^t)^{-1}$ существует.

Если бы функция $|(x_0^{s_n})^{-1}|$ не была ограничена на $[0,\ T]$, то существовали бы точка $t\in[0,\ T]$ и последовательность $s_n\subset[0,\ T]$, $n=\overline{1,\ \infty}$, такие, что $s_n \to t$, но $|(x_0^{s_n})^{-1}| \to \infty$ при $n \to \infty$. Причем, не ограничивая общности, последовательность $\{s_n\}$ можно выбрать так, чтобы либо $s_n \uparrow t$, либо $s_n \downarrow t$ при $n \to \infty$. Рассмотрим для определенности первый случай. Тогда по условию (2) $\sum_{n=1}^{\infty} |x_{s_{n-1}}^{s_n} - E| = C < F(0, T)$, и поэтому для фиксированного $\varepsilon > 0$ начиная с некоторого n справедливо неравенство $|x_{s_{k-1}}^{s_k} - E| < \varepsilon$ при $k \geqslant n$, откуда

$$|(x_0^{s_k})^{-1}| = |[(x_{s_{k-1}}^{s_k} - E) + E)^{-1}][(x_{s_{n-1}}^{s_n} - E) + E]^{-1}(x_0^{s_{n-1}})^{-1}| \leqslant \leqslant |(x_0^{s_{n-1}})^{-1}| \left[\prod_{i=n}^{k} (1 + |x_{s_{i-1}}^{s_i} - E|\right]^{-1}. \tag{10}$$

Поскольку все $|x_{s_{i-1}}^{s_i} - E|$ неотрицательны, $i = \overline{n, \infty}$, то сходимость бесконечного произведения в (10) эквивалентна сходимости ряда $\sum_{i=1}^{\infty} |x_{s_{i-1}}^{s_i} - E| < \mathscr{F}(0, T)$, и, таким образом, правая часть выражения (10) ограничена, что противоречит предположению $|(x_0^{s_n})^{-1}| \to \infty$ при $n \to \infty$. Теперь из неравенства $|(x_s^t)^{-1}| \leqslant |(x_0^t)^{-1}||x_0^s|$ и условия (2) вытекает существование такой константы $\alpha(T)$, что $|(x_s^t)^{-1}| < \alpha(T)$ при $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$.

Заметим, что $\mathscr{F}(s, t) = \sup_{\Delta[s,t]} \sum_{k=1}^{m} |x_{t_{k-1}}^{t_k} - E|$ не является в общем случае аддитивной функцией интервала (в отличие от $\varphi(s, t) = \varphi(t) - \varphi(s)$), и определим функцию $f(s, t) = \sup_{\Delta[s,t]} \sum_{k=1}^{m} |x_0^{t_k} - x_0^{t_{k-1}}| \leqslant \sup_{0 \leqslant \tau \leqslant t} |x_0^\tau| \mathscr{F}(s, t)$, которая уже аддитивна относительно интервала, т. е.

$$f(s, \tau) + f(\tau, t) = f(s, t), \quad 0 \leqslant s \leqslant \tau \leqslant t \leqslant T. \tag{11}$$

Лемма 2. *При $0 \leqslant s \leqslant \tau \leqslant t \leqslant T$ справедливы равенства*

$$f(s, \tau - 0) + |x_0^\tau - x_0^{\tau-0}| = f(s, \tau) = f(s, \tau + 0) - |x_0^{\tau+0} - x_0^\tau|. \tag{12}$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что из (11) вытекает равенство

$$f(s, \tau \pm 0) + f(\tau \pm 0, t) = f(s, t). \tag{13}$$

Пусть измельчающаяся последовательность разбиений $\{\Delta_n\}$, $n = \overline{1, \infty}$, и отрезка $[s, t]$ такова, что $f(s, \tau) = \lim_{\delta_n \to 0} \sum_{k=1}^{m_n} |x_0^{t_k^n} - x_0^{t_{k-1}^n}|$, тогда

$$\sum_{k=1}^{m_n} |x_0^{t_k^n} - x_0^{t_{k-1}^n}| \leqslant f(s, t_{m_n-1}^n) + |x_0^\tau - x_0^{t_{m_n-1}^n}| \leqslant f(s, \tau).$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $n \to \infty$, получаем первое из равенств (12). Аналогичные рассуждения приводят к равенству $f(\tau, t) = f(\tau+0, t) + |x_0^{\tau+0} - x_0^\tau|$. Вычитая последнее из соответствующего равенства в (13), получаем второе из равенств (12).

Следствие 1. *Функция $f(t) = f(0, t)$ непрерывна в каждой точке $\tau \in [0, T]$ слева или справа (в зависимости от точки τ). То же самое справедливо и для функции $\varphi(t)$.*

Лемма 3. *Если М-полугруппа x_s^t удовлетворяет условию леммы 1, то при $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$ существует предел*

$$\lim_{\delta_n \to 0} \sum_{k=1}^{m_n} (x_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} - E) = D(x)_s^t = y_s^t,$$

который не зависит от измельчающейся последовательности разбиений $\{\Delta_n\}$, $n=\overline{1,\infty}$.

Доказательство. Как и в [3], достаточно показать, что $\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta(\varepsilon)$ $\forall\Delta_n$, у которого $\delta_n<\delta(\varepsilon)$ и $\Delta_r\supset\Delta_n$, справедливо неравенство $|\Sigma(\Delta_r[s,t])-\Sigma(\Delta_n[s,t])|<\varepsilon$.

Пусть, как и в (3), $\Delta_n[s,t]=\Delta_n=\{t_k^n\}$, $s=t_0^n<t_1^n<\ldots<t_{m_n}^n=t$, $\Delta_r[s,t]=\Delta_r=\bigcup\limits_{k=1}^{m_n}\{s_i\}$, $t_{k-1}^n=s_0^k\leqslant s_1^k\leqslant\ldots\leqslant s_{r_k}^n=t_k^n$. Тогда (см. [4])

$$|\Sigma(\Delta_r)-\Sigma(\Delta_n)|=\left|\sum_{k=1}^{m_n}(x_{t_{k-1}^n}^{t_k^n}-E)-\sum_{k=1}^{m_n}\sum_{i=1}^{r_k}(x_{s_{i-1}^k}^{s_i^k}-E)\right|=$$

$$=\left|\sum_{k=1}^{m_n}\sum_{i=1}^{r_k}(x_{t_{k-1}^n}^{s_{i-1}^k}-E)(x_{s_{i-1}}^{s_i^k}-E)\right|\leqslant\Sigma\Sigma\,|(x_0^{t_{k-1}^n})^{-1}|\times$$

$$\times|(x_0^{s_{i-1}^k})^{-1}|\,|x_0^{s_{i-1}^k}-x_0^{t_{k-1}^n}|\,|x_0^{s_i^k}-x_0^{s_{i-1}^k}|\leqslant$$

$$\leqslant\alpha^2(T)\,\Sigma\Sigma\,(f(s_{i-1}^k)-f(t_{k-1}^n))\times(f(s_i^k)-f(s_{i-1}^k)),$$

и теперь доказательство леммы завершается аналогично [3] с учетом следствия 1.

Следствие 2. *Справедливы оценки*

$$|D(x)_s^t|\leqslant F(s,t),\quad |x_s^t-(D(x)_s^t+E)|\leqslant\alpha^2(T)(f(t-0)-f(s))\times$$
$$\times(f(t)-f(s+0)).\tag{14}$$

Первая из них очевидна, а вторая получается предельным переходом в неравенстве

$$\left|x_s^t-E-\sum_{k=1}^{m_n}(x_{t_{k-1}^n}^{t_k^n}-E)\right|=\sum_{k=1}^{m_n}(x_s^{t_{k-1}^n}-E)(x_{t_{k-1}^n}^{t_k^n}-E)\Bigg|\leqslant\alpha^2(T)(f(t_{m_{n-1}}^n)-$$
$$-f(s))(f(t)-f(t_1^n)).$$

Из оценок (14) вытекает, что в каждой точке $\tau\in[0,T]$ выполняется равенство $x_{\tau-0}^{\tau+0}-E=D(x)_{\tau-0}^{\tau+0}$.

Лемма 4. Ф*ормулы* (7) *и* (8) *остаются справедливыми, если у М-полугруппы* x_s^t *и А-полугруппы* y_s^t *убрать или добавить в точках непрерывности конечное число скачков.*

Доказательство. Прежде всего напомним (см. [4]), что под скачком M-полугруппы x_s^t в точке τ понимается величина $x_{\tau-0}^{\tau+0}$, а под скачком A-полугруппы y_s^t — величина $y_{\tau-0}^{\tau+0}$.

Поскольку рассуждения при доказательстве первого и второго утверждений леммы взаимно обратны, докажем первое из них.

Итак, пусть M-полугруппа $\bar{x}_s^t$ удовлетворяет условию (7), а $\tilde{x}_s^t$ — скачкообразная M-полугруппа со скачками в точках τ_i, $i=\overline{1,N}$, которые являются точками непрерывности $\bar{x}_s^t$, и между ними $\tilde{x}_s^t$ постоянна. Очевидно, $\tilde{x}_s^t$ удовлетворяет условию (7), причем A-полугруппа $\tilde{y}_s^t=D(\tilde{x})_s^t$ имеет скачки $\tilde{y}_{\tau_i-0}^{\tau_i+0}=x_{\tau_i-0}^{\tau_i+0}-E$ в тех же точках τ_i, $i=\overline{1,N}$, а между ними — постоянна. Легко видеть, что в силу указанных свойств $\bar{x}_s^t$ и $\tilde{x}_s^t$ всегда существует предел

$$x_s^t=\bar{x}_s^t\boxtimes\tilde{x}_s^t=\lim_{r_n\to0}\overrightarrow{\prod_{k=1}^{m_n}}\bar{x}_{t_{k-1}^n}^{t_k^n}\tilde{x}_{t_{k-1}^n}^{t_k^n},$$

который является M-полугруппой со скачками $\tilde{x}_{\tau_i-0}^{\tau_i+0}$ в точках τ_i, $i=\overline{1,N}$. Поскольку эти точки являются точками непрерывности $\bar{x}_s^t$, для которой $\exists y_s^t = D(x)_s^t$, то справедливо равенство

$$y_s^t = D(x)_s^t = \lim_{\delta_n\to 0}\sum (x_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} - E) = \lim\sum_{k=1}^{m_n}(\bar{x}_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} - E) + \lim\sum(\tilde{x}_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} - E) =$$

$$= \bar{y}_s^t + \tilde{y}_s^t$$

и, следовательно, x_s^t удовлетворяет (7).

Пусть теперь A-полугруппа $\bar{y}_s^t$ удовлетворяет (8), а $\tilde{y}_s^t$ — скачкообразная A-полугруппа со скачками в точках τ_i, $i=\overline{1,N}$, которые являются точками непрерывности y_s^t, а между ними $\tilde{y}_s^t$ постоянна. Тогда очевидно, что $\tilde{y}_s^t$ удовлетворяет условию (8), причем M-полугруппа $\tilde{x}_s^t = D^{-1}(\tilde{y})_s^t$ имеет скачки $\tilde{x}_{\tau_i-0}^{\tau_i+0} = y_{\tau_i-0}^{\tau_i+0} + E$ в тех же точках τ_i, $i=\overline{1,N}$, а между ними — постоянна.

Легко видеть, что $y_s^t = \bar{y}_s^t + \tilde{y}_s^t$ является A-полугруппой со скачками $\tilde{y}_{\tau_i-0}^{\tau_i+0}$ в точках τ_i, $i=\overline{1,N}$, а в силу указанных свойств $\bar{y}_s^t$ и $\tilde{y}_s^t$ и условия леммы справедливо равенство

$$x_s^t = D^{-1}(y_s^t) = \lim\overset{\rightarrow}{\prod_{k=1}^{m_n}}(y_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} + E) = \lim\overset{\rightarrow}{\prod_{k=1}^{m_n}}(\bar{y}_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} + E)(\tilde{y}_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} + E).$$

Следовательно, y_s^t удовлетворяет (8).

Следствие 3. *Теорема справедлива для скачкообразных M- и A-полугрупп, которые имеют конечное число скачков в точках τ_i, $i=\overline{1,N}$, а между ними постоянны.*

Лемма 5. *При $\Delta_n[s,t] = \{t_k^n\}$ для A- полугруппы y_s^t справедливы оценки:*

$$\left|\overset{\rightarrow}{\prod_{k=1}^{m_n}}(y_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} + E)\right| \leqslant \exp\{\varphi(t)-\varphi(s)\}; \qquad \left|\overset{\rightarrow}{\prod_{k=1}^{m_n}}(y_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} + E) - E\right| \leqslant$$

$$\leqslant (\varphi(t)-\varphi(s))\exp\{\varphi(t)-\varphi(s)\}; \qquad \left|\overset{\rightarrow}{\prod_{k=1}^{m_n}}(y_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} + E) - (y_s^t + E)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{m_n}(\varphi(t_{k-1}^n) - \varphi(s))(\varphi(t_k^n) - \varphi(t_{k-1}^n))\exp(\varphi(t)-\varphi(s)). \tag{15}$$

Доказательство. Заметим, что для любых элементов $A_i\in X$, $i=\overline{1,n}$, выполняются неравенства

$$\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\ldots<i_k\leqslant n}|A_{i_1}||A_{i_2}|\ldots|A_{i_k}| \leqslant \left(\sum_{i=1}^n |A_i|\right)^k/k!,$$

$$\left|\sum_{1\leqslant i<j<k_1<\ldots<k_r\leqslant n}A_iA_jA_{k_1}\ldots A_{k_r}\right| \leqslant \left|\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}A_iA_j\right|\left|\sum_{1\leqslant k_1<\ldots<k_r\leqslant n}A_{k_1}\ldots A_{k_2}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{1\leqslant j\leqslant n}\left|\left(\sum_{1\leqslant i\leqslant j}A_i\right)\right|\left|A_j\right|\left(\sum_{i=1}^n|A_i|\right)^r/r!$$

Поэтому

$$\left|\overset{\rightarrow}{\prod_{k=1}^{m_n}}(y_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} + E) - (y_s^t + E)\right| = \left|E + \sum_{k=1}^{m_n}y_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant m_n}y_{t_{i-1}^n}^{t_i^n}y_{t_{j-1}^n}^{t_j^n} + \right.$$

$$+\sum_{1\leqslant i<j<k<m_n} y_{t_{i-1}^n}^{t_i^n} y_{t_{j-1}^n}^{t_j^n} y_{t_{k-1}^n}^{t_k^n}+\ldots+y_s^{t_1^n} y_{t_1^n}^{t_2^n}\ldots y_{t_{m_n-1}^n}^{t_{m_n}^n}-E-$$

$$-\sum_{k=1}^{m_n} y_{t_{k-1}^n}^{t_k^n}\Bigg|=\sum_{i=1}^{m_n}|y_s^{t_{i-1}^n}||y_{t_{i-1}^n}^{t_i^n}|\left(1+\sum_{k=1}^{m_n}|y_{t_{k-1}^n}^{t_k^n}|\right)+\left(\sum_{k=1}^{m_n}|y_{t_{k-1}^n}^{t_k^n}|\right)^2/2!+\ldots$$

$$\ldots+\left(\sum_{k=1}^{m_n}|y_{t_{k-1}^n}^{t_k^n}|\right)^n/n!\leqslant\sum_{i=1}^{m_n}(\varphi(t_{i-1}^n)-\varphi(s))(\varphi(t_i^n)-\varphi(t_{i-1}^n))\exp(\varphi(t)-\varphi(s)).$$

Оставшиеся оценки в (15) получаются аналогично.

Лемма 6. *Для всякой A-полугруппы y_s^t при $0\leqslant s\leqslant t\leqslant T$ существует предел*

$$\overline{D}(y)_s^t=\lim_{\delta_n\to 0}\overrightarrow{\prod_{k=1}^{m_n}}(y_{t_{k-1}^n}^{t_k^n}+E)=\lim_{\delta_n\to 0}\overrightarrow{\prod_{k=1}^{m_n}}(\Delta_n),$$

который не зависит от измельчающейся последовательности разбиений $\{\Delta_n\}$, $n=\overline{1,\infty}$.

Доказательство. В обозначениях леммы 3, воспользовавшись (15), оценим разность

$$\left|\overrightarrow{\prod}(\Delta_r)-\overrightarrow{\prod}(\Delta_n)\right|=\left|\sum_{k=1}^{m_n}\overrightarrow{\prod_{j=1}^{k-1}}\left(\overrightarrow{\prod_{i=1}^{r_j}}(y_{s_{i-1}^j}^{s_i^j}+E)\right)\left[\overrightarrow{\prod_{i=1}^{r_k}}(y_{s_{i-1}^k}^{s_i^k}+E)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-(y_{t_{k-1}^n}^{t_k^n}+E)\right]\overrightarrow{\prod_{j=k+1}^{m_n}}(y_{t_{j-1}^n}^{t_j^n}+E)\right|\leqslant\sum_{k=1}^{m_n}\exp(\varphi(t_{k-1}^n)-\varphi(s))\times$$

$$\times\left(\sum_{i=1}^{r_k}(\varphi(s_{i-1}^k)-\varphi(t_{k-1}^n))(\varphi(s_i^k)-\varphi(s_{i-1}^k))\right)\exp(\varphi(t)-\varphi(t_{k-1}^n))\leqslant$$

$$\leqslant\exp\{\varphi(t)-\varphi(s)\}\sum_{k=1}^{m_n}\sum_{i=1}^{r_k}(\varphi(s_{i-1}^k)-\varphi(t_{k-1}^r))(\varphi(s_i^k)-\varphi(s_{i-1}^k)).$$

Аналогично [3], в силу следствия 1 правая часть этого выражения стремится к нулю при $n\to\infty$.

Следствие 4. *Переходя к пределу при $n\to\infty$ в неравенствах* (15), *аналогично следствию* 2 *получаем оценки*:

$$|\overline{D}(y)_s^t-(y_s^t+E)|\leqslant(\varphi(t-0)-\varphi(s))(\varphi(t)-\varphi(s+0))\exp\{\varphi(t)-\varphi(s)\},$$

$$|\overline{D}(y)_s^t-E|\leqslant(\varphi(t)-\varphi(s))\exp(\varphi(t)-\varphi(s)),\quad|\overline{D}(y)_s^t|\leqslant\exp\{\varphi(t)-\varphi(s)\}.\tag{16}$$

Из этих оценок вытекает, что в каждой точке $\tau\in[0,T]$ справедливо равенство $y_{\tau-0}^{\tau+0}=\overline{D}(y)_{\tau-0}^{\tau+0}-E$.

Доказательство теоремы. В силу леммы 3 и следствия 2 для каждой M-полугруппы $x\in\mathfrak{M}[0,T]$, у которой $\forall\tau\in[0,T]$ $|x_{\tau-0}^{\tau+0}-E|<1$, определен при $0\leqslant s\leqslant t\leqslant T$ предел $D(x)_s^t=y_s^t$ и этот предел является A-полугруппой, у которой $\forall\tau\in[0,T]$ $|y_{\tau-0}^{\tau+0}|<1$. Покажем, что $\overline{D}(D(x)_s^t)=x_s^t$ при $0\leqslant s\leqslant t\leqslant T$. Для этого, воспользовавшись (14), оценим разность

$$\left|x_s^t-\overrightarrow{\prod_{k=1}^{m_n}}(D(x)_{t_{k-1}^n}^{t_k^n}+E)\right|\leqslant\sum_{k=1}^{m_n}\left|x_s^{t_{k-1}^n}(x_{t_{k-1}^n}^{t_k^n}-D(x)_{t_{k-1}^n}^{t_k^n}+E))\times\right.$$

$$\left.\times\overrightarrow{\prod_{i=k+1}^{m_n}}(D(x)_{t_{i-1}^n}^{t_i^n}+E)\right|\leqslant(\mathscr{F}(s,t)+1)\,\alpha^2(T)\exp\mathscr{F}(s,t)\sum_{k=1}^{m_n}(f(t_k^n-0)-$$

$$-f(t_{k-1}^n))\times(f(t_k^n)-f(t_{k-1}^n+0))\tag{17}$$

и заметим, что в силу леммы 6 достаточно построить монотонную измельчающуюся последовательность разбиений $\{\Delta_n\}$, $n = \overline{1, \infty}$, для которой сумма в правой части (17) стремится к нулю при $n \to \infty$. Поэтому рассмотрим последовательность $\varepsilon_n \downarrow 0$ при $n \to 0$ и, воспользовавшись монотонностью и ограниченностью на $[0, T]$ функции $f(\tau)$, выделим у нее конечное число скачков на $[s, t]$ так, чтобы сумма всех оставшихся ее скачков была меньше $\varepsilon_1 f^{-1}(T)/4$. Занумеруем все точки скачков τ_i функции $f(\tau)$ на $[s, t]$ так, чтобы первые $N(\varepsilon_1)$ из них были именно теми, в которых происходят выделенные скачки, и представим функцию $f(\tau)$ на $[s, t]$ в виде $f(\tau) = f_1(\tau) + f_2(\tau) + f_3(\tau)$, где $f_1(\tau)$ непрерывна, а $f_2(\tau)$ и $f_3(\tau)$ — скачкообразные, причем скачки $f_3(\tau)$ совпадают по месту и величине с теми скачками $f(\tau)$, которые попали в выделенные $N(\varepsilon_1)$ скачков, и только с ними, а скачки $f_2(\tau)$ совпадают по месту и величине с оставшимися скачками $f(\tau)$ и только с ними. Кроме того, все $f_i(\tau)$, $i = \overline{1, 3}$, монотонно возрастают на $[s, t]$, а $f_2(\tau)$ и $f_3(\tau)$ непрерывны справа или слева в каждой точке $\tau \in [s, t]$ (в зависимости от τ) одновременно с $f(\tau)$ и не имеют общих точек разрыва. Легко видеть, что в этих обозначениях сумма в правой части (17) представима в виде пяти слагаемых:

$$\sum (f_1(t_k^n - 0) - f_1(t_{k-1}^n))(f(t_k^n) - f(t_{k-1}^n + 0)) + \sum (f_2(t_k^n - 0) - f_2(t_{k-1}^n)) \times$$
$$\times (f(t_k^n) - f(t_{k-1}^n + 0)) + \sum (f_3(t_k^n - 0) - f_3(t_{k-1}^n))(f_1(t_k^n) - f_1(t_{k-1}^n + 0)) +$$
$$+ \sum (f_3(t_k^n - 0) - f_3(t_{k-1}^n))(f_2(t_k^n) - f_2(t_{k-1}^n + 0)) + \sum (f_3(t_k^n - 0) -$$
$$- f_3(t_{k-1}^n))(f_3(t_k^n) - f_3(t_{k-1}^n + 0)). \tag{18}$$

Выберем произвольное разбиение $\Delta^{(1)} = \{t_k\}$, $k = \overline{1, M}$, отрезка $[s, t]$ так, чтобы выполнялись условия

$$\delta_1 = \max_{1 \leqslant k \leqslant M} (t_k - t_{k-1}) < \min_{0 < i \neq j \leqslant N(\varepsilon_1)} |\tau_i - \tau_j|, \tag{19}$$

$$\sup_{1 \leqslant k \leqslant M} (f_1(t_k) - f_1(t_{k-1})) < \min\{\varepsilon_1 f^{-1}(T)/4,\ \varepsilon_1(4N(\varepsilon_1) f(T))^{-1}\}, \tag{20}$$

и определим $\Delta_1 = \Delta^{(1)} \bigcup \bigcup_{i=1}^{N(\varepsilon_1)} \tau_i$. Тогда первое слагаемое в выражении (18) при $n = 1$, $m_1 = M + N(\varepsilon_1)$ в силу (20) будет меньше $\varepsilon_1/4$. Его второе слагаемое будет меньше $\varepsilon_1/4$, поскольку $\forall k = \overline{0, m_1}$ $(f_2(t_k^1) - f_2(t_{k-1}^1 + 0)) \leqslant \varepsilon_1 f^{-1}(T)/4$. В силу (19) третье слагаемое (18) будет содержать не более $N(\varepsilon_1)$ членов, отличных от нуля, и в силу (20) оно будет меньше $\varepsilon_1/4$. Четвертое слагаемое в (18) будет ограничено величиной $f^{-1}(T)(f_2(t) - f_2(s)) \leqslant \varepsilon_1/4$ в силу свойств функции $f_2(T)$, а пятое слагаемое в (18) будет тождественно равно нулю. Таким образом, для разбиения Δ_1 и всех его содержащих разбиений сумма, входящая в правую часть (17), будет меньше ε_1.

Выделим у $f(\tau)$ на $[s, t]$ конечное число $N(\varepsilon_2)$ скачков так, чтобы сумма всех ее оставшихся скачков была меньше $\varepsilon_2 f^{-1}(T)/4$, и, взяв $\Delta^{(2)} \supset \Delta^{(1)}$ вместо $\Delta^{(1)}$ в предыдущем построении, получим такое разбиение $\Delta_2 \supset \Delta_1$, для которого (и всех его содержащих разбиений) сумма в правой части (17) будет меньше ε_2. Продолжая этот процесс до бесконечности, получим искомую монотонную измельчающуюся последовательность разбиений $\{\Delta_n\}$, $n = \overline{1, \infty}$. Используя, наконец, лемму 4, заключаем, что отображение D является вложением $\mathfrak{M}[0, T]$ в $\mathfrak{N}[0, T]$.

Покажем теперь, что D отображает $\mathfrak{M}[0, T]$ на $\mathfrak{N}[0, T]$. Для этого возьмем произвольную $y \in \mathfrak{M}[0, T]$ и при $0 \leqslant s < t \leqslant T$ построим $\overline{D}(y)_s^t$. По лемме 6 и следствию 4 $D(\overline{D}(y)) \in \mathfrak{M}[0, T]$. Покажем, что $D(\overline{D}(y)) = y$. Для этого заметим, что в силу первой из оценок (16) для произвольной монотонной измельчающейся последовательности разбиений $\{\Delta_n\}$ отрезка $[s, t]$ выполняется неравенство

$$\left|\sum_{k=1}^{m_n} (\overline{D}(y)_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} - E) - y_s^t\right| \leqslant \sum_{k=1}^{m_n} |\overline{D}(y)_{t_{k-1}^n}^{t_{k-1}^n} - (y_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} + E)| \leqslant \exp(\varphi(t) - \varphi(s)) \times$$

$$\times \sum_{k=1}^{m_n} (\varphi(t_k^n - 0) - \varphi(t_{k-1}^n))(\varphi(t_k^n) - \varphi(t_{k-1}^n + 0)). \tag{21}$$

Аналогично предыдущему, в силу свойств функции $\varphi(\tau)$, последовательность $\{\Delta_n\}$, $n = \overline{1, \infty}$, можно выбрать так, чтобы правая часть неравенства (21) стремилась к нулю при $n \to \infty$.

Воспользовавшись леммами 3 и 4, перейдем к пределу при $n \to \infty$ в неравенстве (21) для выбранной последовательности $\{\Delta_n\}$ и получим требуемое равенство $D(\overline{D}(y))_s^t = y_s^t$ при $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$.

1. *Буцан Г. П., Буцан С. П.* Неоднородные стохастические полугруппы.— Укр. мат. журн., 1981, 33, № 4, с. 437—443.
2. *Добрушин Р. Л.* Обобщенные уравнения Колмогорова для марковских процессов с конечным числом возможных состояний.— Мат. сб., 1953, 33, № 3, с. 567—596.
3. *Буцан Г. П.* Необходимое и достаточное условие существования интеграла Стильтьеса для функций ограниченной вариации.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1984, № 12, с.
4. *Буцан Г. П.* Стохастические полугруппы.— Киев : Наук. думка, 1977.— 213 с.

Ин-т матем. АН УССР, Киев Поступила 10.06.84.